PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Antonia Zulmira da Silva

Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o *Caderno do professor* de Matemática do oitavo ano

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Antonia Zulmira da Silva

Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o *Caderno do professor* de Matemática do oitavo ano

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.***

São Paulo

2012

Banca Examinadora

Dedico este trabalho ao meu companheiro, amigo de uma vida, Edmilson, que nos momentos difíceis ajudou-me a encontrar forças para prosseguir lutando a fim de alcançar mais este objetivo em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, pois me deu o dom da vida e sempre me concede sua bênção, em todos os momentos de minha existência.

A minha mãe, Zulmira Ana da Conceição, que me educou e me ensinou todos os valores éticos que deveriam ser inerentes aos seres humanos.

A meu esposo amado, Edmilson Moreno da Silva, que sempre esteve a meu lado com todo seu amor, carinho e cumplicidade.

A minha orientadora, Prof.ª D.ʳᵃ Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, fonte inesgotável de conhecimento. Grata, pela paciência, compreensão e companheirismo nos momentos difíceis durante a elaboração desta pesquisa.

Às Prof.as D.ras Leila Zardo Puga e Barbara Lutaif Bianchini, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora e cujas críticas e sugestões foram de fundamental importância na realização deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, por sua competência e profissionalismo.

A todos os colegas do grupo de estudos GPEA e do Mestrado, pelo companheirismo e sugestões durante todo o curso e por compartilharmos não só momentos difíceis, mas também alegres.

Ao secretário Francisco Olimpio, pelo profissionalismo, eficiência e amizade.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pelo auxílio concedido por meio da Bolsa Mestrado, que sem dúvida possibilitou o término deste estudo, e à Diretoria de Ensino de Carapicuíba, pelo acompanhamento dessa dotação.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que fosse possível a realização desta etapa de minha vida.

A autora

RESUMO

Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o Caderno do professor de Matemática do oitavo ano

O presente estudo teve por objetivo evidenciar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ do *Caderno do professor* de Matemática adotado na docência do Ensino Fundamental da rede pública do Estado de São Paulo, com a finalidade de escrever um produto que contribuísse com esse material. O objetivo se desdobrou nas seguintes questões de pesquisa: As atividades presentes no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ do *Caderno do professor* de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados? Para definir os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico, tomamos como referências sobre o pensamento algébrico Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e, a respeito do uso das variáveis, Ursini *et al*. (2005). Ao mesmo tempo, investigamos os multissignificados das equações, segundo Ribeiro e Machado (2009). Para a condução da pesquisa, utilizamos o método de análise documental, conforme Lüdke e André (1986). Dentre os doze indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico considerados, nove foram evidenciados nas atividades analisadas. Os resultados permitiram concluir que as atividades analisadas possibilitam que o professor conduza os alunos a desenvolver o pensamento algébrico. O produto deste trabalho contém referências aos elementos teóricos do trabalho, um quadro com os indicadores do pensamento algébrico utilizados nas análises e a síntese das análises das atividades, evidenciando os indicadores do pensamento algébrico. Esse produto está anexado a esta dissertação e também encontra-se disponível em CD-ROM.

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Equações algébricas de primeiro grau; Caderno do professor; Educação Matemática

ABSTRACT

Algebraic thinking and equations in middle school: A contribution to the 8th-grade Mathematics *Teacher's Manual* adopted in São Paulo, Brazil

The purpose of this investigation was to find evidence of indicators of algebraic thinking development for the topic 'First-degree algebraic equations' from the mathematics *Teacher's Manual* adopted by public middle schools in São Paulo state, Brazil, and thus provide a written contribution to this teaching material. The investigation sought to answer the following research questions: Do the activities proposed in the topic 'First-degree algebraic equations' from the mathematics *Teacher's Manual* for the third quarter of the eighth grade enable teachers to foster the development of algebraic thinking among students? If so, which indicators are most evident? The definition used for indicators of algebraic thinking development drew on Fiorentini, Miorim, and Miguel (1993) and Fiorentini, Fernandes and Cristóvão (2005) with regard to aspects of algebraic thinking and on Ursini *et al*. (2005) concerning use of variables. Concurrently, the so-called multimeanings of equations, as defined by Ribeiro and Machado (2009), were taken into account. Desk research, as defined by Lüdke and André (1986), was the method selected for the study. Of the twelve indicators of algebraic thinking development investigated, nine were detected in the activities examined. The results obtained showed that these activities enable teachers to foster the development of algebraic thinking among students. A final, stand-alone section summarizes the theoretical framework adopted and includes a chart of the algebraic thinking indicators investigated, in addition to a synthetic view of the analyses providing evidence of these indicators in the activities. This summarized section is also available in CD-ROM format.

Keywords: Algebraic thinking; First-degree algebraic equations; Teacher's manual; Mathematical Education.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As inquietações que motivam uma pesquisa podem advir de diversas situações. No caso do presente estudo, além da satisfação pessoal pela busca do saber, tem-se também a motivação do desenvolvimento profissional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) enfatizam a necessidade de que os professores compreendam os objetivos de ensinar Álgebra e entendam como os conceitos algébricos são construídos, em lugar de enfatizarem as manipulações algébricas.

Esses aspectos reforçam meu interesse em alcançar maior entendimento sobre o ensino de Álgebra, e mais especificamente o de equações algébricas de primeiro grau, pois acredito que esse tópico, mais do que apenas limitar-se à manipulação algébrica, preste-se a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como professora da Educação Básica, busquei aprimoramento profissional em um curso de pós-graduação *stricto sensu* e, como resultado, este trabalho insere-se na linha de pesquisa Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), desenvolvido no âmbito do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA).

A presente pesquisa, que visa contribuir com o GPEA, com minha formação docente e com o *Caderno do professor* de Matemática do oitavo ano[1] do Ensino Fundamental utilizado nas escolas públicas do Estado de São Paulo, buscou evidenciar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico em atividades resolvidas no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’. O estudo está desenvolvido em quatro capítulos, complementados por considerações finais.

O Capítulo 1 apresenta o problema de pesquisa e destaca como surgiram a ideia do tema e o interesse por ele, bem como sua relevância e a justificativa para sua exploração.

O Capítulo 2 focaliza a fundamentação teórica. A pesquisa tem como referência elementos teóricos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e de Ursini *et al*. (2005), elementos esses que são complementados com contribuições de Ribeiro e Machado (2009), uma vez que os multissignificados das equações algébricas de primeiro grau são aqui explorados sob a visão desses autores.

O Capítulo 3 traz os referenciais metodológicos e os procedimentos da pesquisa, que por suas características é empreendida com abordagem qualitativa e está voltada à análise documental (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

No Capítulo 4 são apresentadas as análises, evidenciando os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por fim relatam-se as considerações finais, sumarizando as conclusões alcançadas, e é apresentado o produto desta pesquisa.

[1] O atual oitavo ano corresponde à antiga sétima série do Ensino Fundamental. A nova denominação reflete a ampliação do Ensino Fundamental de oito séries para nove anos, estabelecida pela Resolução 3, de 3 de agosto de 2005 (BRASIL, 2005).

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA DE PESQUISA

1.1 Delimitação do problema de pesquisa

Segundo a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo:

> Nos dez últimos anos, o ensino de Álgebra na escola de 1.º grau tem constituído uma das maiores preocupações para a maioria dos professores, mesmo porque é o conteúdo mais enfatizado nas quatro últimas séries desse grau de ensino.
>
> Inúmeras vezes temos assistido ao desespero dos mestres diante da impotência intelectual de seus alunos, frente a problemas cujas soluções demandam alguma ferramenta de caráter algébrico. (SÃO PAULO, 1998, p. 183)

Com a experiência adquirida ao longo dos anos exercendo a profissão de professora da disciplina de Matemática no Ensino Fundamental, emergiu meu interesse por estudar os anos finais desse ciclo no que diz respeito às equações algébricas de primeiro grau.

Ao ingressar no GPEA da PUC-SP, tomei conhecimento do projeto *Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem*, que expõe:

> Em busca (www.capes.gov.br) sobre títulos de dissertações e teses definidas entre 1998 e 2004, encontram-se 1 005 trabalhos nesses tópicos, voltados principalmente para os domínios: Engenharia, Ciências da Computação, Física, Matemática, Economia, Educação e Sociologia, sendo, destes, apenas 39 do âmbito da Educação. (MARANHÃO, 2007, p. 2)

Esses resultados evidenciam a relevância das pesquisas educacionais sobre equações algébricas, pois atestam que o tema 'Expressões, equações e inequações' é referido não somente em investigações no âmbito da própria Matemática, mas também em diversos outros campos do conhecimento.

Atualmente, o GPEA conta com um novo projeto, derivado do anterior, designado *Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica*, voltado ao curso de Mestrado Profissional. A presente pesquisa pretende trazer contribuição também a esse projeto.

Nesse contexto, o presente estudo visa contribuir com o *Caderno do professor* de Matemática[2] utilizado nas escolas públicas do Estado de São Paulo. Para tanto, buscará evidenciar os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico em atividades resolvidas presentes nesse manual. Tais indicadores se apoiarão na análise de enunciados e resoluções de atividades propostas no tópico 'Equações algébricas de primeiro grau' do *Caderno do professor* de Matemática destinado ao terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2009a).

Em outras palavras, nosso objetivo é responder às seguintes questões de pesquisa:

As atividades presentes no tópico 'Equações algébricas de primeiro grau' do Caderno do professor *de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados?*

Para tanto, nossas análises terão como referência elementos teóricos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005),

[2] Por brevidade, esta publicação será por vezes referida ao longo deste texto como *Caderno*.

que apresentam um conjunto de aspectos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos que são denominados por esses autores como “caracterizadores do pensamento algébrico”. Tal enfoque será tratado com mais detalhes no Capítulo 2.

Como produto[3] desta pesquisa, temos a contribuição ao *Caderno do professor* de Matemática constituída da versão impressa do presente trabalho e de um CD-ROM, que podem servir à orientação dos professores que utilizam o referido manual. O CD-ROM contém referências aos elementos teóricos do trabalho, um quadro com os indicadores do pensamento algébrico utilizados nas análises e as sínteses das análises das atividades evidenciando os indicadores do pensamento algébrico, além de um texto final sintetizando tais contribuições.

Para assegurar a originalidade desta pesquisa e situá-la em relação aos trabalhos do GPEA da PUC-SP já produzidos no âmbito dos projetos *Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem* e *Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica*, buscaram-se as dissertações e teses produzidas desde o início desses projetos até o segundo semestre de 2011. Entre essas dissertações e teses, encontramos aquelas listadas nos Anexos A e B.

Dentre esses estudos, cabe de início ressaltar aqueles voltados ao tema ‘Equações algébricas no Ensino Fundamental’, como as dissertações de Martins (2008) e Pereira (2010), que empreenderam sínteses de pesquisas sobre esse assunto que abrangeram o período de 1998 a 2008.

Martins (2008), que cursou o Mestrado Acadêmico da PUC-SP, voltou-se ao Ensino Fundamental, realizando uma metanálise de nove dissertações e teses brasileiras na área de Educação Matemática publicadas de 1998 a 2004, com o “intuito de auxiliar a elaboração de futuras pesquisas dentro desse tema de ensino” (p. 18). Conclui que “sete das nove selecionadas atestam a importância da busca de significado para o ensino de equações algébricas” (p. 105) e relata

[3] O produto é uma exigência da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) para o Mestrado Profissional. Trata-se do relato de uma experiência, de uma implementação de estratégia ou de um produto de natureza educacional que visem a melhoria do ensino.

que essas sete consideram importante a coordenação dos “diferentes registros de representação para a produção de significados” (p. 105)

No contexto do curso de Mestrado Profissional da PUC-SP, Pereira (2010) apresentou um panorama das dissertações dessa instituição na área de Educação Matemática voltadas ao Ensino Fundamental e publicadas de 2004 a 2008. Seu propósito foi investigar as similaridades entre objetivos, indicações para futuros trabalhos e referências teóricas empregadas. Com base em sua dissertação, publicou um produto no sítio da PUC-SP, apresentando o que considerou essencial no ensino de equações. Expõe como aspectos essenciais encontrados nos trabalhos analisados: a identificação e análise de procedimentos e estratégias de resolução de equações, a identificação de erros, as intervenções no ensino e o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação de Jovens Adultos. Nas indicações dos autores para futuros estudos, aponta o interesse em ‘Estratégias’, ‘Dificuldade de aplicação’, ‘Aspecto estrutural’, ‘Aspecto processual’, ‘Intervenções de ensino’, ‘Vantagens sem utilizar *software*’ e “Dificuldades de entendimento (alunos)’. Chama-nos atenção o fato de ‘Busca de significados – ensino de equações’ haver se revelado nas quatro pesquisas focalizadas nessa metanálise. O autor também salienta haver constatado dispersão dos referenciais teóricos usados nas quatro pesquisas. A pesquisa de Pereira (2010), ao apontar os resultados, limites e interesses futuros indicados nas investigações analisadas, pode contribuir com o professor do Ensino Fundamental, mostrando o que é essencial no trato com as equações.

As pesquisas de Martins (2008) e Pereira (2010) possibilitaram um quadro geral dos trabalhos produzidos com o tema ‘Equação algébrica de primeiro grau no Ensino Fundamental’, apontando a necessidade de pesquisas adicionais com esse foco, demanda essa com que pretendemos colaborar, tendo em vista nosso interesse por tópico tão importante na Educação Básica.

Outras duas dissertações do projeto *Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem* merecem destaque: a de Castro (2009) e a de Hamazaki (2010), ambas do Mestrado Acadêmico da PUC-SP.

Para abordar o pensamento algébrico, Castro (2009) adotou como referenciais os enfoques de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), que também servem de base à presente análise.

Hamazaki (2010) focalizou a situação de aprendizagem de equações e inequações logarítmicas do *Caderno do professor* do Estado de São Paulo de 2009 referente ao terceiro bimestre do primeiro ano do Ensino Médio e ampliou as referências teóricas utilizadas por Castro (2010) acrescentando as de Ursini *et al*. (2005) sobre variáveis e de Ribeiro (2007) a respeito dos multissignificados de equações – enfoques que também são utilizados no presente estudo.

Nossa investigação se justifica também por ser a primeira a focalizar o modo como o *Caderno do professor* de Matemática aborda o tópico 'Equações algébricas' no oitavo ano do Ensino Fundamental. Para tanto, e no âmbito do projeto *Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica*, valemo-nos do quadro teórico delineado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) sobre aspectos do pensamento algébrico, por Ursini *et al*. (2005) sobre variáveis e por Ribeiro e Machado (2009) sobre os multissignificados de equações.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), da qual trataremos com mais detalhes no Capítulo 3, apresenta um currículo unificado para a rede estadual, mencionando diferentes materiais que o apoiam. Um deles é o *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009a,b), que apresenta conteúdos e delineia habilidades e competências específicas para as situações de aprendizagem nele focalizadas, orientando o professor na gestão da sala de aula a cada ano de escolaridade.

