PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

RONALDO DIAS FERREIRA

CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2013

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

RONALDO DIAS FERREIRA

CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

São Paulo

2013

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desse Trabalho Final por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ Local e Data: _______________

DEDICATÓRIA

À minha família que sempre esteve ao meu lado e reconhece a importância deste meu caminhar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por me iluminar e permitir a minha existência neste percurso.

À minha orientadora, professora doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, pela orientação amiga, pelo incentivo e compreensão ao longo de todo este trabalho. Que Deus a ilumine hoje e sempre.

Aos professores doutores Rogério Ferreira da Fonseca e Ubirajara Carnevale de Moraes pela atenção e valiosas contribuições no momento da qualificação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo por compartilharem conhecimentos e experiências durante as aulas que muito contribuíram para o meu crescimento e desenvolvimento profissional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A todos os meus colegas de mestrado com os quais compartilhei intensos momentos de aprendizagem e, em especial, à Adriana Santos Morgado, Helena Tavares de Souza e Regiane Silva Santos pelo convívio, amizade e solidariedade.

À amiga Regina pelas conversas e sábias palavras nas horas difíceis desta trajetória.

À Cléa, Rogério e Felipe que abriram as portas da sua residência e me acolheram, o meu muito obrigado. Que Deus seja sempre bênção constante em suas vidas.

À minha querida e inestimável professora Ariadne Denise Campos e ao meu tio João Salvador, carinhosamente chamado "Dozim". Sem vocês talvez nada disso tivesse sido possível.

À minha mãe e meus irmãos pelas inúmeras preces e ajudas.

À minha esposa Cássia, minhas filhas Kethely Emanuele e Maria Luiza por compreenderem os momentos de ausência e pelo apoio.

Aos amigos Sebastião A. Souza e Heloiza Teixeira por todo apoio e incentivo recebido.

Aos amigos Edson, Rosivaldo, Narciso, Rosina e Rômulo pelas preciosas ajudas e palavras de conforto quando mais precisava.

Também à Ilva, Said, Elder, Kennya e a todos aqueles que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste sonho.

Muito obrigado!

“Sei que meu trabalho é uma gota no oceano.

Mas sem ele, o oceano seria menor”.

(Madre Tereza de Calcutá)

FERREIRA, Ronaldo Dias. Contribuições do GeoGebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática.
Trabalho Final Mestrado Profissional. PUC, São Paulo, 2013.

RESUMO

Este trabalho está inserido na linha de pesquisa Tecnologias da Informação e Educação Matemática e tem como objetivo analisar as contribuições de um software de Geometria Dinâmica, em particular do GeoGebra, na interpretação e análise de funções afim e quadrática pelos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Para isso, formulou-se como questão de pesquisa: Quais as contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática? Primeiramente, elaborou-se uma proposta com nove atividades para serem desenvolvidas em cinco encontros presenciais de quatro horas cada, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Para elaboração e análise das atividades, apoiou-se no pressuposto teórico de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A metodologia qualitativa de pesquisa centrou-se no *Design Research* com a finalidade de aprimorar a proposta das atividades didáticas a serem aplicadas a futuros alunos ingressantes no Curso de Matemática. A pesquisa realizou-se com a utilização dos seguintes instrumentos de coleta de dados: atividades fotocopiadas, mídia lápis-papel, *software Screen capture*, entrevistas semiestruturadas gravadas em áudio e os protocolos das atividades desenvolvidas pelos alunos. Após a análise dos dados, concluiu-se que, possivelmente, a visualização propiciada pelo dinamismo do GeoGebra chamou muito a atenção dos alunos e teve uma contribuição significativa para a realização das atividades. O final do trabalho apresenta uma nova proposta de atividades aprimoradas com base nos resultados obtidos a partir das análises das atividades realizadas pelos alunos.

Palavras-Chave: Educação Matemática, estudo de funções, GeoGebra, Tecnologias aplicadas ao ensino da Matemática.

FERREIRA, Ronaldo Dias. Contribuições do GeoGebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática.
Trabalho Final Mestrado Profissional. PUC, São Paulo, 2013.

ABSTRACT

This work is part of the research line Information Technologies and Mathematics Education and aims to analyze the contributions of a Dynamic Geometry software, in particular GeoGebra in the interpretation and analysis of affine and quadratic functions by the students of a Bachelor's Degree in Mathematics. For this, a research question was formulated: What are the contributions of GeoGebra for the study of affine and quadratic functions in a Mathematics course? First, a proposal was elaborated with nine activities to be developed in five four-hour face-to-face meetings using the dynamic geometry software GeoGebra. Based on the theoretical assumption of Raymond Duval's Semiotic Representation Records we elaborated and analyzed the activities. The research qualitative methodology adopted was centered on the '*Design Research'* aimed at improving the educational activity proposal to be applied to future students entering the Mathematics Course. The research was carried out with the use of the following instruments to collect data: photocopied activities, pencil-paper media, Screen capture software, audio-recorded semi-structured interviews and protocols of the activities developed by the students. After analyzing the data, it was concluded that possibly the visualization allowed by the GeoGebra dynamism attracted much attention of the students and had a significant contribution to carrying out the activities. In the end of this work, there is a new proposal of improved activities based on the results obtained from the analysis of the activities performed by the students.