Desse modo, o *Caderno do professor* constitui-se como fonte de recursos para que os docentes realizem consultas e preparem atividades que permitam que os alunos possam produzir significados pertinentes a cada tópico do ensino. Esse *Caderno* é por isso considerado um orientador para a realização das atividades em classe. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais referentes ao ensino de Matemática (BRASIL, 1998) há uma referência a respeito do livro didático que chamou nossa atenção:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos [...]. (BRASIL, 1998, p. 21-22)

Essas observações, aliadas aos resultados obtidos por Castro (2009), indicam dificuldades vivenciadas pelo professor de Matemática que cursa pós-graduação *stricto sensu* na resolução de atividades promotoras do pensamento algébrico. Algumas delas são provavelmente similares às encontradas no *Caderno do professor* de Matemática do Estado de São Paulo, reforçando nossa suposição de que este estudo possa ser útil ao aprimoramento profissional do professor de Matemática.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para auxiliar nossas análises de atividades do tópico ‘Equações algébricas polinomiais de primeiro grau’ do *Caderno do Professor* de Matemática (SÃO PAULO, 2009a), empregamos como referenciais teóricos os caracterizadores do pensamento algébrico propostos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

A análise foi também enriquecida com os aportes teóricos de Ursini *et al*. (2005) a respeito do uso das variáveis e com os de Ribeiro e Machado (2009) sobre multissignificados de equações.

2.1 Aspectos do pensamento algébrico

Em seu artigo “Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar”, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam três concepções de Educação Algébrica que identificaram ao longo da história da Matemática:

- Linguístico-pragmática: Considera a Álgebra como instrumento técnico (regras sintáticas). Nessa concepção, acredita-se que aquisição, ainda que mecânica, das técnicas de transformismo algébrico seja recurso necessário e suficiente para que o aluno resolva problemas algébricos.

- Fundamentalista-estrutural: Nessa concepção as propriedades estruturais são utilizadas para fundamentar e justificar as transformações das expressões (período da chamada Matemática Moderna).
- Fundamentalista-analógica: Combinando aspectos das duas concepções anteriores, recupera o valor instrumental da Álgebra e preserva o cuidado com as justificativas, utilizando modelos analógicos geométricos (figuras, objetos) ou físicos (por exemplo, balanças).

Comparando as concepções da Educação Algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) constataram uma redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Todas essas concepções de Educação Algébrica partem de uma linguagem simbólica já constituída e reduzem o ensino e aprendizagem da Álgebra ao transformismo algébrico (definido por esses autores como o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante emprego de regras e propriedades válidas). Ainda que em diferentes medidas, portanto, todas elas privilegiam a linguagem sobre o pensamento algébrico.

Frente a essas constatações, os autores sugerem que repensar a Educação Algébrica implica, de algum modo, repensar a relação que se estabelece entre pensamento e linguagem.

Além disso, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) destacam que “a tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e especifica da Álgebra”, mas, por outro lado, ponderam que a linguagem, em princípio, é a expressão de um pensamento. Dessa maneira, defendem haver uma relação dialética entre pensamento algébrico e linguagem, em vez de uma subordinação.

Esta relação é corroborada por Machado (2010, p. 4) quando ressalta que “parece impossível dissociar-se a notação algébrica ou simbólica do pensamento algébrico. [...] o pensamento algébrico necessita de uma notação para ser expresso e, quanto mais adequada essa notação, mais se desenvolve o pensamento algébrico”.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) destacam elementos para uma melhor compreensão do pensamento que pode ser classificado como algébrico: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”. Após descreverem as características do pensamento algébrico, afirmam que estas permitem considerá-lo como “um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento” (p. 88).

Ao analisarem algumas situações que favorecem a manifestação do pensamento algébrico, concluem que não existe uma forma única de se expressar esse pensamento, pois ele pode ser veiculado por distintas linguagens, como a natural, a aritmética, a geométrica ou a algébrica de natureza estritamente simbólica.

Desse modo, reconhecem a importância de se desenvolver o pensamento algébrico tanto para a Matemática como para outros campos de conhecimento e indagam qual seria o melhor momento de iniciá-lo no currículo escolar, visto que esse tipo de pensamento não se manifesta somente com uma linguagem estritamente simbólico-formal. Concluem que o trabalho com o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde os anos iniciais da vida escolar.

Defendem também a importância de se desenvolver gradativamente uma linguagem mais adequada à expressão do pensamento algébrico, para que se alcance uma aprendizagem significativa da Álgebra:

> [...] esse pensamento se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Neste sentido, a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89)

Apesar desse alerta, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que um trabalho eficaz em Educação Algébrica pode ser realizado em qualquer época, desde que sejam seguidas algumas etapas essenciais, como por exemplo introduzir, em uma primeira fase, situações-problema que estimulem o uso de uma linguagem algébrica com significado para o aluno; trabalhar em sentido contrário à etapa anterior, ou seja, com base na linguagem algébrica para a construção de situações-problema; e, posteriormente, trabalhar os procedimentos, técnicas e propriedades.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) investigaram indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico de alunos do sétimo ano, retomando a discussão da relação entre sintaxe da linguagem algébrica, pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica).

Enfatizam que o ponto problemático do ensino da Álgebra é o:

> [...] ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a solução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 4)

Os autores citados também consideram existir uma dialética entre pensamento e linguagem, pois, de um lado, a linguagem algébrica é expressão das ideias algébricas na resolução de situações-problema e, de outro, à medida que se trabalha uma linguagem apropriada à expressão, o pensamento tende a evoluir.

Ao tomarem por base Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), visando evidenciar a natureza interdependente entre língua e pensamento matemático, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) propõem uma quarta concepção de Educação Algébrica. Nesta, o ensino de Álgebra inicia-se com a exploração de situações-problema que problematizem fatos aritméticos ou geométricos e levem à busca de elementos caracterizadores do pensamento algébrico, os quais envolvem generalizações, representações de números generalizados ou representações de grandezas incógnitas e variáveis. Consideram também que, ao fazer o percurso inverso, partindo de uma expressão algébrica, o estudante tentaria atribuir múltiplos significados e sentidos a ela, mas somente após trabalhar com as transformações das expressões algébricas em outras equivalentes, ressaltando nesse momento o transformismo algébrico.

Analisar a natureza do pensamento algébrico permite compreender melhor os motivos que levam os alunos a ter dificuldades na aprendizagem de Álgebra.

Para que o aluno possa ser orientado a trabalhar com ideias, dada sua dificuldade em construir o pensamento algébrico por si mesmo – uma vez que este não é inato –, torna-se necessário que as atividades desenvolvidas em sala de aula contribuam com esse processo, já que muitas vezes abordam apenas um aspecto do pensamento algébrico, deixando de lado outros de seus elementos caracterizadores. Dessa forma, a aprendizagem torna-se sem sentido e fragmentada.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) consideram que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente. Em seu trabalho, estes autores ampliaram os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico apresentado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). O Quadro 1 lista esses caracterizadores.

Quadro 1. Caracterizadores do pensamento algébrico.

Estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos.
Percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema.
Produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema.
Produz vários significados para uma mesma expressão numérica.
Interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas.
Transforma uma expressão aritmética em outra mais simples.
Desenvolve algum tipo de processo de generalização.
Percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias.
Desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Fonte: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5).

Para procedermos à análise de atividades do tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’, utilizamos esses caracterizadores do pensamento algébrico como indicadores de desenvolvimento desse pensamento, visando responder às seguintes questões:

As atividades presentes no tópico 'Equações algébricas de primeiro grau' do Caderno do professor *de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados?*

2.2 Uso das variáveis

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) ressaltam a importância de desenvolver os diversos usos das variáveis em Álgebra:

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidades de construir a "sintaxe" das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetro, incógnita, variáveis) e construir as "regras" para resolução de equações. (BRASIL, 1998, p. 121-122)

Ursini *et al*.[4] (2005, p. 15) afirmam que nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio trabalha-se essencialmente com "três usos distintos da variável: as incógnitas, os números genéricos e as relações funcionais"[5]. Exemplificam o uso da variável como incógnita (p. 24): "Uma caixa em formato de prisma retangular tem 4,5 cm de largura e 3 cm de altura e seu volume é de 81 cm^3. Qual é seu comprimento?"[6].

Para resolver esse problema, consideram serem necessários os passos apresentados no Quadro 2.

---

[4] Todas as citações de obras em idioma estrangeiro foram por nós traduzidas.

[5] No original: "[...] tres usos distintos de la variable: las incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales."

[6] No original: "Una caja en forma de prisma rectangular tiene 4,5 cm de ancho y 3 cm de alto, y su volumen es de 81 cm^3. ¿Cuánto mide de largo?"

Quadro 2. Passos para resolver um problema proposto como exemplo para o uso da variável como incógnita.

1. Reconhecer e identificar a existência de algo desconhecido que pode ser determinado. (Neste caso trata-se do comprimento da caixa.)
2. Simbolizar a incógnita, por exemplo, com a letra x.
3. Relacionar a incógnita com os dados do problema. Neste caso, temos que recordar que o volume de um prisma obtém-se multiplicando entre si as medidas de seu comprimento, largura e altura. Obtém-se então a expressão $81 = x(4,5)(3)$.
4. Realizar as operações aritméticas necessárias para determinar o valor específico da incógnita:
   $81 = x(13,5)$
   $$\frac{81}{13,5} = x$$
   Portanto, $x = 6$.
5. Substituir na equação o valor encontrado, para comprovar que é correto:
   $81 = (6)(4,5)(3)$

Fonte: Ursini *et al*. (2005, p. 24-25[7]).

Conforme Ursini *et al*. (2005), seria possível argumentar que a incógnita não é uma variável, pois representa um valor fixo, determinado, que não está sujeito a variação. No entanto, quando enfrentamos uma expressão algébrica, a primeira percepção que temos das variáveis envolvidas é a de símbolos representativos de valores numéricos quaisquer, indeterminados, que em um primeiro momento não sabemos se poderemos determinar. Só em um segundo momento é que se torna possível determinarmos o papel que tais símbolos desempenham na expressão.

Somente após efetuar as manipulações necessárias, realizadas gráfica ou mentalmente, percebemos que a variável envolvida na expressão representa uma incógnita.

[7] No original:

"1. Reconocer e identificar la existencia de algo desconocido que se puede determinar. (En este caso se trata de la longitud de la caja.)

2. Simbolizar la incógnita, por ejemplo, mediante la letra x.

3. Relacionar la incógnita con los datos del problema. En este caso, hay que recordar que el volumen de un prisma se obtiene multiplicando entre si las mediadas de su longitud, anchura y altura. Se obtiene entonces la expresión $81 = x(4,5)(3)$.

4. Realizar las operaciones aritméticas necesarias para determinar el valor específico de la incógnita:
$81 = x(13,5)$
$$\frac{81}{13,5} = x$$
Por tanto, $x = 6$

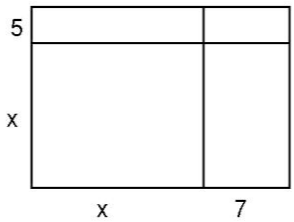
5. Substituyendo en La ecuación el valor encontrado, para comprobar que es el correcto:
$81 = (6)(4,5)(3)$"

Após analisarem outros exemplos sobre variável como incógnita, os autores apontam que:

> [...] para compreendermos o uso da variável como incógnita [...] e podermos resolver de forma bem-sucedida os exercícios ou problemas que a envolvam, devemos ser capazes de reconhecer que uma dada situação abarca uma quantidade cujo valor não conhecemos, mas que é possível determinar levando-se em consideração os dados proporcionados. (URSINI *et al*., 2005, p. 27[8])

Um exemplo de uso da variável como número genérico é:

> Escreva a expressão que representa a área da seguinte figura:



(URSINI *et al*., 2005, p. 27[9])

Ursini *et al*. (2005) consideram que para resolver esse problema são necessários os passos descritos no Quadro 3.

Quadro 3. Passos para resolver um problema proposto como exemplo para uso da variável como número genérico.

1. Interpretar a letra *x* como a representação de um número genérico.
2. Usar a letra para representar simbolicamente a base e a altura da figura dada ($x + 7$ e $x + 5$, respectivamente).
3. Expressar simbolicamente a área da figura: $(x +7)(x + 5)$.
4. Eventualmente, resolver a multiplicação $(x + 7)(x + 5)$.

Fonte: URSINI *et al*. (2005, p. 28[10])

---

[8] No original: "[...] para comprender el uso de la variable como incógnita específica, y poder resolver de manera exitosa los ejercicios o problemas que la involucran, uno debe ser capaz de reconocer que en cierta situación está involucrada una cantidad cuyo valor no conocemos, pero que es posible determinar tomando en consideración los datos proporcionados."

[9] No original: "Escriba la expresión que representa el área de la siguiente figura."

[10] No original:

"1. Interpretar la letra *x* como la representación de un número general.

2. Usar la letra para representar simbólicamente la base y la altura de la figura dada ($x = 7$ y $x + 5$, respectivamente).

3. Expresar simbólicamente el área de la figura: $(x + 7)(x + 5)$.

4. Eventualmente, resolver la multiplicación $(x + 7)(x + 5)$."

De acordo com Ursini *et al*. (2005), os números genéricos surgem por exemplo em:

- expressões abertas: $4x + 7$
- propriedades de operações: $3 + x = x + 3$
- fórmulas gerais: $A = b \times h$
- parâmetros nas equações: $x^2 + 5mx + 7 = 0$
- equações gerais: $ax + b = cx + d$

Assim, a partir dos exemplos que analisam, os autores apontam que:

> [...] um requisito para se compreender o uso da variável como número genérico e poder trabalhar com ele consiste em desenvolver a capacidade de reconhecer padrões, encontrar regras, deduzir métodos gerais e descrevê-los. Para isso, é preciso distinguir entre os aspectos invariantes e os que variam em uma multiplicidade de situações, que podem envolver sequências geométricas ou numéricas, ou estar relacionadas com a estrutura de famílias de problemas.
>
> Para trabalhar a variável como número genérico, requer-se também a capacidade de usar símbolos para representar uma situação geral, uma regra ou um método, ou relacionar expressões gerais entre si. Diante de uma expressão geral, dada ou construída pelo próprio estudante, este tem que interpretar os símbolos envolvidos como números genéricos, os quais representam quantidades indeterminadas que não se podem, nem é necessário, determinar. (URSINI *et al*., 2005, p. 31[11])

Uma situação do uso da variável como relação funcional é:

> Considere a expressão $5 - x = y$. Se os valores de *x* variam entre -4 e 5, quando alcançam seu valor máximo? E seu valor mínimo? (URSINI *et al*., 2005, p. 32[12])

---

[11] No original: "[…] un requisito para comprender el uso de la variable como número geral y poder trabajar con él consiste en desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos. Para ello, es necesario distinguir entre los aspectos invariantes y los que varían en una multiciplicidad de situaciones, que pueden involucrar secuencias geométricas o numéricas, o estar relacionadas con la estructura de familias de problemas.
Para trabajar con la variable como número general se requiere también ser capaz de usar símbolos para representar una situación general, una regla o un método, o relacionar expresiones generales entre si. Ante una expresión general, dada o construida por el propio estudiante, este tiene que interpretar los símbolos involucrados como número generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar."

[12] No original: "Considere la expresión $5 - x = y$. Si los valores de *x* varían entre –4 y 5, ¿cuándo alcanza *y* su valor máximo? ¿Cuándo alcanza *y* su valor mínimo?"

Os autores expõem que, para resolver esse problema, são necessários os seguintes passos:

Quadro 4. Passos para resolver um problema proposto como exemplo para uso da variável como relação funcional.

1. Reconhecer que as duas variáveis envolvidas na expressão analítica estão em correspondência.
2. Determinar os valores de uma das variáveis quando se conhece o valor da outra.
3. Reconhecer a variação conjunta das duas variáveis envolvidas na expressão analítica.

Fonte: Ursini *et al*. (2005, p. 33[13])

Ursini *et al*. (2005) apontam que:

> [...] para trabalhar com as variáveis em relação funcional, é necessário ser capaz de reconhecer, em primeiro lugar, que em determinadas situações estão envolvidas quantidades cujos valores estão relacionados; em segundo lugar, que em tais situações a variação de uma quantidade afeta a variação da outra. Este tipo de situação pode envolver informações que se apresentam em forma verbal, em uma tabela, em um gráfico ou em forma analítica. (URSINI *et al*., 2005, p. 34[14])

Para fundamentar nossas análises de atividades do tópico 'Equações algébricas' presentes no *Caderno do professor*, considerando o uso da variável como intrínseco ao pensamento algébrico, tomamos Ursini *et al*. (2005) como base a respeito dos três usos das variáveis, considerando que tais análises podem nos apontar o uso das variáveis presentes nessas atividades.

---

[13] No original:
"1. Reconocer que las dos variables involucradas en la expresión analítica están en correspondencia.
2. Determinar los valores de una de las variables cuando se conoce el valor de otra.
3. Reconocer la variación conjunta de las dos variables involucradas en la expresión analítica."

[14] No original: "[...] para trabajar con las variables en relación funcional, es necesario ser capaz de reconocer, en primer lugar, que en ciertas situaciones están involucradas cantidades cuyos valores están relacionados; en segundo lugar, que, en tales situaciones, la variación de una cantidad afecta la variación de la otra. Este tipo de situaciones puede involucrar información que se presente en forma verbal, en una tabla, con una gráfica o en forma analítica."

2.3 Multissignificados de equações

Para o trabalho com o tema ‘Equação’, a publicação *Prática pedagógica*[15] (SÃO PAULO, 1998, p. 226) propõe: “A primeira preocupação que temos com esse tema é de levar o aluno a compreender o significado de equação [...]”. Para tanto, o professor precisa conhecer seus possíveis significados.

Para melhor conhecer esses significados, buscamos respaldo e localizamos o artigo “Equações e seus múltiplos significados: potencialidade para a construção do conhecimento matemático”, de Ribeiro e Machado (2009), que contempla os significados de equações ao longo da história da Matemática. Nesse artigo, os autores listam seis concepções de equação, às quais se referem como “multissignificados” (Quadro 5).

[15] *Prática pedagógica* (SÃO PAULO, 1998) é uma série publicada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para subsidiar o currículo de Matemática do Ensino Fundamental.

Quadro 5. Os multissignificados das equações.

1. Intuitivo-pragmático: A noção de equação é concebida como intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, os quais são originários de situações do dia a dia.
2. Dedutivo-geométrico: A noção de equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida dos lados das figuras geométricas e com intersecções de curvas.
3. Estrutural-generalista: A noção de equação é concebida como noção estrutural, definida e com propriedades e características próprias. A equação aqui é considerada por si própria, operando-se sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.
4. Estrutural-conjuntista: A noção de equação é concebida sob uma perspectiva estrutural que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.
5. Processual-tecnicista: Concebe a equação como sua própria resolução, como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la, diferentemente dos estruturalistas, que não enxergam a equação como ente matemático sobre o qual as operações e as manipulações realizadas atendem a regras bem definidas.
6. Axiomático-postulacional: Concebe a equação como uma noção matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas ou não-matemáticas, são construídas. Segundo essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano o são na Geometria Euclidiana.

Fonte: Ribeiro e Machado (2009, p. 97-100).

Antes de termos contato com os multissignificados identificados por Ribeiro e Machado (2009), atribuíamos às equações significados dos tipos “intuitivo-pragmático” e “processual-tecnicista”. Isso advinha de nossa formação tradicional, segundo a qual o professor ensina alguns procedimentos e regras com a intenção de encontrar o valor de uma “letra” para satisfazer a equação e, em outro momento, para que esses procedimentos e regras ajudem a resolver problemas.

Como nossa pesquisa analisa o tópico ‘Equações algébricas’ do *Caderno do professor* de Matemática, empreendemos uma investigação dos multissignificados presentes nas atividades nele contidas. No decorrer dessa análise, nossa visão inicial acabaria por se ampliar, agregando um novo significado às equações, como apontaremos nas considerações finais deste trabalho.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos da pesquisa, bem como os critérios adotados para análise das atividades do tópico ‘Equações algébricas’ presentes no *Caderno do professor*.

3.1 Técnica de análise

A análise das atividades do tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ é qualitativa e de caráter documental. Lüdke e André (1986, p. 38) consideram que “a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos” e destacam que “são considerados documentos quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação” (PHILLIPS, 1974[16] *apud* LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 38).

Lüdke e André (1986, p. 38) explicam que “a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse” e que trabalhar com documentos apresenta uma série de vantagens, uma vez que estes “constituem uma fonte estável e rica”, “persistindo ao longo do tempo”, o que permite que sejam consultados diversas vezes, até mesmo podendo “servir de base a diferentes estudos” (p. 39).

[16] PHILLIPS, B. S. *Pesquisa social*. Rio de Janeiro: Agir, 1974.

A análise documental abrange diferentes fases. A primeira envolve a categorização do documento que será usado. Segundo Lüdke e André (1986, p. 40), "a escolha do documento não é aleatória. Há, geralmente, alguns propósitos, ideias ou hipóteses guiando sua seleção".

Em nosso caso, o documento de estudo é o *Caderno do professor* de Matemática adotado na escola da Rede Pública da Grande São Paulo em que a pesquisadora é docente. Essa instituição integra a Diretoria de Ensino da Região de Carapicuíba, que abrange 87 unidades escolares.

O uso desse material didático não se restringe a determinadas escolas, mas abrange todas as unidades de ensino de Educação Básica do Estado de São Paulo.

Um dos fatores relevantes para nossa escolha do *Caderno do professor* está relacionado à importância da Proposta Curricular implantada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em 2008. A partir desse ano, foram distribuídas às escolas apostilas denominadas *Caderno do aluno* e *Caderno do professor* pertinentes a cada uma das disciplinas e anos escolares do Ensino Fundamental e Médio.

Na análise documental, o pesquisador procede à análise dos dados colhidos do documento selecionado. Nessa fase é investigado o conteúdo do documento, considerando as mensagens nele veiculadas. "Essas mensagens [...] podem ser abordadas de diferentes formas e sob inúmeros ângulos. Pode, por exemplo, haver variações na unidade de análise, que pode ser a palavra, a sentença, o parágrafo ou o texto como um todo" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 41).

Nesta pesquisa, escolhemos como unidade de análise (*a*) o enunciado e a resolução de certas atividades propostas no tópico 'Equações algébricas de primeiro grau' do *Caderno do professor* de Matemática referentes ao terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental e (*b*) as Programações[17] pertinentes ao quarto bimestre do ano anterior, quando se inicia o estudo desse tópico de ensino.

---

[17] Chamamos de Programações as instruções que o *Caderno do Professor* de Matemática traz para cada Situação de Aprendizagem, abrangendo os aspectos 'tempo', 'conteúdo e tema', 'competência e habilidades' e 'estratégias'.

Dentre as estratégias disponíveis para a análise e interpretação de conteúdo na abordagem qualitativa, escolhemos a de emparelhamento. “Essa estratégia consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico. Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material [...], verificando se há correspondência entre eles” (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 227).

Lüdke e André (1986), apoiando-se em Krippendorff[18], apontam que na análise de conteúdo o pesquisador não se baseia unicamente no conhecimento científico, mas também em suas experiências de vida:

> Krippendorff enfatiza ainda que as mensagens transmitem [ao pesquisador] experiência vicária, o que leva o receptor a fazer inferência dos dados para o contexto. Isso significa que no processo de decodificação das mensagens o receptor utiliza não só o conhecimento formal, lógico, mas também um conhecimento experiencial onde estão envolvidas sensações, percepções, impressões e intuições. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 41)

3.2 Critérios de análise

As atividades do tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ presentes na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano e as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do quarto bimestre do sétimo ano serão analisadas procurando-se identificar quais indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico se revelam nos enunciados e resoluções dessas atividades.

Para tanto, valemo-nos dos indicadores propostos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), por eles denominados “caracterizadores do pensamento algébrico” (Quadro 1), e os adaptamos à análise pretendida, como descrito a seguir.

Alguns desses indicadores receberam adaptações porque nossas análises incidem sobre os enunciados e sobre as resoluções propostas presentes no *Caderno*, e não sobre produções de alunos ou professores.

---
[18] KRIPPENDORFF, K. *Content analysis*. Beverly Hills, CA (USA): Sage, 1980.

Ao indicador originalmente designado “Estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos”, acrescentamos os termos “em língua natural”, pois Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram que o pensamento algébrico pode também ser expresso na língua natural, a qual é de fato empregada nos enunciados das atividades do *Caderno*. Tal recurso permite que o professor conduza seus alunos a estabelecer, por exemplo, relações entre língua natural e expressões numéricas/algébricas.

Ao indicador originalmente designado “Percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema”, acrescentamos o termo “algébrico” por entendermos que tanto uma expressão numérica como uma algébrica podem representar a estrutura de um problema, estrutura essa que toma a forma de uma sentença matemática que permite resolver uma situação-problema. Como as situações-problema em análise não exploram todas as possíveis expressões, optamos por retirar o artigo definido de “as estruturas”. Pelo mesmo motivo, optamos por acrescentar o termo “algébrico” aos indicadores que fazem referência a “estrutura” ou “modelo”.

Do indicador originalmente designado “Desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente”, retiramos os termos “cria” e “mais concisa ou sincopada” e acrescentamos a palavra “simbólica”, uma vez que as resoluções propostas no *Caderno* favorecem que o professor desenvolva linguagem simbólica, em lugar de favorecer criação de linguagem “mais concisa ou sincopada”.

Os demais indicadores não sofreram alterações. O Quadro 6 apresenta as adaptações feitas aos indicadores originais, bem como os indicadores que permaneceram inalterados.

Para completar nossas análises, acrescentamos outros indicadores do pensamento algébrico baseados em Ursini *et al*. (2005), já que esses autores corroboram o que é defendido por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993):

> [...] a linguagem simbólico-formal cumpre, a partir de um certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico [...]. [...] por permitir operar com quantidades variáveis, possibilita uma melhor compreensão de situações nas quais a variação e o movimento estejam presentes. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89)

Para que possamos alcançar "compreensão de situações nas quais a variação e o movimento estejam presentes", torna-se necessário conhecer os diferentes usos da variável. Por essa razão, inserimos outros indicadores para a análise, com o objetivo de identificar os usos das variáveis, com base em Ursini *et al*. (2005).

O Quadro 6 permite melhor visualização dessas adaptações, destacando em **negrito azul** o que foi acrescentado aos indicadores originais e em ~~**tachado vermelho**~~ o que foi deles excluído.

Quadro 6. Indicadores do pensamento algébrico adaptados para análise de atividades do tópico 'Equações algébricas de primeiro grau'.

Indicador	A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:
1	Estabelece**r** relações/comparações entre expressões numéricas/**algébricas em língua natural** ou padrões geométricos
2	Percebe**r** e tenta**r** expressar ~~**as**~~ estruturas aritméticas**/algébricas** correspondentes de uma situação-problema
3	Produz**ir** mais de um modelo aritmético**/algébrico** para uma mesma situação-problema
4	Produz**ir** vários significados para uma mesma expressão numérica**/algébrica**
5	Interpreta**r** uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas**/algébricas**
6	Transforma**r** uma expressão aritmética**/algébrica** em outra mais simples
7	Desenvolve**r** algum tipo de processo de generalização
8	Percebe**r** e tenta**r** expressar regularidades ou invariâncias
9	**Perceber o uso da variável como incógnita**
10	**Perceber o uso da variável como número genérico**
11	**Perceber o uso da variável como relação funcional**
12	Desenvolve**r**~~**/cria uma**~~ **a** linguagem ~~**mais concisa ou sincopada**~~ **simbólica** ao expressar-se matematicamente

Fontes das enunciações originais e de algumas das adaptações: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) e Ursini *et al*. (2005).

Com base nos Quadros 1 e 6 e nos aspectos emergidos durante nossas análises, elaboramos o Quadro 7, onde cores distintas diferenciam os indicadores que foram utilizados.

Quadro 7. Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico adaptados para as análises desta pesquisa.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico
11	Perceber o uso da variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Fontes das enunciações originais e de algumas das adaptações: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) e Ursini *et al*. (2005).

3.3 O *Caderno do professor* e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, que abrangem o objeto de análise

O que é o *Caderno do professor*? Trata-se de documento que faz parte dos subsídios à nova Proposta Curricular implantada em 2008 no Estado de São Paulo.

Em 2007, a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP) detectou por meio do Sistema de Avaliação da Rede do Estado de São Paulo (SARESP) a inexistência de um currículo claramente definido para a educação básica nessa unidade da federação (SÃO PAULO, 2009c). Assim, foi proposta uma ação integrada e articulada visando melhor organizar o sistema educacional estadual. Com a elaboração da Proposta Curricular do Estado de São Paulo em 2008, instituiu-se uma base comum para a rede de ensino estadual.