Keywords: Mathematics Education, study of functions, GeoGebra, technologies applied to mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE PROTOCOLOS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Quando eu era estudante universitário não trabalhava ainda na medida da área de educação. A minha primeira experiência como docente ocorreu numa escola estadual na Cidade de Montes Claros, durante o desenvolvimento da disciplina estágio supervisionado, obrigatória nos cursos de Licenciatura em Matemática. Como todo principiante, estava cheio de entusiasmo, timidez, mas muito confiante.

A minha primeira regência aconteceu numa turma do 1º ano do curso de Magistério, oferecido como uma opção do Ensino Médio, antigo 2º grau, no ano de 1992. O conteúdo lecionado foi função quadrática.

Lembro-me de que os alunos apresentavam uma certa dificuldade em lidar com o plano cartesiano, pares ordenados; também não interpretavam, nem entendiam bem, os traços dos gráficos. Antes de iniciar a minha regência, havia observado algumas aulas na referida turma e percebido esta dificuldade quando foi introduzido o estudo sobre funções.

Terminado meu estágio, continuei com uma monitoria voluntária na Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES, na qual eu cursava a Licenciatura em Matemática. Havia gostado da experiência de lecionar. E assim fui trabalhando com os calouros dos cursos de Matemática, Economia, Administração e Ciências Contábeis, com as disciplinas básicas, dentre as quais Matemática ou Matemática elementar. A nomenclatura destas disciplinas variava de acordo com o Projeto Político Pedagógico de cada curso, mas suas ementas contemplavam o estudo de funções. Posteriormente, os alunos dos anos seguintes dos referidos cursos utilizavam os conhecimentos adquiridos sobre funções ao estudarem os conteúdos de Cálculo.

Na década de 90, as disciplinas eram oferecidas anualmente e não em períodos semestrais como são atualmente. Era sempre necessário dar uma atenção especial para os pré-requesitos, tais como fatoração, divisão de polinômios e, especialmente, aos esboços gráficos de funções para trabalhar as noções intuitivas de limite e as interpretações dos limites laterais. Depois vinha o estudo das variações das funções por meio do estudo de derivadas e as aplicações geométricas das integrais por meio do cálculo de medida da área e volumes.

Quando me formei, fui convidado para lecionar na referida Universidade para uma pequena turma de dependência de Cálculo I no Curso de Matemática Licenciatura e assim, de fato, comecei a exercer minha carreira docente. No ano seguinte, assumi duas turmas de Cálculo I no 2º ano do curso de Matemática Licenciatura. Foi então que comecei a perceber a repetição das mesmas dificuldades apresentadas pelos alunos sobre o conteúdo de funções. Entretanto, diferentemente de atuar nas monitorias com 4 ou 5 alunos, eu estava atuando como docente de uma turma com aproximadamente 50 alunos. Neste contexto, minha preocupação com a aprendizagem dos alunos aumentou, pois minha expectativa era de que todos os alunos compreendessem os conteúdos estudados, mas não era o que estava ocorrendo. O resultado obtido não era satisfatório. Tentava explicar melhor o conteúdo, mudar a dinâmica e a metodologia das aulas e, naquele momento, ,não dispúnhamos de recursos tecnológicos que pudessem nos auxiliar na melhoria do processo de ensino e aprendizagem das disciplinas que ministrava.

Ao participar de alguns congressos, ouvia comentários de colegas de outras instituições sobre a grande dificuldade dos alunos com o conteúdo de funções e o elevado número de reprovações. Comparativamente, percebi que esta problemática não acontecia somente comigo ou na instituição que trabalhava, mas parecia ser comum nas distintas universidades. Observei que não havia normalidade alguma na grande quantidade de reprovações dos estudantes nas disciplinas introdutórias das noções matemáticas nos cursos superiores. Também notei o interesse dos professores universitários, participantes dos congressos, em buscar alternativas capazes de melhorar a aprendizagem dos alunos relativa aos conceitos matemáticos abordados no ensino superior.

Por isso, quando ingressei no Mestrado Profissional do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, me interessei em desenvolver pesquisas centradas no processo de aprendizagem dos alunos sobre os conceitos de Matemática Universitária, especialmente relacionadas com funções.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. O capítulo 1 apresenta a problemática e a revisão bibliográfica. O capítulo 2 traz a Proposta Curricular – Conteúdo Básico Comum (CBC) - que foi implantada para ser desenvolvida nas escolas públicas do Estado de Minas Gerais. Também apresenta uma breve explanação sobre o Projeto Político Pedagógico (PPP) do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES) e do perfil profissiográfico dos alunos. O capítulo 3 sintetiza a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, aporte para a construção e análise das atividades de intervenção elaboradas e implementadas neste trabalho. Já o capítulo 4 apresenta, sinteticamente, a metodologia *Design Research* na qual está centrada esta pesquisa, ressaltando sua importância e potencialidade para o desenvolvimento deste estudo. E, finalmente, o capítulo 5 contempla a apresentação e análise das atividades desenvolvidas pelos alunos com o uso do *software* GeoGebra nos encontros realizados durante o curso. Em seguida, são apresentadas as nossas considerações finais e os anexos.