> Este Currículo foi construído de modo a contemplar as necessidades de **estabelecer** referências comuns que atendam ao princípio de garantia de padrão de qualidade previsto pelo inciso IX do artigo 3.º da Lei de Diretrizes e bases da Educação Nacional – Lei n.º 9394/96 e de **subsidiar** as equipes escolares com diretrizes e orientações curriculares comuns que garantam ao aluno acesso aos conteúdos básicos, saberes e competências essenciais e específicas do segmento ou nível de ensino oferecido. (SÃO PAULO, 2009d, p. 5, grifos do autor)

A nova Proposta Curricular compreende Ensino Fundamental e Ensino Médio e buscou garantir uma base comum de conhecimentos e competências para que as escolas funcionem de fato como uma rede. Esse objetivo presume a elaboração de subsídios que abranjam todos os envolvidos no processo de ensino da rede: supervisores, diretores, professores coordenadores, professores e alunos.

> A Proposta Curricular, referência comum a todas as escolas da rede, descreve o elenco das metas de aprendizagem desejáveis em cada área, estabelecendo os conteúdos disciplinares a serem desenvolvidos em cada ano ou ciclo e o que se espera que os alunos sejam capazes de realizar com esses conteúdos, expressos na forma de competência e habilidades claramente avaliáveis. (SÃO PAULO, 2009c, p. 9)

Com base nessa proposta, elaborou-se um conjunto de documentos organizados por bimestre e disciplina, cada um dos quais denominado *Caderno do professor*, dirigido especialmente aos docentes. Cada volume versa sobre conteúdos, habilidades e competências específicos para cada situação de aprendizagem, de modo a apoiar o professor no planejamento de suas aulas. De acordo com a proposta, estes documentos apresentam:

> [...] situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão da sala de aula, para a avaliação e a recuperação, bem como de sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares. (SÃO PAULO, 2008, p. 9)

A Proposta Curricular voltada ao ensino de Matemática expõe que:

> [...] a Matemática é apresentada como um sistema simbólico que se articula diretamente com a língua materna, nas formas oral e escrita, bem como com outras linguagens e recursos de representação da realidade. (SÃO PAULO, 2008, p. 44)

A Proposta Curricular para Matemática destinada ao Ensino Fundamental e Médio define uma grade curricular para cada bimestre dos diversos anos de escolaridade, além de expor as ideias fundamentais a serem trabalhadas em cada bimestre, as quais são geradas por um tema e "têm objetivo de estabelecer uma articulação entre os conteúdos, entre inúmeras formas possíveis. Na organização proposta, a lista de conteúdos selecionados para cada série [...] é apresentada nos diversos sistemas de ensino" (SÃO PAULO, 2008, p. 47). As ideias fundamentais presentes nessa proposta têm como objetivo "destacar o foco principal das atenções, deixando-se subentendido que praticamente todos os conteúdos são coadjuvantes em todos os momentos" (p. 51).

Em concordância com essa Proposta Curricular, todos os *Cadernos do professor* trazem, de modo geral, conteúdos a serem desenvolvidos em cada ano de escolaridade, organizados por bimestre, com orientações para seu desenvolvimento, programações das Situações de Aprendizagem relacionadas a cada um desses conteúdos e sugestões para avaliações e recuperação.

3.4 Delimitando o objeto de análise do *Caderno do professor* de Matemática: a Situação de Aprendizagem 1 do terceiro bimestre do oitavo ano e as Programações do quarto bimestre do sétimo ano relativas ao tópico 'Equações'

Inicialmente, o *Caderno do professor* de Matemática apresenta um resumo do conteúdo a ser tratado no terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental. Esse resumo é seguido de uma orientação geral[19] sobre esse documento e sobre os conteúdos básicos do bimestre. Logo após, são apresentadas as Programações para cada uma das Situações de Aprendizagem contempladas (em termos de tempo, conteúdo e tema, competência, habilidades e estratégias). Cada Situação de Aprendizagem é sucedida de um roteiro para sua aplicação e de atividades e considerações sobre a avaliação. A sequência se encerra com orientações para a recuperação.

No roteiro de aplicação[20] da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano consta que o estudo de Álgebra inicia-se no sétimo ano do Ensino Fundamental "com o uso de letras na representação de problemas que envolvem regularidades, padrões e relações entre grandezas". Ainda de acordo com o roteiro de aplicação, o aluno no sétimo ano deve "tomar contato e reconhecer as equações [...] como um importante recurso para organizar e representar informações" (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

Além disso, esse *Caderno* apresenta em seu roteiro "outro objetivo que também deve ser atingido na 6.ª série [7.º ano], que é o da sistematização de métodos de resolução de equações [...] de 1.º grau" (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

---

[19] As orientações gerais sobre o *Caderno* e os conteúdos básicos do bimestre encontram-se no Anexo B.

[20] O roteiro de aplicação da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do* Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009a) do terceiro bimestre do oitavo ano encontra-se no Anexo C.

O roteiro de aplicação da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental aponta que:

> O estudo da Álgebra no Ensino Fundamental inicia-se de forma organizada e intencional na 6.ª série [7.º ano], com o uso de letras na representação de problemas que envolvem regularidades, padrões e relações entre grandezas. Ainda na 6.ª série [7.º ano], o aluno deve tomar contato e reconhecer as equações [...] como um importante recurso para organizar e representar informações. (SÃO PAULO, 2009a, p. 11)

Nas considerações sobre a avaliação, o *Caderno* expõe:

> No tema equação, demos continuidade à introdução feita na 6.ª série [7.º ano] sobre o assunto, apresentando situações mais complexas passíveis de equacionamento, bem como equações de 1.º grau de complexidade maior que as apresentadas na série anterior. (SÃO PAULO, 2009a, p. 24)

A orientação para que se recupere a Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* é que:

> [...] o professor pode recorrer a novos problemas, de preferência mais simples no primeiro momento, para que o aluno possa progredir. Outra estratégia interessante é a de formar duplas de trabalho para a resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2009a, p. 58)

Quanto ao encadeamento com a introdução feita no sétimo ano, expõe:

> [...] sugerimos a continuidade do trabalho iniciado na série anterior com equação de 1.º grau por meio de estratégias para resolução de problemas. Na situação proposta, partimos de problemas que envolvem equacionamentos mais complexos do que os trabalhados na 6.ª série [7.º ano], e sugerimos estratégias de organização de dados em tabelas, usando variações na posição da incógnita como recurso para discussão de equações mais complexas. (SÃO PAULO, 2009a, p. 9)

Como nosso objetivo se volta às atividades presentes na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano e a introdução destas se refere a trabalho sobre o mesmo tópico no ano de escolaridade anterior, decidimos analisar as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do quarto bimestre do *Caderno do professor* do sétimo ano, uma vez que estas nos permitirão assinalar os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico propostos para a continuidade no oitavo ano.

Para nossas análises escolhemos as atividades presentes na Situação de Aprendizagem 1, que tem como título "Expandindo a linguagem das equações", presente no *Caderno* do terceiro bimestre do oitavo ano, e as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 presentes no *Caderno* do quarto bimestre do ano anterior. Selecionamos as atividades enumeradas de 1 a 5 da Situação de Aprendizagem 1 do terceiro bimestre do oitavo ano por corresponderem ao tópico em pauta, em concordância com os objetivos desta pesquisa. As demais não foram escolhidas por não diferirem muito das selecionadas.

Para conduzir nossa seleção de análise, apresentamos a seguir as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 (Quadros 8 e 9) do *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009b) do quarto bimestre do sétimo ano e os enunciados das cinco atividades da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009a) do terceiro bimestre do oitavo ano, que serão analisadas no Capítulo 4 juntamente com as respectivas resoluções propostas que constam nesse *Caderno.*

Quadro 8. Programação da Situação de Aprendizagem 2 do quarto bimestre do sétimo ano.

Tempo previsto: 2 semanas. **Conteúdos e temas:** letras para representar números ou grandezas; valor numérico de uma fórmula/ expressão algébrica. **Competências e habilidades:** ler e interpretar enunciados; transpor linguagem escrita para algébrica e vice-versa; resolver equações. **Estratégias:** resolução de problemas usando fórmulas relacionadas a diferentes contextos.

Fonte: São Paulo (2009b, p. 21).

Quadro 9. Programação da Situação de Aprendizagem 3 do quarto bimestre do sétimo ano.

Tempo previsto: 2 semanas. **Conteúdos e temas:** equações de 1.º grau com uma incógnita. **Competências e habilidades:** transpor a linguagem escrita para a algébrica; resolver equações de 1.º grau por meio de operações inversas e por equivalência. **Estratégias:** proposições e exercícios envolvendo equações.

Fonte: São Paulo (2009b, p. 29).

As cinco atividades selecionadas para análise são apresentadas nos Quadros 10 a 14.

Quadro 10. Enunciado da Atividade 1.

Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase: **"X** reais a menos que **Y** reais é igual a 40 reais**"**.

Fonte: São Paulo (2009a, p. 12).

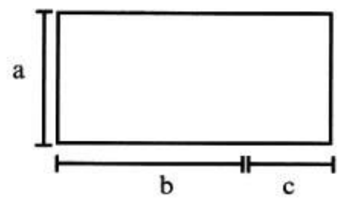
Quadro 11. Enunciado da Atividade 2.

Se **X** operários constroem um muro em **Y** horas, quantas horas serão necessárias para que o triplo do número de operários construa o mesmo muro? (Naturalmente, estamos supondo que todos os operários têm rendimento igual no desempenho da tarefa de construção.)

Fonte: São Paulo (2009a, p. 12).

Quadro 12. Enunciado da Atividade 3.

Escreva uma expressão, com as letras indicadas na figura, para a área do retângulo.



Fonte: São Paulo (2009a, p. 13).

Quadro 13. Enunciado da Atividade 4.

Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão X = 5Y fornece.

Fonte: São Paulo (2009a, p. 14).

Quadro 14. Enunciado da Atividade 5.

Ao repartir uma conta de R$ 78,00 no restaurante AL GEBRÁ, três amigos estabeleceram que: Rui pagaria 3/4 do que Gustavo pagou; Cláudia pagaria R$ 10,00 a menos que a terça parte do que Gustavo pagou. Que valor da conta coube a cada um dos três amigos?

Fonte: São Paulo (2009a, p. 15).

CAPÍTULO 4

ANÁLISES

Neste capítulo, apresentamos as análises empreendidas com base nos referenciais teóricos adotados, os quais respaldaram a formulação dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico descritos no Quadro 7.

Inicialmente, identificamos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes nas Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do quarto bimestre do sétimo ano e nos enunciados e resoluções propostas nas atividades da Situação de Aprendizagem 1 do terceiro bimestre do oitavo ano, para responder às seguintes questões:

As atividades presentes no tópico 'Equações algébricas de primeiro grau' do Caderno do professor *de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados?*

Para tanto, adotamos como unidade de análise o conjunto de enunciados e resoluções propostas presentes em cada atividade.

Na análise de cada atividade, grifamos os termos, expressões, frases e/ou trechos de frases relacionados aos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico. Cada indicador é assinalado em uma cor distinta, em coerência com o Quadro 7.

4.1 Programação da Situação de Aprendizagem 2 do quarto bimestre do sétimo ano

Na Situação de Aprendizagem 2, “a ideia central que deve nortear o trabalho com fórmulas é a de que as letras servem para representar um valor numérico qualquer” (SÃO PAULO, 2009b, p. 21).

De acordo com o *Caderno* do sétimo ano, o estudo das equações com utilização de fórmulas tem por “objetivo facilitar a compreensão do aluno sobre o uso de letras na Matemática” por meio de “alguns problemas que exploram o uso de fórmulas” (SÃO PAULO, 2009b, p. 22). O *Caderno* por isso inicia o estudo de equações com a manipulação de inúmeras fórmulas – relacionadas com Geometria, Média aritmética, Economia, Física e outros campos – que o professor pode trabalhar em sala de aula.

4.1.1 Análise da Programação da Situação de Aprendizagem 2

Quadro 15. Programação da Situação de Aprendizagem 2.

Tempo previsto: 2 semanas. **Conteúdos e temas:** letras para representar números ou grandezas; valor numérico de uma fórmula/expressão algébrica. **Competências e habilidades:** ler e interpretar enunciados; transpor linguagem escrita para algébrica e vice-versa; resolver equações. **Estratégias:** resolução de problemas usando fórmulas relacionadas a diferentes contextos.

Fonte: São Paulo (2009b, p. 21).

Ao conteúdo/tema “<u>letras para representar números ou grandezas; valor numérico de uma fórmula/expressão algébrica</u>” associamos o décimo e o nono indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico, que podem permitir que o professor conduza os alunos a:

Perceber o uso da variável como número genérico

e

Perceber o uso da variável como incógnita

Trabalhar com a variável como número genérico demanda a capacidade de “reconhecer padrões, encontrar regras, deduzir métodos gerais e escrevê-los”, usando símbolos para representar uma situação geral. Assim, uma letra em uma expressão algébrica pode representar um número qualquer (URSINI *et al*., 2005, p. 31[21]).

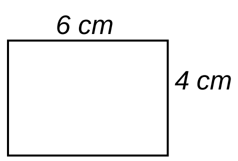
Por sua vez, trabalhar com a variável como incógnita demanda a capacidade de “reconhecer que uma dada situação abarca uma quantidade cujo valor não conhecemos, mas que é possível determinar levando em consideração os dados proporcionados” (URSINI *et al*., 2005, p. 27[22]).

O *Caderno do professor* traz nessa Programação diversas atividades, como os exemplos do Quadro 16, que envolvem uso da variável como incógnita (item *a*) e como número genérico (item *c*).

Quadro 16. Atividade proposta na Programação da Situação de Aprendizagem 2.

Vamos partir de uma situação concreta de cálculo do perímetro de um retângulo.

a) Calcule o perímetro de um retângulo de lados iguais a 4 cm e 6 cm. Escreva a sentença matemática correspondente a essa situação.



$P = 4 + 4 + 6 + 6$
$P = 20\ cm$

[...]

c) E o perímetro de um retângulo de lados iguais a **a** e **b**?

$P = a + a + b + b$

Comente com os alunos que a sentença anterior é equivalente a escrever $P = 2a + 2b$

Portanto, a fórmula do perímetro de um retângulo de lados a e b *quaisquer é: $P = 2a + 2b$*

Fonte: São Paulo (2009b, p. 22-23).

[21] No original: “[...] reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos.”

[22] No original: “[...] reconocer que en cierta situación está involucradas una cantidad cuyo valor no conocemos, pero que es posible determinar tomando en consideración los datos proporcionados.”

À competência/habilidade "ler e interpretar enunciados; transpor linguagem escrita para algébrica e vice-versa" associamos o primeiro indicador do pensamento algébrico, que pode possibilitar que o professor conduza os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

pois entendemos que ao ler e interpretar um enunciado o professor pode conduzir os estudantes ao estabelecimento de relações entre as diversas maneiras de representá-lo para iniciar a solução da atividade.