CAPITULO 1 - PROBLEMÁTICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 PROBLEMÁTICA

Na literatura existente sobre a formação de professores é destacado que os professores, em sua prática, apoiam-se em saberes plurais e heterogêneos que provem de fontes diversas (TARDIF, 2011; GAUTHIER *et al*., 1998). No estudo desenvolvido por Alves (2007) está contemplada uma categorização, no sentido de Gauthier (1998), dos saberes considerados como necessários para o ensino, entre os quais ressaltamos:

> [...] Saber da experiência: esse tipo de saber se constitui como algo pessoal, próprio de cada professor que vai construindo um repertório de conhecimentos a partir de repetidas experiências. Tal saber tem um limite: o fato de que não é verificado por métodos científicos (p.27).

Na condição de formador de futuros professores de matemática da educação básica, corroboramos com Tardif (2011) no que se refere à necessidade de apoiar a pesquisa universitária nos saberes dos professores "com a finalidade de preparar um repertório de conhecimentos para a formação de professores" (p. 258).

Tomando como referência o saber que obtivemos a partir de nossas experiências profissionais no ensino universitário, destinamos as primeiras aulas das disciplinas que lecionamos na universidade, particularmente de Fundamentos da Matemática, para fazermos uma revisão dos tópicos básicos de Matemática como: fatoração, pares ordenados, plano cartesiano, localização de pontos no plano cartesiano e algumas aplicações de situações do cotidiano envolvendo os tópicos abordados. Sentimos que estava sendo difícil encontrarmos estratégias apropriadas para desenvolvermos esta percepção nos alunos. Foi então que entendemos que era necessário sairmos da sala de aula e passarmos a frequentar os laboratórios de informática e a começarmos a desenvolver atividades apoiadas na utilização de *softwares* que favorecessem a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos. Começava ali um novo desafio que requeria articular o ensino e a pesquisa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática ressaltam o uso da informática e seu papel na transformação da sociedade.

> As diferentes formas e uso da informática, as quais constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, p.43, 1998).

A necessidade de utilização dos recursos tecnológicos para auxiliar tanto o professor quanto o aluno no desenvolvimento dos conteúdos é também contemplada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, p.43, 1998) ao considerar que:

> [...] escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais pelos recursos da informática. Neste cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer.

Ao ingressarmos no Mestrado em Educação Matemática, vislumbramos a possibilidade de desenvolvermos um trabalho com a utilização dos recursos da informática, com a expectativa de contribuirmos com a possível minimização das dificuldades dos alunos quanto às interpretações e análises gráficas de funções afim e quadrática. Neste contexto, nos propusemos a desenvolver um trabalho centrado no estudo de funções com a utilização das ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo GeoGebra pelo fato do mesmo ser um *software* livre, de domínio público e tem sido amplamente utilizado nas aulas de matemática, bem como nas pesquisas desenvolvidas no contexto da Educação Matemática.

Ao abordar como a tecnologia pode auxiliar na aprendizagem da matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental destacam os aspectos dinâmicos e a visualização propiciada pelos *softwares* educativos, salientando que:

> [...] a atual tecnologia de produção de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p.46).

Depois de analisarmos e refletirmos sobre a problemática presente no processo de ensino e aprendizagem de funções no início dos cursos superiores nas distintas medida da áreas de conhecimento, apresentamos a seguinte questão de pesquisa: *Quais as contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática?*

Deste modo, o objetivo geral desta pesquisa consiste em analisar as contribuições de um *software* de Geometria Dinâmica, em particular do GeoGebra, na interpretação e análise de funções afim e quadrática pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

Este objetivo geral poderá ser atingido por meio dos seguintes objetivos específicos:

- Elaborar atividades de intervenção relacionadas com a utilização do GeoGebra no estudo das funções afim e quadrática que possibilitem a transição entre suas distintas representações, bem como o tratamento produzido em uma mesma representação.

- Avaliar a implementação das atividades e aprimorá-las visando a superação das dificuldades apresentadas pelos alunos.

- Identificar as contribuições do GeoGebra no processo de aprendizagem de funções afim e quadrática dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática.

Nossa hipótese de pesquisa pode ser enunciada da seguinte maneira:

Por se tratar de um *software* de geometria dinâmica, acreditamos que o desenvolvimento de atividades matemáticas com a utilização do GeoGebra possa minimizar as dificuldades dos alunos no que se refere à visualização, interpretação e compreensão de situações que envolvam as distintas representações de funções afim e quadrática.

Não vamos abandonar a mídia papel-lápis por considerá-la também importante no processo de aprendizagem das funções afim e quadráticas. Neste sentido, consideramos que compete ao professor promover a interação entre as tecnologias e outras metodologias para possibilitar que os alunos superem as dificuldades que geralmente ocorrem durante a implementação dos conteúdos matemáticos. Nesta mesma perspectiva, PROINFO (1997, p.3, apud Oliveira, 2006, p. 21) propõe que:

> [...] Ao lado da necessidade de uma sólida formação básica, é preciso, também, desenvolver novos hábitos intelectuais de simbolização e formalização do conhecimento, de manejo de signos e representação, além de preparar o indivíduo para uma nova gestão social do conhecimento, apoiada num modelo digital explorado de forma interativa.

O uso de computadores para o ensino de funções afim e quadrática com o auxílio de *softwares* dinâmicos, especialmente do GeoGebra, deverá possibilitar que o alunos vislumbrem a interação da matemática com as tecnologias, o que poderá ajudá-los na resolução de problemas. O manuseio contínuo das tecnologias em sala de aula dará suporte e ao mesmo tempo encorajará o futuro professor a explorar os *softwares* que existem destinados aos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Consideramos que isso poderá contribuir para que o futuro professor de matemática possa disseminar o uso das tecnologias com seus alunos em sala de aula.

Não devemos nos enganar pelo o que a tecnologia nos oferece, pois, além do seu uso não ser simples, ela não pode ser vista como a solução para as complexidades envolvidas no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Por outro lado, devemos desenvolver o senso crítico do aluno, futuro professor, quanto ao uso da tecnologia, como mostrado a seguir:

> [...] não se considere o uso de computadores e recurso computacionais como uma nova panacéia para enfrentar problemas de educação básica ou como substituto eficaz das carências em larga escala de docentes e recursos instrucionais elementares ou de outra natureza (Seminário de Informática na Educação, 1982, p. 36, apud Oliveira, 2006, p.18).

Suprir a carência dos alunos da Licenciatura em Matemática com o uso da tecnologia não é a nossa intenção. Entretanto, nos propomos a usá-la, de forma proveitosa, para propiciar ao aluno o desenvolvimento de uma visão dinâmica das funções afim e quadrática. Esperamos também contribuir com a complementação da apresentação desses conteúdos nos livros didáticos de matemática. Assim, tanto o professor quanto o aluno poderão usar a tecnologia ao seu favor no seu cotidiano e nas resoluções de problemas.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vivemos hoje no mundo da tecnologia. E quando falamos em tecnologia nos lembramos de computador, internet, vídeo-games e tantas maravilhas que estas máquinas e softwares nos proporcionam, quer no lazer, no trabalho ou nas escolas. Nas escolas as tecnologias têm exigido, segundo Santos *et al.* (2010):

> habilidades para o seu uso adequado, além de muita criatividade em sua ação pedagógica, sem se esquecer de que [..] nenhuma tecnologia, ao contrário do que afirmam alguns,destrói a antiga. Ela se integra nos usos sociais e leva à evolução das tecnologias antigas (p.88).

Assim, percebemos a importância do envolvimento dos professores com o ensino e aprendizagem dos alunos com o uso de recursos tecnológicos para que consigam utilizar de forma adequada os mesmos.

Maia (2007) elaborou uma sequência didática que permite ao aluno visualizar o gráfico como um conjunto de variáveis visuais que estão diretamente ligadas à escrita algébrica. Como suporte para sua pesquisa, a autora usou os Registros de Representação Semiótica e a Teoria das Situações Didáticas.

Relata a referida autora que a dinâmica do *software* propiciou aos alunos maior interação com os gráficos e suas respectivas fórmulas, pois eles colocavam cores diferentes para cada uma das representações e conseguiam observar o que estava acontecendo com os gráficos quando modificavam a sua escrita algébrica. A autora destaca que a animação propiciada pelo *software* foi importante para que os alunos observassem o comportamento da curva, parábola, quando mudavam o valor do coeficiente *a* da expressão algébrica. Outra variável visual percebida foi a translação vertical e horizontal.

Em suas análises referentes ao uso do computador, a autora observou que os alunos, para realização das últimas atividades, já não "chutavam" qualquer valor para os parâmetros da função e sim discutiam com os parceiros, argumentavam qual deveria ser a melhor função para que ela se encaixasse perfeitamente no desenho. Estas atividades consistiam em completar um dado desenho de acordo com uma função. A partir desse estudo, a autora concluiu que foi possível confirmar a hipótese e respondeu a questão de pesquisa: "É possível que alunos de 8ª série do Ensino Fundamental se apropriem do processo de construção gráfica da função como um conjunto de variáveis visuais que implicam em unidades significativas da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional aliado ao caráter lúdico como uma das ferramentas de aprendizagem?"

A autora relata que sem a base da Teoria dos Registros de Representação não seria possível construir uma sequência didática que permitisse observar que modificações na escrita algébrica acarretam mudanças na representação gráfica da função e vice-versa.