Transpor linguagem escrita para linguagem numérica/algébrica ou vice-versa envolve neste caso estabelecer relação entre expressões numéricas/algébricas e língua natural, conforme os exemplos fornecidos nessa Situação de Aprendizagem.

À competência/habilidade "resolver equações", relacionamos o sexto e o nono indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilitam que o professor conduza os alunos a:

Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples

e

Perceber o uso da variável como incógnita

Assim, presumimos que, ao resolver uma equação, o professor conduza os alunos a realizar alguns procedimentos para encontrar o valor desconhecido (incógnita). Ao usar esses procedimentos, está-se transformando a expressão inicial em outra equivalente e mais simples.

Desse modo, podemos notar uma adesão ao transformismo algébrico, que em determinados momentos é necessário, pois "fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema". É também um recurso "facilitador na simplificação de cálculos, devido à capacidade transformacional das expressões simbólicas em outras que lhe são equivalentes" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89).

O *Caderno do professor* do sétimo ano (SÃO PAULO, 2009b) expõe na Situação de Aprendizagem 2 que:

> [...] a exploração de fórmulas constitui uma estratégia eficaz para introduzir o uso de letras em Matemática. Elas podem ser facilmente manipuladas pelos alunos, sem a preocupação explícita de "resolver" uma equação. Além disso, o contexto inerente a uma fórmula constitui uma forma de dar significado ao uso das letras, à substituição destas por valores numéricos e, também, a alguns princípios de resolução [...]. (SÃO PAULO, 2009b, p. 21).

4.1.2 Programação da Situação de Aprendizagem 3 do quarto bimestre do sétimo ano

Na Situação de Aprendizagem 3 do quarto bimestre do sétimo ano, o estudo de equações algébricas tem por objetivo "introduzir alguns procedimentos para resolver equações de 1.º grau com uma incógnita" (SÃO PAULO, 2009b, p. 29).

4.1.2.1 Análise da Programação da Situação de Aprendizagem 3

Quadro 17. Programação da Situação de Aprendizagem 3.

Tempo previsto: 2 semanas. **Conteúdos e temas**: equações de 1.º grau com uma incógnita. **Competências e habilidades**: transpor a linguagem escrita para a algébrica; resolver equações de 1.º grau por meio de operações inversas e por equivalência. **Estratégias**: proposições e exercícios envolvendo equações.

Fonte: São Paulo (2009b, p. 29).

Na competência/habilidade "<u>transpor a linguagem escrita para a algébrica</u>", observamos existir relação com o primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita ao professor conduzir os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

pois entendemos que ao se transpor a linguagem escrita para a linguagem algébrica ocorra estabelecimento de relações entre essas linguagens.

A competência/habilidade "<u>resolver equações de 1.º grau por meio de [...] equivalência</u>" pode ser relacionada com o quinto indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita ao professor conduzir os alunos a:

Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas

De fato, o *Caderno do professor* do quarto bimestre do sétimo ano expõe, quanto à Situação de Aprendizagem 3, que:

> [...] o foco do trabalho é a resolução de equações. Exploramos duas linhas principais. A primeira envolve um tipo de resolução mais imediato, ao enxergar uma equação como uma pergunta do tipo: Qual é o número que satisfaz determinadas operações aritméticas? Por meio de um raciocínio aritmético, o aluno é capaz de resolver determinado tipo de equação usando apenas operações inversas. A segunda linha de resolução está relacionada à ideia de equivalência. (SÃO PAULO, 2009b, p. 9)

4.1.3 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes nas Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do Caderno do professor de Matemática do quarto bimestre do sétimo ano

No Quadro 18 reunimos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram das Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do referido *Caderno*.

Quadro 18. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* do sétimo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**As Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 possibilitam que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico

Tais indicadores evidenciam a possibilidade de que o professor desenvolva em aula o pensamento algébrico em seus alunos por meio de atividades envolvendo equações algébricas de primeiro grau – importante tópico do ensino de Matemática.

Como as atividades envolvendo equações no *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano constituem nosso foco de estudo, passaremos em seguida a analisar essas atividades.

4.2 Análise da Atividade 1 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

Quadro 19. Enunciado e resolução proposta para a Atividade 1.

Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase:
"**X** reais a menos que **Y** reais é igual a 40 reais".

É possível que boa parte dos estudantes responda X – Y = 40, quando o correto seria Y – X = 40. Um exemplo numérico pode ajudá-lo a esclarecer a questão: "Dez reais a menos que 50 reais é igual a 40 reais" (50 – 10 = 40).

Fonte: SÃO PAULO (2009a, p. 12).

Ao trecho do enunciado "Escreva uma sentença matemática" associamos o segundo indicador do pensamento algébrico, que possibilita ao professor conduzir os alunos a:

Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema

Entendemos que a expressão "estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema" se refira às sentenças matemáticas utilizadas para resolver tal situação-problema.

A frase "X reais a menos que Y reais é igual a 40 reais" do enunciado com a expressão "Y – X = 40" encontrada na resolução permitem presumir uma relação com o primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita ao professor conduzir os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

Assim, escrever a expressão algébrica que representa a frase do enunciado pode levar também a uma relação/comparação entre língua natural e uma expressão numérica/algébrica.

Entendemos que a produção de mais de um modelo de resolução é focalizada no trecho "Y – X = 40. Um exemplo numérico [...]. Dez reais a menos que 50 reais é igual a 40 reais (50 – 10 = 40)". Nesse trecho está presente o terceiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que pode possibilitar que o professor conduza os alunos a:

Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema

Tais modelos abrangem as diversas resoluções possíveis realizadas pelos alunos para um problema. Isso nos permite sugerir que o professor observe as resoluções de seus alunos, socializando-as em classe, antes de apresentar aquelas oferecidas no *Caderno do professor*.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), um importante caminho para desenvolver o pensamento algébrico é revelar ao aluno que não existe um modo único de chegar à solução de determinada atividade.

Na frase do enunciado "Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase: 'X reais a menos que Y reais é igual a 40 reais'", notamos a presença de dois indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico: o décimo e o décimo segundo.

O décimo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico pode possibilitar que o professor conduza os alunos a:

Perceber o uso da variável como número genérico

pois favorece ao professor mostrar que a variável está presente na sentença matemática como número genérico, simbolizando um constituinte do enunciado.

Para Ursini *et al*. (2005, p. 31) "para trabalhar a variável como número genérico, requer-se também a capacidade de usar símbolos para representar uma situação geral"[23].

O décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico pode possibilitar que o professor conduza os alunos a:

Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

o que favorece ao professor o emprego da linguagem simbólica para expressar matematicamente a frase referida.

[23] No original: "[…] para trabajar con la variable como número general se requiere también ser capaz de usar símbolos para representar una situación general […]."

4.2.1 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes na Atividade 1 da Situação de Aprendizagem 1

No Quadro 20 reunimos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram da análise do enunciado da Atividade 1 e da resolução para ela proposta.

Quadro 20. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados na Atividade 1 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
10	Perceber o uso da variável como número geral
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Tais indicadores possibilitam que o professor conduza seus alunos a desenvolver, ao menos em parte, o pensamento algébrico em suas aulas.

4.2.2 Outras considerações sobre a análise da Atividade 1

Na Situação de Aprendizagem 1 – "Expandindo a linguagem das equações" – o *Caderno do professor* chama atenção para "discutir aspectos relacionados com a leitura, interpretação de enunciado e transcrição das informações para a linguagem algébrica" (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

O *Caderno* aponta na resolução da Atividade 1 uma possível solução incorreta que o estudante poderia formular buscando interpretar o enunciado "X – Y = 40, quando o correto seria Y – X = 40". Entendemos que apontar essa possível resolução errada vise impulsionar o professor a discutir as respostas encontradas por seus alunos, o que favorece a interpretação do enunciado.

Quanto aos multissignificados das equações, entendemos que o enunciado dessa atividade apresenta concepção intuitivo-pragmática, em que a "utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática" (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97).

4.3 Análise da Atividade 2 presente na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

Quadro 21. Enunciado e resolução proposta para a Atividade 2.

Atividade 2 Se **X** operários constroem um muro em **Y** horas, quantas horas serão necessárias para que o triplo do número de operários construa o mesmo muro? (Naturalmente, estamos supondo que todos os operários têm rendimento igual no desempenho da tarefa de construção.) *A resposta correta não é 3Y, porque o problema em questão envolve grandezas “inversamente proporcionais”. Ou seja, quanto maior o número X de operários, menor o número Y de horas necessárias para levantar o muro (o dobro de X implica a metade de Y, e assim por diante). A resposta correta é Y/3. Veja como um exemplo numérico seria útil na identificação do erro da expressão 3Y:* *Se X = 1 operário e Y = 6 horas, X = 3 operários construiriam o muro mais rapidamente, construiriam na terça parte do tempo, ou seja, em 2 horas. Nesse caso, evidencia-se que a resposta 3Y, que resultaria em 3 · 6 = 18 horas, está errada.*

Fonte: São Paulo (2009a, p. 12-13).

Ao trecho do enunciado “Se X operários constroem um muro em Y horas, quantas horas serão necessárias para que o triplo do número de operários construa o mesmo muro?” relacionamos o primeiro e o décimo primeiro indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico proporciona ao professor conduzir seus alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

De fato, o enunciado envolve relação entre a língua natural e uma expressão numérica/algébrica.

O décimo primeiro indicador possibilita ao professor conduzir os alunos a:

Perceber o uso da variável como relação funcional

pois o enunciado envolve covariação e nos remete ao uso da variável como relação funcional.

Ursini *et al*. (2005) consideram que trabalhar com a variável como uma relação funcional requer reconhecer que determinadas situações envolvem quantidades cujos valores estão relacionados e que a variação de uma quantidade afeta a variação da outra.

Para Day e Jones (1997[24] *apud* BORRALHO; BARBOSA, 2009, p. 3), os estudantes só ganham domínio do pensamento algébrico quando adquirem capacidade de perceber e construir relações entre variáveis.

A resolução sugere utilização de exemplos numéricos como estratégia para refutar a proporcionalidade direta e evidenciar a indireta. Entendemos também que nos exemplos apresentados para validação da proporcionalidade indireta, tanto no trecho da resolução "<u>quanto maior o número X de operários, menor o número Y de horas necessárias para levantar o muro (o dobro de X implica a metade de Y, e assim por diante)</u>" como no trecho "<u>Se X = 1 operário e Y = 6 horas, X = 3 operários construiriam o muro mais rapidamente, construiriam na terça parte do tempo, ou seja, em 2 horas</u>", há relação com o terceiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O terceiro indicador possibilita que o professor conduza os alunos a:

Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema

[24] DAY R.; JONES, G. Building bridges to algebraic thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 2, n. 4), p. 208-212, 1997.

Podemos supor que esses exemplos possibilitam que o professor entre em contato com possíveis resoluções empreendidas por seus alunos, conduzindo-os a outros questionamentos a respeito da atividade.

Finalmente, à frase "A resposta é Y/3" relacionamos o décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita que o professor conduza os alunos a:

Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

ou seja, a frase acima grifada conduz o professor a desenvolver a linguagem simbólica com seus alunos, expressando matematicamente a resolução dessa atividade.

4.3.1 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes na Atividade 2 da Situação de Aprendizagem 1

No Quadro 22 reunimos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram do enunciado da Atividade 2 e da resolução para ela proposta do *Caderno do professor*.

Quadro 22. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados na Atividade 2 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
11	Perceber o uso da variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Tais indicadores possibilitam que o professor conduza seus alunos a desenvolver, ao menos em parte, o pensamento algébrico em suas aulas.

4.3.2 Outras considerações sobre a análise da Atividade 2

Na Situação de Aprendizagem 1 – "Expandindo a linguagem das equações" – o *Caderno do professor* chama atenção para "discutir aspectos relacionados com a leitura, interpretação de enunciado e transcrição das informações para a linguagem algébrica" (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

Em concordância com essa recomendação, a atividade possibilita que o professor trabalhe aspectos relacionados com a leitura e interpretação do enunciado e a transcrição de informações para a linguagem algébrica, além de explorar exemplos numéricos que viabilizem a resolução.

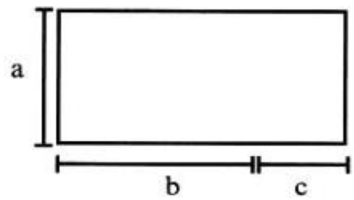
O *Caderno* aponta na resolução da Atividade 1 uma possível solução incorreta que o estudante poderia formular buscando interpretar o enunciado: "<u>X – Y = 40, quando o correto seria Y – X = 40</u>" (SÃO PAULO, 2009a, p. 12). Entendemos que apontar essa possível resolução errada vise impulsionar o professor a discutir as respostas encontradas por seus alunos, o que favorece a interpretação do enunciado. Na resolução da Atividade 2, o *Caderno* alerta sobre uma possível solução incorreta que o estudante, buscando interpretar o enunciado, poderia formular: "<u>A resposta correta não é 3Y, porque o problema em questão envolve grandezas 'inversamente proporcionais'. [...] A resposta correta é Y/3</u>" (p. 12). Expõe também que por meio de exemplo numérico o aluno poderá identificar seu erro. Cremos que, ao mostrar uma possível resolução incorreta que o aluno poderia realizar, o *Caderno* incentiva o professor a discutir as respostas encontradas por seus alunos, favorecendo a interpretação do enunciado.

Quanto aos multissignificados das equações, entendemos que o enunciado dessa atividade apresenta concepção intuitivo-pragmática, em que a "utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática que são originários de situações do dia a dia" (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97).

4.4 Análise da atividade 3 presente na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

Quadro 23. Enunciado e resolução proposta para a Atividade 3.

Escreva uma expressão, com as letras indicadas na figura, para a área do retângulo.

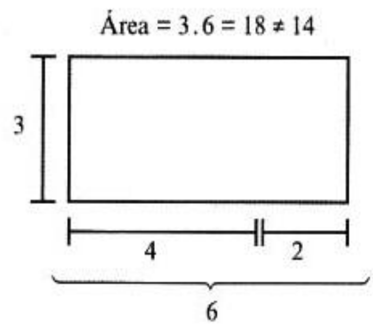


Alguns alunos devem escrever que a área é igual a "a · b + c", quando o correto seria "a · (b + c)". Nesse caso específico, a verificação com números pode conduzir a dois tipos de situação, como veremos usando os valores numéricos a = 3, b = 4 e c = 2:

Situação 1: O aluno arma a conta 3 · 4 + 2 e conclui que o resultado é 18. Nesse caso, ele obteve o resultado esperado para o problema, mas a partir de uma expressão escrita de forma errada para sua resolução (pela expressão formulada o resultado seria 14). Duas hipóteses podem ser levantadas nessa situação: ele armou a expressão com letras, mas não a utilizou quando foi fazer a verificação com números (fez a verificação apenas interpretando a figura) ou ele armou a expressão e, ao substituir os números, não associou a ideia de que em uma expressão com multiplicação e soma fazemos primeiro as multiplicações.