Schwarz (1995) desenvolveu um trabalho de pesquisa com 40 alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo. O pesquisador tinha como propósito verificar qual a concepção apresentada por alunos, ao final desta etapa, sobre função e, para isso, foi aplicado um teste com questões relativas às representações gráficas e algébricas de funções. As análises dos resultados foram baseadas no estudo de Ana Sfard que classifica o processo de transição de uma concepção operacional (noção matemática concebida em um processo calculatório) para uma concepção estrutural (concepção dada com base em objetos abstratos) e conceito matemático em três níveis:

> 1º) nível da interiozação, que é o estágio onde o processo é executado num objeto já familiar; 2º) Nível da condensação, estágio em que se muda o processo num mais compacto: 3º) nível da reificação, que é quando a pessoa dá o "salto qualitativo" repentino na forma de ver as coisas, que é um verdadeiro "insight", quando se adquire a habilidade de ver a nova "entidade" como um objeto permanente (SFARD, apud SCHWARZ, 1995, p.124).

Schwarz (1995) destaca que, segundo Sfard, no caso do estudo de função, sem que aconteça a "reificação", a concepção do aluno permanece puramente em um estágio operacional, ou seja, o aluno apresenta apenas uma noção sobre a função concebida em um processo calculatório.

Para Schwarz (1995) a maior parte dos participantes no primeiro nível apresenta concepção operacional elementar de função, ou seja, nível anterior ao da interiorização, e outros estão no nível de interiorização. O pesquisador ressalta que os alunos não estavam habituados a relacionar diferentes representações de função, pois não adquiriram habilidades de articular, sobretudo, as representações gráficas e algébricas.

Quando os alunos analisaram a função $f(x) = 2$, afirmaram que estava faltando a variável x. Fato este, que, segundo o pesquisador, indica a existência da crença de que a mudança de variável independente corresponde a uma mudança da variável dependente. O autor concluiu a sua pesquisa propondo a revisão do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função nas escolas e sugeriu que esse processo seja iniciado com base nos reais conhecimentos dos alunos.

Scano (2009) desenvolveu em seu trabalho de pesquisa "Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra" uma seqüência de ensino que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta e relacionar os coeficientes da equação da reta com o gráfico. Esse trabalho foi desenvolvido em uma escola pública do Estado São Paulo com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Acredita o autor que o GeoGebra pode contribuir para uma atividade mais rica e dinâmica, permitindo que os alunos compreendam o estudo da função afim mediante investigação e exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea. O objetivo do autor com o desenvolvimento de uma sequência de ensino mediada pelo software GeoGebra e apoiada nas Teorias das Situações Didáticas e dos Registros de Representação Semiótica foi de introduzir o estudo de função afim com alunos do 9ª ano do Ensino Fundamental e responder às seguintes perguntas:

- A sequência de ensino contribuirá para que os alunos expressem algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim?

- Após a aplicação da sequência de ensino, os alunos reconhecerão que o gráfico de uma função afim é uma reta e conseguirão relacionar os coeficientes da equação da reta com o gráfico?

Scano (2009) ressalta que as atividades trabalhadas na 1ª etapa e o conhecimento que os alunos apresentaram na realização das mesmas permitiu que fossem conduzidos a um tratamento dessas generalizações e institucionalizassem a representação algébrica de uma função. Respondendo, assim, à 1º pergunta e ao analisar as soluções apresentadas pelos alunos na realização da 4ª etapa, o autor afirma que os mesmos reconheceram que o gráfico de uma função afim é dado por uma reta de equação $y = ax + b$. E, ainda, que a maioria representou corretamente o gráfico da função afim a partir de sua representação algébrica e identificou a forma algébrica de uma função com base na representação gráfica. O que, segundo o autor, permitiu responder à segunda questão e concluir que a maioria dos alunos desta turma articula os registros de representação algébrica e gráfica no estudo da função afim.

Scano (2009) ressalta, também, que o GeoGebra apresentou grandes contribuições como recurso dinâmico e auxiliou no processo de compreensão da análise do comportamento do gráfico da função afim, no que se refere às alterações que estes sofrem quando submetidos às mudanças dos valores de seus coeficientes.

Na conclusão o autor ressalta que os objetivos foram atingidos, assim como a hipótese que foi formulada e as questões que foram levantadas respondidas a contento.

Oliveira (1997) elaborou uma sequência didática para o ensino-aprendizagem do conceito de função e tomou como hipótese que é necessário colocar o aluno numa situação a-didática na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação, assim como utilize a mudança de registros de representação para a compreensão do que é uma função. A autora pretendia responder às seguintes questões:

- A sequência didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de função?

- Após a aplicação de nossa sequência didática os alunos terão dado um salto qualitativo nas suas concepções do conceito de função?

- Quais serão os efeitos positivos e negativos da aplicação da sequência didática que construímos?

A autora constatou que os alunos encontravam dificuldades quanto à conversão dos problemas dados em língua materna para a linguagem algébrica ou simbólica e representação gráfica, confundiam equação com função e não reconheciam funções constantes, como já mostrou Schwarz (1995).

De acordo com a autora, após a análise a posteriori das sequencias didáticas, foi possível chegar à conclusão de que os objetivos foram alcançados. Segundo a autora, a sequência didática provocou um avanço nos alunos nas concepções sobre função e muitos conseguiram identificar diversas funções entre tabelas, gráficos e expressões algébricas. A autora afirma que os alunos conseguiram perceber que algumas funções podem corresponder a situações da realidade e que as mesmas podem ser representadas através de diversos registros.

Quanto aos aspectos positivos esperados pela autora, podem ser citados:

- Os alunos compreenderam que um gráfico e uma tabela podem representar uma função, independentemente da existência e/o conhecimento de representação algébrica.

- Fizeram passagem da linguagem escrita para tabela e gráfico, deste para tabela e vice-versa, fórmula para gráfico, deste para tabela e desta para fórmula. Portanto, fizeram mudanças de registro de representação de algumas funções, envolvendo "jogos de quadros" (quadro numérico, geométrico e algébrico).

- Construíram gráficos de algumas funções, ora utilizando papel quadriculado, ora sem utilizá-lo.

- Trabalharam com exemplos de relações que são funções, distinguindo o domínio do contradomínio. Verificaram, nas situações-problema, quando e como podemos unir os pontos de um gráfico e que esta decisão depende do domínio da função.

Signorelli (2007) apresenta um trabalho de pesquisa desenvolvido por meio de um ambiente virtual com funções de uma variável real com alunos do curso de Bacharelado de Ciências da Computação e Sistema de Informação de uma instituição particular da cidade de São Paulo. O objetivo da pesquisa foi de estruturar um ambiente virtual de aprendizagem escolhendo e analisando a viabilidade das ferramentas disponíveis para o ensino de funções de uma variável real.

A autora busca respostas às seguintes questões:

- Que aspectos sobre a compreensão de Funções de Uma Variável Real foram ou não privilegiados nos diferentes espaços interativos – fórum, chat, diário e email?

- Que ferramentas se mostram eficazes, ou não, neste processo?

- Que Mudanças podem ser sugeridas?

Para o desenvolvimento do trabalho de pesquisa foi usado como suporte teórico o Modelo da Estratégia Argumentativa (CASTRO e FRANT, 2002). Segundo Signorelli (2007), o termo Estratégia Argumentativa refere-se a outras formas de linguagens como oral, escrita e gestual que de maneira intencional (consciente ou não) servem para ajudar a comunicação em uma situação onde existe argumentação (CROS, 2003 apud SINGNORELLI 2007).

A metodologia utilizada foi *Design Based Research*. De acordo com Signorelli (2007), a estrutura de uma pesquisa baseada nesta metodologia é composta basicamente de uma sucessão de episódios de ensino, sendo que cada um destes inclui um ou mais estudantes, um agente pedagógico e um método de registro do que aconteceu durante a sua realização.

A autora destaca as dificuldades que os alunos apresentavam com o conteúdo da Matemática Fundamental. E acredita que estas dificuldades acabam interferindo no estudo do tópico Funções de Uma Variável Real, foco deste trabalho. Signoreli observa que os alunos encontram dificuldades em diferenciar uma curva crescente de uma positiva.

A autora acredita que os alunos relacionam a ideia de crescer com o movimento positivo. Então, baseada nessas observações, mostra a necessidade de repensar como trabalhar estes conceitos com os alunos e aponta várias sugestões: apresentar contra exemplos para discussão no fórum, discutir com os alunos as próprias definições que eles deram nas atividades, que as leituras sejam indicadas pelo professor como obrigatórias e que seja solicitada alguma atividade referente às mesmas.

Ardenghi (2008) apresenta um trabalho de pesquisa, o Estado da Arte, sobre o Ensino Aprendizagem do conceito de Função, com o objetivo de compreender as dificuldades dos alunos sobre o conceito da mesma observada nas aulas de Matemática. Este tipo de estudo escolhido foi considerado pelo autor adequado para atender o objetivo anunciado. Para realização da pesquisa, foram analisadas dissertações e teses de doutorado desenvolvidas no Brasil, além de dois artigos internacionais e um capítulo de um livro. Ardenghi apresenta um mapeamento das pesquisas realizadas, no Brasil, no período de 1970 a 2005. Na figura 1 o autor Ardenghi apresenta uma tabela com questões orientadoras por temas agrupados.

TABELA 1: Agrupamento por temas abordados

TEMÁTICA	PESQUISAS	QTD	%
Uso de Tecnologias	01-04-06-09-10-16-27-28-29-34-35-36-37-39-45	15	32,5
Didática	02-07-14-17-21-22-25-26-30-40-41-42-44-46	14	30,4
História	05-11-12-15-19	05	10,9
Concepção de Função	18-23-24-38-43	05	10,9
Contextualização/Interdis-ciplinaridade	03-20-31-32-33	05	10,9
Modelagem Matemática	13	01	2,2
Outros	08	01	2,2

Figura 1: Tabela 1 de Ardenghi
Fonte: Ardenghi (2008, p.30)

Ao analisarmos a tabela, percebemos que a maioria das dissertações usou recursos tecnológicos para o estudo de funções, seguida pela Didática que propõe questões didáticas para o ensino e aprendizagem das mesmas.