Situação 2: O aluno arma a conta 3 · 4 + 2, lembra-se da ordem das operações (primeiro a multiplicação e depois a adição) e conclui que o resultado é 14. Nesse caso, seu cálculo está correto para a expressão, mas não é a solução do problema, porque partiu de uma expressão errada.

A primeira situação evidencia a necessidade de que o professor retome com os alunos a ordem das operações, e a segunda sugere que o professor explore mais a ideia de verificação, que, no caso desse problema, implicaria confrontar o resultado 14 com o cálculo por substituição direta de valores na figura, como se vê a seguir:



Fonte: SÃO PAULO (2009a, p. 13).

Na frase do enunciado "Escreva uma expressão, com as letras indicadas na figura, para a área do retângulo", percebemos relação com o primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita que o professor conduza os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

Esse indicador se evidencia pelo fato de se solicitar ao aluno que escreva uma expressão que represente a área do retângulo.

A frase "Escreva uma expressão, com as letras indicadas na figura, para área do retângulo", do enunciado, e a expressão "a · (b + c)", presente na resolução, se relacionam com o segundo, o décimo e o décimo segundo indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico possibilita que o professor conduza os alunos a:

Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema

pois supomos que a expressão que conduz à resposta correta e completa possa ser considerada a estrutura aritmética/algébrica que corresponde à situação-problema. Esse indicador é reforçado quando se tem em vista a frase e a expressão algébrica que representa a área do retângulo, permitindo ao professor conduzir os alunos à verificação da resposta.

O décimo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico possibilita que o professor conduza os alunos a:

Perceber o uso da variável como número geral

De acordo com Ursini *et al*. (2005, p. 31), os números genéricos surgem, por exemplo, em fórmulas gerais como A = b x h, e "para trabalhar a variável como número genérico, requer-se também a capacidade de usar símbolos para representar uma situação geral"[25].

[25] No original: "[...] Para trabajar con la variable como número general se requiere también ser capaz de usar símbolos para representar una situación general [...]."

O décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico favorece que o professor conduza os alunos a:

Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

pois, ao solicitar que se escreva uma expressão, a atividade favorece o emprego da linguagem simbólica utilizando as letras indicadas na figura.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993):

> [...] a linguagem simbólico-formal cumpre, a partir de um certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico [...] por permitir operar com quantidades variáveis, possibilita uma melhor compreensão de situações nas quais a variação e o movimento estejam presentes. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89)

4.4.1 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes na Atividade 3 da Situação de Aprendizagem 1

No Quadro 24 reunimos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram da análise do enunciado da Atividade 3 e da resolução para ele proposta.

Quadro 24. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados na Atividade 3 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
10	Perceber o uso da variável como número geral
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Esses indicadores possibilitam ao professor conduzir seus alunos ao desenvolvimento, ao menos em parte, do pensamento algébrico em suas aulas.

4.4.2 Outras considerações sobre a análise da Atividade 3

Na Situação de Aprendizagem 1 – “Expandindo a linguagem das equações” – o *Caderno do professor* chama atenção para “discutir aspectos relacionados com a leitura, interpretação de enunciado e transcrição das informações para a linguagem algébrica” (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

A Atividade 3 proporciona meios para que o professor discuta aspectos relacionados à leitura, interpretação e transcrição das informações, a fim de que o aluno possa chegar à resposta correta.

O *Caderno* aponta na resolução da Atividade 3 uma possível resposta incorreta que o aluno poderia formular ao escrever a expressão “$\underline{a \cdot b + c}$”, com as letras indicadas na figura, para representar a área do retângulo, e em seguida mostra a expressão correta: “$\underline{a \cdot (b + c)}$”. É ressaltada a importância de verificar a resposta encontrada pelos alunos, utilizando para tanto valores numéricos que evidenciem possíveis respostas corretas ou incorretas. Isso pode contribuir para a elaboração de argumentos matemáticos para validar ou refutar as respostas.

Milton (1989[26] *apud* FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 5) considera que a iniciação ao desenvolvimento do pensamento algébrico começa desde os primeiros anos de escolarização: “aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como a ensinamos têm fortes implicações para o desenvolvimento do pensamento algébrico”.

Quanto aos multissignificados das equações, entendemos que essa atividade focaliza o multissignificado dedutivo-geométrico, no qual se observa a “noção de equação ligada às figuras geométricas, aos segmentos” (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97-98).

---

[26] MILTON, K. Fostering algebraic thinking in children. *The Australian Mathematics Teacher*, v. 45, n. 4, p. 14-16, 1989.

4.5 Análise da Atividade 4 presente na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

Quadro 25. Enunciado e resolução proposta para a Atividade 4.

Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão X = 5Y fornece. *Uma resposta tipicamente errada seria: "X = número de figurinhas de João e Y = número de figurinhas de Paulo. Logo, Paulo tem o quíntuplo do número de figurinhas de João".* *Nesse caso, partindo do enunciado criado pelo aluno, se João tem 3 figurinhas, Paulo terá 15, que é o quíntuplo de 3, ou seja, se X = 3, Y tem que ser igual a 15, o que se verifica pela expressão X = 5Y indicada no enunciado do problema. Para corrigir a resposta do aluno, bastaria trocar Paulo e João na frase que relaciona seus números de figurinhas.*

Fonte: São Paulo (2009a, p. 14).

O enunciado "Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão X = 5Y fornece" pode ser associado a dois indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico: o primeiro e o quarto.

O primeiro indicador possibilita que o professor conduza os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

Por entendermos que escrever por extenso seja o mesmo que escrever em língua natural, consideramos que uma sentença que forneça a mesma informação que a sentença algébrica "X = 5Y" permita estabelecer relações entre expressão algébrica e língua natural.

O quarto indicador possibilita que o professor conduza os alunos a:

Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica

A sentença "X = 5Y" nos remete também ao décimo primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilita que o professor conduza os alunos a:

Perceber o uso da variável como relação funcional

Ursini *et al*. (2005) consideram que trabalhar com variáveis em relação funcional requer reconhecer que determinadas situações envolvem quantidades cujos valores estão relacionados. Nessas condições, a variação de uma quantidade afeta a variação da outra.

4.5.1 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes na Atividade 4 da Situação de Aprendizagem 1

No Quadro 26, reunimos os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram do enunciado e da resolução da Atividade 4.

Quadro 26. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados na Atividade 4 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica.
11	Perceber o uso da variável como relação funcional

Tais indicadores possibilitam que o professor conduza seus alunos a desenvolver, ao menos em parte, o pensamento algébrico em suas aulas.

4.5.2 Outras considerações sobre a análise da Atividade 4

Na Situação de Aprendizagem 1 – “Expandindo a linguagem das equações” – o *Caderno do professor* chama atenção para “discutir aspectos relacionados com a leitura, interpretação de enunciado e transcrição das informações para a linguagem algébrica” (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

Na resolução da Atividade 4, entendemos que a menção a uma possível resposta incorreta que poderia ser feita pelo estudante seja um modo de impulsionar o professor a discutir as respostas encontradas por seus alunos, favorecendo a interpretação do enunciado por estes, assim como a utilização de procedimentos que validem ou refutem as respostas.

A alusão a uma resposta tipicamente incorreta na resolução dessa atividade – qual seja, "X = número de figurinhas de João e Y = número de figurinhas de Paulo. Logo, Paulo tem o quíntuplo do número de figurinhas de João" – é analisada em problemas similares ao dessa atividade por Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) (Quadro 27).

Quadro 27. Comentário sobre relações entre sentenças algébricas e em língua natural.

Tarefa [...] Alunos e Professores
Em certo evento escolar há seis vezes mais alunos que professores. Comentário Este problema, e outros deste tipo, têm sido minuciosamente estudados [...]. Muitas pessoas escrevem primeiro $6a = p$, mesmo quando são instruídas a usar a para o número de alunos e p para o número de professores. [...] Alunos que tenham se habituado a utilizar sua capacidade [...] para verificar uma generalização tendem a descobrir o erro em sua primeira conjectura.

Fonte: Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005, p. 49)[27].

Como mostra essa fonte, esse tipo de erro também ocorre quando os estudantes são solicitados a escrever uma sentença algébrica ao lhes ser fornecida a mesma informação em enunciado em língua inglesa. Interessa-nos destacar nessa citação que os autores incentivam os professores a conduzir seus alunos a verificar suas respostas para validá-las ou refutá-las.

De fato, parece-nos interessante que o professor proponha aos alunos empreenderem verificação numérica para perceberem seu erro e refutarem sua resposta inicial, que Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) designam como "primeira conjectura".

---

[27] No original:

"Task […] Students and Teachers

At a certain school event there are six times as many students as teachers.

Comment

This problem, and ones like it, have been thoroughly studied [...].

Many people first write down $6s = t$, even when they are told to use s for the number of students, and t for the number of teachers. […] Learners who have taken to using their power […] to check a generality are likely to discover the error in their first conjecture."

Em relação aos multissignificados das equações, entendemos que o enunciado da Atividade 4 apresenta concepção intuitivo-pragmática, em que a "utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática" (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97).

4.6 Análise da Atividade 5 presente na Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

A resolução dessa atividade se estende por duas páginas do *Caderno*, razão pela qual a dividiremos em duas partes.

Quadro 28. Enunciado da atividade 5.

Ao repartir uma conta de R$ 78,00 no restaurante AL GEBRÁ, três amigos estabeleceram que: Rui pagaria 3/4 do que Gustavo pagou; Cláudia pagaria R$ 10,00 a menos que a terça parte do que Gustavo pagou. Que valor da conta coube a cada um dos três amigos?

Fonte: São Paulo (2009a, p. 15).

Quadro 29. Resolução proposta da Atividade 5 (1.ª parte).

*Em primeiro lugar, é importante que o professor oriente uma estratégia de organização das informações, que pode ser feita por meio de uma tabela. Na montagem dessa tabela, chamaremos de **x** a quantia paga por um dos três amigos e, sempre que possível, o professor deve pedir que os alunos montem outras tabelas chamando de **x** a quantia paga por outra pessoa. Essa atividade de mudar o significado da incógnita é útil para o trabalho com a ideia de operação inversa e para a discussão de que, apesar de encontramos valores diferentes para **x**, e dependendo de onde ele esteja na tabela, a resposta final do problema sempre será a mesma, seja qual for a escolha de posição para **x**.*

Tabela 1

Rui	$\frac{3x}{4}$	$\frac{3x}{4} + x + \frac{x}{3} - 10 = 78$ *x = 42,24* ***Rui**:* R$ 31,68 ***Gustavo**:* R$ 42,24 ***Cláudia**:* R$ 4,08
Gustavo	x	
Cláudia	$\frac{x}{3} - 10$	

Tabela 2

Rui	$\frac{9(x+10)}{4}$	$\frac{9(x+10)}{4} + 3(x + 10) + x = 78$ $x = 4{,}08$ ***Rui:*** R$ 31,68 ***Gustavo:*** R$ 42,24 ***Cláudia:*** R$ 4,08
Gustavo	$3(x + 10)$	
Cláudia	x	

Tabela 3

Rui	x	$x + \frac{4x}{3} + \frac{4x}{9} - 10 = 78$ $x = 31{,}68$ ***Rui:*** R$ 31,68 ***Gustavo:*** R$ 42,24 ***Cláudia:*** R$ 4,08
Gustavo	$\frac{4x}{3}$	
Cláudia	$\frac{4x}{9} - 10$	

Fonte: São Paulo (2009a, p. 15).

Quadro 30. Resolução proposta da Atividade 5 (2.ª parte).

O equacionamento mais natural é o da tabela 1, que, por sua vez, recai em uma equação de resolução supostamente já conhecida de um aluno de 7.ª série. Partindo da tabela 1 e do equacionamento obtido, o aluno terá encontrado como resultado para Rui, Gustavo e Cláudia, respectivamente, os valores de R$ 31,68, R$ 42,24 e R$ 4,08. Espera-se, portanto, que os equacionamentos com colocação de x como valor da conta a ser pago por outra pessoa que não Gustavo produzam os mesmos resultados finais para cada uma das três pessoas. De posse dessa conclusão, e tendo montado as tabelas 2 e 3, o aluno poderá investigar estratégias de resolução das equações decorrentes dessas duas tabelas, em particular nos interessando as estratégias de resolução da equação decorrentes da tabela 2, que é mais difícil do que as outras. No caso da equação da tabela 2, o aluno sabe que seu resultado final tem que ser x = 4,08 e, a partir dessa informação, deverá descobrir eventuais erros no seu processo de resolução da equação, se ele não tiver conduzido a esse valor. O erro mais frequente, e que merece um comentário do professor, é:

Ao multiplicar por 4 os dois membros, o aluno escreve a equação:

$9(x + 10) + 12(4x + 40) + 4x = 312$, *quando o correto seria* $9(x + 10) + 12(x + 10) + 4x = 312$ *ou*

$9(x + 10) + 3(4x + 40) + 4x = 312$

Uma boa estratégia que pode ser sistematizada ao final dessa discussão para evitar erros como o mencionado é:

1. *Aplicamos a propriedade distributiva eliminando parênteses.*
2. *Frações com o numerador escrito como soma ou subtração devem ser transformadas em frações com numerador simples (apenas um número ou uma letra, ou um número multiplicando uma letra).*
3. *Multiplicamos os dois membros (termo a termo) pelos denominadores das frações ou, de forma mais direta, pelo MDC dos denominadores.*

Nesse caso, a resolução corresponderia às seguintes etapas:

$$\frac{9(x+10)}{4} + 3(x + 10) + x = 78$$

$$\frac{9x+90}{4} + 3x + 30 + x = 78$$

$$\frac{9x}{4} + \frac{90}{4} + 3x + 30 + x = 78$$

$$9x + 90 + 12x + 120 + 4x = 312$$

$$25x = 102 \rightarrow x = 4{,}08$$

Fonte: São Paulo (2009a, p. 16).

No enunciado "Ao repartir uma conta de R$78,00 [...] três amigos estabeleceram que: Rui pagaria 3/4 do que Gustavo pagou. Cláudia pagaria R$ 10,00 a menos que a terça parte do que Gustavo pagou. Que valor da conta coube a cada um dos três amigos?", percebemos haver relação com dois indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico: o primeiro e o segundo.

O primeiro indicador possibilita que o professor conduza os alunos a:

Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos

Entendemos que seja necessário estabelecer relação/comparação com a língua natural e a expressão numérica/algébrica pertinente para que a situação-problema possa ser resolvida.

O segundo indicador possibilita que o professor conduza os alunos a:

Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema

Entendemos que nesse indicador a expressão se refira à estrutura aritmética/algébrica que corresponde à situação-problema, ou seja, a sentença matemática que permite resolvê-la.

À frase "<u>Que valor da conta coube a cada um dos três amigos?</u>" associamos o nono indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual possibilita que o professor conduza os alunos a:

Perceber o uso da variável como incógnita

Desse modo, podemos conjecturar que, para determinar a quantia que coube a cada amigo, o professor conduza os alunos a realizarem alguns procedimentos para encontrarem o valor desconhecido (incógnita).

Segundo Ursini *et al*. (2005, p. 27), para compreender o uso da variável como incógnita e poder resolver problemas que a envolvam "devemos ser capazes de reconhecer que uma dada situação abarca uma quantidade cujo valor não conhecemos, mas que é possível determinar levando-se em consideração os dados proporcionados"[28].

[28] No original: "[...] uno debe ser capaz de reconocer que en cierta situación está involucrada una cantidad cuyo valor no conocemos, pero que es posible determinar tomando en consideración los datos proporcionados."

Quanto à frase “Que valor da conta coube a cada um dos três amigos?” e à resposta “Rui: R$ 31,68; Gustavo: R$ 42,24 e Cláudia: R$ 4,08”, as associamos com o décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que favorece que o professor conduza os alunos a:

Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

visto que a resolução proposta no *Caderno* sugere que o professor desenvolva a linguagem simbólica com seus alunos, expressando matematicamente a resolução da situação-problema.

Nas expressões “$\frac{3x}{4}+x+\frac{x}{3}-10=78$”, “$\frac{9(x+10)}{4}+3(x+10)+x=78$” e “$x+\frac{4x}{3}+\frac{4x}{9}-10=78$”, presentes nas Tabelas 1, 2 e 3 (Quadro 29), podemos pressupor relação com o terceiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, que possibilitam que o professor conduza os alunos a:

Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema

Essas diferentes possibilidades favorecendo que o professor explicite aos alunos que a quantia paga por cada amigo será a mesma, seja qual for a expressão de partida.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram este um importante caminho para desenvolver o pensamento algébrico, por revelar ao aluno que não existe um modo único de chegar à solução de determinada situação-problema.

Tendo-se em vista a resolução da equação, onde figuram as expressões algébricas seguintes:

$$\frac{9(x+10)}{4}+3(x+10)+x=78$$

$$\frac{9x}{4}+\frac{90}{4}+3x+30+x=78$$

$$9x+90+12x+120+4x=312$$

$$25x=102 \rightarrow x=4{,}08$$

percebemos relação com o sexto indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O sexto indicador favorece que o professor conduza os alunos a:

Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples

Desse modo, a transformação de uma expressão em outra equivalente se dá por meio de procedimentos matematicamente válidos que permitem resolver uma equação.

4.6.1 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico presentes na Atividade 5 da Situação de Aprendizagem 1

O Quadro 31 reúne os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que emergiram do enunciado da Atividade 5 e da resolução para ela proposta.

Quadro 31. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados na Atividade 5 da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
9	Perceber o uso da variável como incógnita
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Esses indicadores possibilitam que o professor conduza seus alunos a desenvolver, ao menos em parte, o pensamento algébrico em suas aulas.

4.6.2 Outras considerações sobre a análise da Atividade 5

Como já expusemos, na Situação de Aprendizagem 1 – “Expandindo a linguagem das equações” – o *Caderno do professor* chama atenção para “discutir aspectos relacionados com a leitura, interpretação de enunciado e transcrição das informações para a linguagem algébrica”. Também propõe ”resoluções de problemas envolvendo equações de primeiro grau, utilizando o recurso de organização das informações em tabelas” (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

Entendemos que a Atividade 5 proporciona meios para que o professor discuta aspectos relacionados à leitura, interpretação e transcrição das informações e, para tanto, apresenta como recurso a organização das informações em tabelas para chegar à solução dessa atividade.

A resolução proposta para a Atividade 5 chama atenção para um possível erro que o aluno pode fazer ao multiplicar por 4 os dois membros da equação “ $\frac{9(x+10)}{4} + 3(x+10) + x = 78$ ”:

> [...] o aluno escreve a equação:
> $9(x + 10) + 12(4x + 40) + 4x = 312$,
> quando o correto seria
> $9(x + 10) + 12(x + 10) + 4x = 312$ ou
> $9(x + 10) + 3(4x + 40) + 4x = 312$
> (SÃO PAULO, 2009a, p. 15)

Entendemos que mostrar um possível erro na resolução que o estudante poderia fazer seja um modo de incentivar o professor a discutir as respostas encontradas por seus alunos, o que favorece a interpretação do enunciado e das propriedades que fundamentam as transformações de uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples. Interessa-nos destacar a importância de que o professor conduza seus alunos a verificarem suas respostas para validá-las ou refutá-las, aspecto esse destacado por Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005).

A Atividade 5 traz no início da resolução a orientação de que, "em primeiro lugar, é importante que o professor oriente uma estratégia de organização das informações, que pode ser feita por meio de uma tabela" (SÃO PAULO, 2009a, p. 15).

Entendemos que tal orientação possibilita que o professor conduza seus alunos a conjecturar a resolução a partir de diferentes pontos de vista.

Borralho e Barbosa (2009, p. 10) afirmam, quanto a habilidades matemáticas, que "cabe ao professor através das suas práticas contribuir para o seu desenvolvimento", encontrando "estratégias que permitam ao aluno desenvolver o pensamento algébrico", seja por meio das noções de equivalência, de movimento ou de variação. Os autores ressaltam a necessidade de orientação para "construir esse tipo de pensamento".

Quanto aos multissignificados das equações, entendemos que o enunciado dessa atividade apresenta concepção intuitivo-pragmática, em que a "utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática" (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97).

4.7 Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas análises das cinco atividades da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano

O Quadro 32 sumariza os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nos enunciados e resoluções das cinco atividades da Situação de Aprendizagem 1.

Quadro 32. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas atividades da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico		**Atividade em que o indicador é evidenciado**				
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos					
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema					
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema					
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica					
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas					
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples					
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização					
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias					
9	Perceber o uso da variável como incógnita					
10	Perceber o uso da variável como número genérico					
11	Perceber o uso da variável como relação funcional					
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente					

Tais indicadores possibilitam ao professor desenvolver o pensamento algébrico com essas atividades. Note-se que, dentre os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico adotados nesta pesquisa, o quinto ("interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas"), o sétimo ("desenvolver algum tipo de processo de generalização") e o oitavo ("perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias") não se evidenciaram nas atividades analisadas, seja nos enunciados ou nas resoluções para elas propostas no *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano, mas cabe ressaltar que o quinto indicador foi evidenciado ao examinarmos as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009b) do quarto bimestre do sétimo ano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PRODUTO

5.1 Considerações finais

Este estudo teve por objetivo evidenciar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ no *Caderno do professor* de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental, adotado na rede pública do Estado de São Paulo. Para definir esses indicadores, baseamo-nos em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e Ursini *et al*. (2005). O objetivo desdobrou-se nas seguintes questões de pesquisa:

As atividades presentes no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ do Caderno do professor *de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados?*

Dentre os doze indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico considerados (Quadro 7), a pesquisa evidenciou nove (Quadro 32).

O primeiro indicador mostrou-se presente em todas as cinco atividades analisadas. Todas elas, portanto, possibilitam que o professor conduza os alunos a “estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos”.

O segundo indicador revelou-se nas Atividades 1, 3 e 5 e o terceiro nas Atividades 1, 2 e 5, revelando que estas possibilitam que o professor conduza seus alunos a “perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema” (no caso das três primeiras citadas) e a “produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema” (as três últimas citadas). Cremos que a presença do terceiro indicador nessas três últimas atividades se deva à presença de mais de um modelo de resolução disponível para a mesma situação-problema. Por sua vez, a presença do segundo indicador nas três primeiras citadas possivelmente se deve ao fato de que a expressão ou sentença solicitada pelo enunciado seja a estrutura aritmética/algébrica que corresponde à situação-problema, ou seja, a sentença matemática que permite resolvê-la.

O quarto indicador emergiu uma vez, na Atividade 4, enquanto o sexto e o nono emergiram também apenas uma vez, na Atividade 5, revelando que estas duas atividades possibilitam que o professor conduza os alunos a “produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica” (no caso da primeira citada) e a “transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples” e a “perceber o uso da variável como incógnita” (no caso da última citada).

O décimo e o décimo primeiro indicadores se revelaram em duas das cinco atividades, respectivamente nas atividades 1 e 3 e nas 2 e 4. Estas, portanto, possibilitam que o professor conduza os alunos a, respectivamente, “perceber o uso da variável como número genérico” e a “perceber o uso da variável como relação funcional”.

O quinto, o sétimo e o oitavo indicadores, que podem permitir ao professor conduzir seus alunos a, respectivamente, “interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas”, a “desenvolver algum tipo de processo de generalização” e a “perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias”, não emergiram na análise das atividades do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano, mas cabe ressaltar que o quinto indicador foi evidenciado ao examinarmos as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009b) do quarto bimestre do sétimo ano. Tais constatações estão sumarizadas no Quadro 20 (reproduzido a seguir como Quadro 33).

Quadro 33. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* de Matemática do sétimo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**As programações analisadas possibilitam que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico

O décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, revelado em quatro das cinco atividades analisadas (1, 2, 3 e 5), possibilita que o professor conduza os alunos a “desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente”.

Em resposta às questões de pesquisa, consideramos que as atividades do tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ do *Caderno do professor* selecionadas para análise possibilitam que o professor conduza os alunos a desenvolver o pensamento algébrico, sendo que nas atividades analisadas revelou-se a presença de no mínimo três e no máximo seis indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como sintetizado no Quadro 32, os indicadores priorizados foram o primeiro e o décimo segundo indicadores: o primeiro se evidenciou em todas as cinco atividades e o décimo segundo em quatro delas (1, 2, 3 e 5). O segundo indicador revelou-se nas Atividades 1, 3 e 5 e o terceiro nas Atividades 1, 2 e 5, por sua vez, se evidenciaram em três das cinco atividades analisadas.

Com relação aos mutissignificados de equações (RIBEIRO; MACHADO, 2009), observamos a presença de dois: o intuitivo-pragmático e o dedutivo-geométrico.

O multissignificado intuitivo-pragmático compareceu com maior frequência em nossas análises, sendo evidenciado em quatro das cinco atividades (1, 2, 4 e 5). No âmbito desses multissignificados, a equação “é concebida como intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades” e “sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática” (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 97).

O multissignificado dedutivo-geométrico foi evidenciado apenas na atividade 3. Nele, a equação “é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos” (RIBEIRO; MACHADO, 2009, p. 98).

À luz dos multissignificados de equações propostos por Ribeiro e Machado (2009), nossa visão foi ampliada, como apontado no Capítulo 2, deixando de se ater ao enfoques intuitivo-pragmático e processual-tecnicista e passando a abranger também o dedutivo-geométrico.

É amplo o campo de investigação possível a respeito do *Caderno do professor* de Matemática, e não somente sobre o tópico aqui focalizado. Este estudo, no entanto, esclareceu-nos que a abordagem do tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do docente que utilize esse material, ao possibilitar que conduza os estudantes a desenvolver esse pensamento tão importante para o aprendizado de Matemática.

Como expõem Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 88), “o pensamento algébrico nos leva [...] a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento”.

Esperamos que o presente estudo proporcione aportes proveitosos ao projeto de pesquisa *Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica*, voltado ao curso de Mestrado Profissional, ao Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, ao *Caderno do professor* de Matemática (SÃO PAULO, 2009a) do Ensino Fundamental adotado nas escolas públicas do Estado de São Paulo e também a futuras investigações relacionadas com esse *Caderno* e com outras publicações de apoio ao docente de Matemática, bem como ao debate acadêmico sobre o tema e a estudos que promovam o desenvolvimento profissional de professores dessa disciplina.

Para futuros estudos, sugerimos que se focalizem os seguintes questionamentos, com base no Quadro 7: Que indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico seriam focalizados por docentes que utilizem as mesmas atividades aqui analisadas? Em *Cadernos do professor* voltados a outros anos do Ensino Fundamental se revelariam indicadores que não foram evidenciados nesta pesquisa?

5.2 Produto

Como produto desta dissertação de Mestrado Profissional, procuramos contribuir com o *Caderno do professor* de Matemática (SÃO PAULO, 2009a) evidenciando os indicadores do pensamento algébrico em atividades resolvidas nele presentes.

Para auxiliar nossas análises, empregamos como referenciais teóricos os caracterizadores do pensamento algébrico propostos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

A análise foi também enriquecida com os aportes teóricos de Ursini *et al*. (2005) a respeito do uso de variáveis e com os de Ribeiro e Machado (2009) sobre multissignificados de equações.

O estudo se desenvolveu a partir das seguintes questões de pesquisa:

As atividades presentes no tópico ‘Equações algébricas de primeiro grau’ do Caderno do professor *de Matemática do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental possibilitam que o professor conduza os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico? Em caso afirmativo, que indicadores são priorizados?*

A partir dessas questões, construímos um quadro norteador o Quadro 7 (reproduzido a seguir como Quadro 34) explicitando indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico com base em Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) e em Ursini *et al*. (2005).

Quadro 34. Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico adaptados para as análises desta pesquisa.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico
11	Perceber o uso da variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Fontes das enunciações originais e de algumas das adaptações: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) e Ursini *et al*. (2005).

Esse quadro pode ser de utilidade para outros estudos como o foi para nós, o que permite considerá-lo junto com as análises das atividades como uma parte do produto desta dissertação.

As análises[29] das cinco atividades da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* permitiram alcançar respostas às questões de pesquisa, com base nos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados, que estão sintetizados no Quadro 32 (reproduzido a seguir como Quadro 35) e comentados na seção 5.1.

Quadro 35. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas atividades da Situação de Aprendizagem 1 do *Caderno do professor* do terceiro bimestre do oitavo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico		**Atividades**				
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza** os **alunos a:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos					
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema					
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema					
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica					
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas					
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples					
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização					
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias					
9	Perceber o uso da variável como incógnita					
10	Perceber o uso da variável como número genérico					
11	Perceber o uso da variável como relação funcional					
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente					

[29] Optamos por não apresentar aqui as análises das atividades, que constam, porém, no CD-ROM correspondente ao produto desta dissertação.

Como mostra o Quadro 35, o primeiro indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico revelou-se presente em todas as cinco atividades analisadas. Todas elas, portanto, possibilitam que o professor conduza os alunos a “estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos”, pois essas atividades trazem enunciados em língua natural.