De acordo com o autor, estudos mostram dificuldades encontradas pelos alunos na interpretação gráfica e leitura, sendo esta a causa que levou pesquisadores a proporem diferentes sequências didáticas e o uso das tecnologias na busca de minimizar tais dificuldades. A utilização de *softwares* em outras pesquisas tem mostrado ser este recurso suficiente no ensino de funções no que tange a mudança de registros, atingindo os objetivos propostos nas mesmas.

Bagé (2008), em seu trabalho de pesquisa, teve como suporte metodológico *Design Experiments* que permitiu o aprimoramento da proposta de oficina sugerida que é uma característica desta metodologia, como aponta Signorelli (2007). A autora analisou cada uma das variáveis dependentes e independentes as quais fazem parte da metodologia e indicou as que foram atendidas total ou parcialmente e as contribuições destas no desenvolvimento das atividades. E como sugere a metodologia, a autora, após avaliar as variáveis, acredita ser necessário o aprimoramento do experimento inicial considerando os aspectos levantados da avaliação para uma nova proposta de uma oficina.

Reis (2011), em sua pesquisa, apresentou uma proposta dinâmica para o ensino de Função Afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio e intermediada pelo software GeoGebra. A investigação se deu em uma escola pública de São José dos Campos, com alunos da 1ª série do Ensino Médio. A pesquisa tinha por objetivo responder à seguinte questão: Como o uso reconstrutivo do erro pode auxiliar na construção do conhecimento sobre Função Afim entre estudantes do Ensino Médio a partir de uma estratégia pedagógica com o uso do Software GeoGebra? O aporte teórico usado para fundamentar a pesquisa foi a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, a coleta e análise dos dados basearam-se nos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática de Michèle Artigue. A elaboração e aplicação da sequência diagnóstica foram embasadas em documentos oficiais que tratam do processo de ensino e aprendizagem, bem como na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, nos resultados das avaliações do SARESP e na Prova Brasil dos alunos pesquisados.

O autor relata que com a proposta da sequência de atividades com o uso do software GeoGebra, os resultados obtidos na fase diagnóstica foram usados para elaborar as atividades subsequentes. Após a análise a priori e a posteriori, o autor constata que os resultados indicam contribuições significativas e que os erros cometidos pelos alunos nesta pesquisa não são erros locais. Assim, por meio de correções ou adaptações, as atividades poderão ser redesenhadas e reutilizadas tanto no diagnóstico, como na iniciação dos conceitos abordados em turmas mais avançadas.

Nesta revisão bibliográfica, percebemos a preocupação dos pesquisadores com o ensino e aprendizagem de função devido às dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem desse conteúdo.

Observamos em algumas pesquisas que a utilização de um *software* de geometria dinâmica tem contribuído para a compreensão dos alunos em relação a esse conteúdo. Em nossa pesquisa, utilizaremos o *software* de geometria dinâmica GeoGebra para trabalharmos com Funções Afim e Quadrática. O nosso trabalho associa a geometria plana, medida da áreas das figuras planas e perímetros. Abordaremos a Função Afim constante que, segundo Schwarz (1995) e Oliveira (1997), os alunos concluintes do Ensino Médio e ingressantes em um curso superior apresentam dificuldades em reconhecê-la como função.

Também nos chamou a atenção nas pesquisas da nossa revisão bibliográfica a dificuldade dos alunos em relacionar diferentes representações no estudo de função. Devido a isto, vamos utilizar os Registros de Representação Semiótica que, aliados ao *software* de geometria dinâmica, GeoGebra, pode, também, apresentar significativas contribuições como apontou os autores da nossa revisão bibliográfica.

CAPÍTULO 2 – FORMAÇÃO DOS DISCENTES E PROPOSTA CURRICULAR

Neste capítulo, apresentamos a proposta que o Curso de Matemática oferece para os alunos conforme Projeto Político Pedagógico. Também sintetizamos a Proposta Curricular – Conteúdo Básico Comum (CBC) implantada para ser desenvolvida no Estado de Minas Gerais para o Ensino Fundamental e Médio. A divisão do CBC em eixos temáticos e os conteúdos de funções, assim como os demais, são distribuídos ao longo de todos os anos do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O nosso trabalho de pesquisa está sendo desenvolvido com alunos ingressantes no primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES - que poderão ser futuros professores do Ensino Fundamental e Médio.

O Curso de Matemática é regido por um Projeto Político Pedagógico (PPP), que é um documento que regulamenta as normas e diretrizes do curso e elaborado pelo Coordenador do curso e seus pares.

De acordo com o PPP, o curso tem como objetivo geral: "Propiciar uma formação inicial de professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, mais adequada e de melhor qualidade" (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, 2009 p.14).