O décimo segundo indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico – “desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente” – revelou-se em quatro das cinco atividades analisadas.

Percebemos que alguns indicadores, tais como “produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica”, “transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples” e “perceber o uso da variável como incógnita” foram menos evidenciados nas atividades selecionadas. Os indicadores “interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas”, “desenvolver algum tipo de processo de generalização” e “perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias” não se evidenciaram em nossas análises das cinco atividades.

Cabe ressaltar que o quinto indicador foi evidenciado ao examinarmos as Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* (SÃO PAULO, 2009b) do quarto bimestre do sétimo ano. Outros indicadores também foram observados nas Programações. Tais constatações, sumarizadas no Quadro 20 (reproduzido a seguir como Quadro 36), podem ser consideradas como a última parte do produto final desta pesquisa.

Quadro 36. Síntese dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciados nas Programações das Situações de Aprendizagem 2 e 3 do *Caderno do professor* do sétimo ano.

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**As programações analisadas possibilitam que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico

Consideramos que este produto possa ser útil aos professores de Matemática em geral, e não somente aos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Novas pesquisas, focalizando outros tópicos em *Cadernos* de outros anos ou futuras edições dessa série de materiais didáticos poderão revelar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico que não tenham sido aqui evidenciados, permitindo também identificar, em estudos diacrônicos, possíveis linhas de evolução na presença desses indicadores nesses materiais.

REFERÊNCIAS

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Pensamento algébrico e exploração de padrões. In: PROFMAT-2009, 2009, Viana do Castelo (Portugal). **Anais...** Viana do Castelo: APM, 2009. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em 13 fev. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução n.º 3, de 3 de agosto de 2005. Define normas nacionais para a ampliação do ensino fundamental para nove anos de duração. **Diário Oficial da União**, 8 ago. 2005, Seção I, pág. 27. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb003_05.pdf>.

CASTRO, T. F. C. **Aspectos do pensamento algébrico revelados por professores estudantes de um curso de formação continuada em educação matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CASTRO, E. E. **Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no 3.º ciclo do ensino fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 2005, Lisboa. **Comunicações...** Lisboa: 2005. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 20 fev. 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

HAMAZAKI, A. C. **Análise da situação de aprendizagem de equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do professor do estado de São Paulo de 2009.** 2010. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Trad. Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Rev. e adap. Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. O papel da notação algébrica no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., 2010, Salvador, **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. palestra 4.

MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto de pesquisa: expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACÍÓN MATEMÁTICA – CIAEM, 12., 2007, Santiago de Querétaro (México). **Anales...** [S.l.]: CIAEM, 2007. v. 1, p. 1-9.

MARTINS, A. M. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no ensino fundamental**. 2008. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MASON, J.; GRAHAM, A.; JOHNSTON-WILDER, S. **Developing thinking in algebra**. London: The Open University, 2005.

PEREIRA, A. **Equações algébricas no ensino fundamental**: um panorama de dissertações da PUC-SP. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multissignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico, 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RIBEIRO, A. J.; MACHADO, S. D. A. Equações e seus multissignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, n. 31, p. 85-104, 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Matemática**: ensino fundamental: 5.ª a 8.ª séries. 2. ed. São Paulo: SE; CENP, 1998. v. 1. (Prática Pedagógica.)

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: matemática. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: matemática: ensino fundamental: 7.ª série [8.º ano]: volume 3. São Paulo: SEE, 2009a.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: matemática: ensino fundamental: 6.ª série [7.º ano]: volume 4. São Paulo: SEE, 2009b.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Matrizes de referência para a avaliação SARESP**: documento básico. São Paulo: SEE, 2009c.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do gestor**: gestão na escola. São Paulo: SEE, 2009d.

URSINI, S.; ESCAREÑO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental**: una propuesta alternativa. México: Trillas, 2005.

Bibliografia consultada

BAILO, F. R. R. **Análise dos usos da variável presentes no Caderno do aluno na introdução à álgebra da proposta curricular do estado de São Paulo do ensino fundamental II de 2008 a 2009.** 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BELTRAME, J. T. **A álgebra nos livros didáticos**: um estudo dos usos das variáveis, segundo o Modelo 3UV. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CLARA, M. S. H. C. **Resolução de inequações logarítmicas**: um olhar sobre a produção de alunos. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DANIEL, J. A. **Um estudo de equações algébricas de 1.º grau com o auxílio do software APLUSIX**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FONTALVA, G. M. **Um estudo sobre inequações entre alunos do ensino médio**. 2006. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HESSEL, L. A. **Um estado do conhecimento de dissertações e teses brasileiras sobre equações**: o uso de tecnologias no ensino médio (1998-2008). 2010. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MELO, J. J. **Docência de inequações no ensino fundamental da cidade de Indaiatuba**. 2007. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MELO, M. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional**: uma metanálise qualitativa de dissertações. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NAGAMACHI, M. T. **Equações no ensino médio: uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006**. 2009. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RODRIGUES, E. P. **Sistema de equação linear**: um estudo de suas abordagens nos Cadernos do professor de 2008 e 2009 da rede pública de ensino do estado de São Paulo. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SALDANHA, M. S. G. **Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

VAZ, R. A. C. **SARESP/2005**: uma análise de questões de matemática da 7.ª série do ensino fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ANEXOS

Anexo A

Trabalhos concluídos do projeto de pesquisa *Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem*, de Maranhão (2007), até o segundo semestre de 2011.

Autor	Título	Ano
FONTALVA, Gerson Martins	Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio	2006
MELO, José João de	Docência de inequações no Ensino Fundamental da cidade de Indaiatuba	2007
MELO, Marcelo de	O ensino de desigualdades e inequações em um curso de Licenciatura em Matemática	2007
CLARA, Margarete da Silva Hungria Castro	Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção de alunos	2007
DANIEL, José Anísio	Um estudo de equações algébricas de 1.º grau com o auxílio do *software* APLUSIX	2007
SALDANHA, Maria Sueli Gomes	Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no Ensino Médio	2007
MARTINS, Adriano de Morais	Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental	2008
RODRIGUES, Salete	Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa APLUSIX	2008
VAZ, Rosana Aparecida da Costa	SARESP/2005: uma análise de questões de Matemática da 7.ª série do ensino fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica	2008

Autor	Título	Ano
CASTRO, Tais Freitas de Carvalho	Aspectos do pensamento algébrico revelados por professores estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática	2009
MIRANDA, Márcia Regiane	Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações	2009
NAGAMACHI, Marcos Toshio	Equações no ensino médio: uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006	2009
BELTRAME, Juliana Thais.	A Álgebra nos livros didáticos: um estudo dos usos das variáveis, segundo o Modelo 3UV.	2009
PEREIRA, Armando	Equações algébricas no Ensino Fundamental: um panorama de dissertações da PUC-SP	2010
HAMAZAKI, Adriana Clara	Análise da situação de aprendizagem de equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor do Estado de São Paulo de 2009	2010
HESSEL, Lucimar de Andrade	Um estado do conhecimento de dissertações e teses brasileiras sobre equações: o uso de tecnologias no Ensino Médio (1998-2008)	2010

Anexo B

Trabalhos concluídos do projeto de pesquisa *Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica*, de Maranhão (formulado em 2010), até o segundo semestre de 2011.

Autor	Título	Ano
BAILO, Fernanda Roberta Ravazi	Análise dos usos da variável presentes no Caderno do aluno na introdução à Álgebra da Proposta Curricular do Estado de São Paulo do Ensino Fundamental II de 2008 a 2009	2011
RODRIGUES, Emerson Pereira	Sistema de equação linear: um estudo de suas abordagens nos Cadernos do professor de 2008 e 2009 da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo	2011
CASTRO, Edson Eduardo	Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no 3.º ciclo do Ensino Fundamental	2011

Anexo C

Orientação geral sobre os *Cadernos*

ORIENTAÇÃO GERAL SOBRE OS CADERNOS

Os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada bimestre não se afastam, de maneira geral, do que é usualmente ensinado nas escolas, ou do que é apresentado pelos livros didáticos. As inovações pretendidas referem-se às suas formas de abordagem sugeridas ao longo do Caderno de cada um dos bimestres. Em tal abordagem, busca-se evidenciar os princípios norteadores do presente currículo, destacando-se a contextualização dos conteúdos, as competências pessoais envolvidas, especialmente as relacionadas com a leitura e a escrita matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática.

Em todos os Cadernos, os conteúdos estão organizados em oito unidades com extensões aproximadamente iguais, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo. De acordo com o número de aulas disponíveis por semana, o professor explorará cada assunto com mais ou menos aprofundamento. A critério do professor, em cada situação específica, o tema correspondente a uma das unidades pode ser estendido para mais de uma semana, enquanto o de outra unidade pode ser tratado de modo mais simplificado.

É desejável que o professor tente contemplar as oito unidades, uma vez que, juntas, elas compõem um panorama do conteúdo do bimestre, e, muitas vezes, uma das unidades contribui para a compreensão das outras. Insistimos, no entanto, no fato de que somente o professor, em sua circunstância particular, e levando em consideração seu interesse e o dos alunos pelos temas apresentados, pode determinar adequadamente quanto tempo dedicar a cada uma das unidades.

Ao longo dos Cadernos são apresentadas, além de uma visão panorâmica do conteúdo do bimestre, quatro Situações de Aprendizagem (1, 2, 3 e 4), que pretendem ilustrar a forma de abordagem sugerida, instrumentalizando o professor para sua ação em sala de aula. As Situações de Aprendizagem são independentes e podem ser exploradas com mais ou menos intensidade, segundo seu interesse e o de sua classe. Naturalmente, em razão das limitações no espaço dos Cadernos, nem todas as unidades foram contempladas com Situações de Aprendizagem, mas a expectativa é de que a forma de abordagem dos temas seja explicitada nas atividades oferecidas.

São apresentados também em cada Caderno, sempre que possível, materiais disponíveis (textos, *softwares*, *sites*, vídeos, entre outros) em sintonia com a forma de abordagem proposta, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas.

Compõem o Caderno, ainda, algumas considerações sobre a avaliação a ser realizada, bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências esperadas no presente bimestre.

Anexo D

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 1

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 1

O estudo da Álgebra no Ensino Fundamental inicia-se de forma organizada e intencional na 6ª série, com o uso de letras na representação de problemas que envolvem regularidades, padrões e relação entre grandezas. Ainda na 6ª série, o aluno deve tomar contato e reconhecer as equações simples como um importante recurso para organizar e representar informações. Assim, parte significativa do empenho do professor como o parceiro mais experiente do aluno deve ser o de selecionar adequadamente problemas que permitam a maior abrangência de situações passíveis de transposição da linguagem materna para a linguagem da álgebra. Outro objetivo que também deve ser atingido na 6ª série é o da sistematização de métodos de resolução de equações simples de 1º grau.

De acordo com esta proposta de planejamento, o 3º bimestre da 7ª série será dedicado à sequência do estudo da Álgebra, sendo, portanto, indispensável que o professor avalie, no início do curso, em que estágio encontra-se o conhecimento dos alunos no que diz respeito à transposição de problemas da língua escrita para a álgebra (e vice-versa) e ao tipo de equação que o aluno consegue resolver por um método que não seja apenas o de tentativa e erro. Feita essa avaliação, a sequência de trabalho do bimestre poderá ser planejada, tendo como objetivo a ampliação do repertório de situações de transposição entre linguagens e a ampliação de estratégias de

(Continua.)

resolução de equações mais complexas (ainda com o foco voltado às equações de 1º grau). Na Situação de Aprendizagem 1, apresentaremos algumas possibilidades de trabalho nessa direção.

A leitura atenta de um problema é o primeiro passo no caminho da transposição para a linguagem algébrica, mas estudos indicam que apenas a boa leitura não é garantia para a transposição correta. Veja, por exemplo, a seguinte situação-problema apresentada para estudantes universitários e os seus resultados: usando as variáveis **A** para número de alunos e **P** para o de professores, escreva uma equação para representar a afirmação "há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade". A resposta correta não é 6A = P, apesar de boa parte dos estudantes ter assinalado essa alternativa. Se essa fosse a resposta, para um total de 10 alunos teríamos 60 professores, exatamente o contrário do que afirma o enunciado. O correto seria **A = 6P**.

Aproveitando esse exemplo, uma estratégia importante que merece ser discutida pelo professor com seus alunos é a da verificação. Note que, após a transposição entre as linguagens, que conduziu equivocadamente à expressão **6A = P**, caso o aluno confrontasse seu resultado com um exemplo numérico, é possível que tivesse identificado seu erro. Bastaria, nesse caso, atribuir um valor qualquer para **A**, como 10, obtendo em seguida 60, o que indicaria que para cada 1 aluno teríamos 6 professores. Confrontando esse resultado com as informações do texto, fica evidente que a correção a ser feita é a da troca entre **A** e **P** na expressão errada, resultando corretamente na expressão **A = 6P** (nesse caso, para 1 professor temos 6 alunos, para 2 professores temos 12 alunos, para 3 professores temos 18 alunos, e assim sucessivamente).

Veremos a seguir alguns exemplos que podem ser utilizados para o mesmo tipo de trabalho.

Atividade 1

Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase:
"**X** reais a menos que **Y** reais é igual a 40 reais".

É possível que boa parte dos estudantes responda X – Y = 40, quando o correto seria Y – X = 40. Um exemplo numérico pode ajudá-los a esclarecer a questão: "Dez reais a menos que 50 reais é igual a 40 reais" (50 – 10 = 40).

Atividade 2

Se **X** operários constroem um muro em **Y** horas, quantas horas serão necessárias para que o triplo do número de operários construa o mesmo muro? (Naturalmente, estamos supondo que todos os operários têm rendimento igual no desempenho da tarefa de construção.)

A resposta correta não é 3Y, porque o problema em questão envolve grandezas "inversamente proporcionais", ou seja, quanto maior o número X de operários, menor o número Y de horas necessárias para levantar o muro (o dobro de X implica a metade de Y, o triplo de X implica a terça parte de Y, e assim por diante). A resposta

Anexo E

ENCARTE PARA REPRODUÇÃO POR PARTE DO PROFESSOR QUE EMPREGAR O PRODUTO DESTA DISSERTAÇÃO

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico adaptados para as análises desta pesquisa, apresentados no Quadro 7:

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico	
Indicador	**A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:**
1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias
9	Perceber o uso da variável como incógnita
10	Perceber o uso da variável como número genérico
11	Perceber o uso da variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente

Fontes das enunciações originais e de algumas das adaptações: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) e Ursini *et al*. (2005).

Este encarte faz parte da dissertação intitulada de "Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o *Caderno do professor* de Matemática do oitavo ano". (SILVA, 2012).