Um dos fundamentos básicos do curso, o metodológico, segundo o PPP, destaca que:

> [...] o curso de matemática tem sua função precípua centrada na formação de professores do Ensino Fundamental e Médio, além dos laboratórios de práticas experimentais e de ensino, que já servem ao curso oferecido na UNIMONTES, as escolas desses níveis devem servir de laboratórios de observação investigativa e de experimentação de atividade que apelem para solução de pontos dificultadores da aprendizagem dos alunos desses níveis do ensino (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, 2009, p.20).

Para dar sustentação aos alunos na sua formação, dentre os conteúdos que compõem a estrutura curricular, existem 400 horas da disciplina de prática de formação. Esta disciplina é distribuída ao longo dos oito períodos. Além disso, o PPP contempla 400 horas de estágio supervisionado que é desenvolvido a partir da segunda metade do curso. No 5º e 6º períodos, o aluno desenvolve atividades de observação de aulas, desenvolve projetos de ensino com os alunos das escolas de educação básica, participam de reuniões de conselho de classe e, juntamente com os professores orientadores do estágio, elaboram instrumentos de entrevistas que abordam a realidade das escolas na concepção dos alunos, da equipe pedagógica, da direção e demais componentes da comunidade escolar. É necessária a presença do licenciando em Matemática na escola para vivenciarem a realidade do ambiente escolar. A carga horária destinada à Prática de Ensino e ao Estágio Supervisionado é regulamentada pelo Conselho Estadual de Educação por meio da Lei 447/2002.

Para a realização e orientação das atividades do estágio supervisionado, os alunos do curso de Licenciatura em Matemática têm como parâmetros os Conteúdos Básicos Comuns (CBC) que consistem na proposta implantada pelo governo do Estado de Minas Gerais para as escolas públicas do Ensino Fundamental e Médio. Esta proposta é usada como ponto de referência também pelos professores que atuam no Ensino Fundamental e Médio das Escolas.

O governo de Minas Gerais, por meio da Secretaria de Estado da Educação (SEE), com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais, elaborou uma proposta para o Ensino Fundamental e Médio, Conteúdo Básico Comum (CBC), para ser implantada em todo o Estado de Minas Gerais. Esta se aplica aos alunos dos cursos diurnos do Ensino Fundamental e aos alunos do 1º e 2º ano do Ensino Médio. A distribuição por tópicos dos Conteúdos Básicos Comuns (CBC) foi adaptada às normas dispostas pela Resolução SEE-MG, Nº 833, de 24 de novembro de 2006.

De acordo com o CBC, esta distribuição é feita com base na seguinte trajetória: iniciando pela formação básica, passando pela etapa de aprofundamento e finalizando com conteúdos complementares (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006).

A síntese do CBC, realizada a seguir, está centrada na abordagem dos tópicos de Matemática de ensino médio, especialmente no que se refere a planos cartesianos e funções, que consistem no objeto de estudo desta pesquisa.

Segundo o CBC, o primeiro ano é de formação básica, quando são apresentados conceitos e métodos que constam de todos os temas estruturadores do CBC de Matemática. A distribuição feita permite um retorno às habilidades referentes aos tópicos do CBC do Ensino Fundamental, que são essenciais para o desenvolvimento de novas habilidades. Entretanto, este procedimento não deve ser visto como uma simples revisão, mas como uma forma de abordagem dos tópicos de maneira mais geral. No CBC os tópicos dos conteúdos são distribuídos por Eixos Temáticos (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006).

O conteúdo sobre o tema Plano Cartesiano, objeto do nosso trabalho, é abordado no Eixo Temático III do primeiro ano do Ensino Médio e volta a ser retomado no Eixo Temático VI do segundo ano do Ensino Médio. Os quadros, abaixo, indicam os tópicos e as habilidades propostas pelo CBC e seus respectivos Eixos Temáticos.

Quadro 1: Tópicos do Eixo Temático III do CBC

Eixo Temático III	
Tópicos	Habilidades
Plano cartesiano	- Localizar ponto no plano cartesiano. -Representar um conjunto de dados graficamente. - Resolver problemas que envolvam simetria no plano cartesiano. - Interpretar geometricamente a inclinação de uma reta.

Fonte: SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS (2006)

Quadro 2: Tópicos do Eixo Temático VI do CBC

Eixo Temático VI	
Tópicos	Habilidades
Plano cartesiano	-Relacionar a tangente trigonométrica com a inclinação de uma reta.

Fonte: SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS (2006)

O conteúdo de Funções Afim e Quadrática, que também é objeto de estudo deste trabalho, é abordado no Eixo Temático II do primeiro ano do Ensino Médio e encontra-se sintetizado no quadro 3.

Quadro 3: Tópicos do Eixo Temático II do CBC

Eixo Temático II	
Tópicos	Habilidades
Função do primeiro grau	- Identificar uma função linear a partir de sua representação gráfica ou algébrica. - Reconhecer funções do primeiro grau como as que têm variação constante.
Função do segundo grau	- Identificar uma função do segundo grau a partir de sua representação gráfica ou algébrica. - Resolver problemas de máximos e mínimos que envolvam uma função do segundo grau.

Fonte: SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS (2006)

No CBC de Matemática está proposto que o segundo ano do ensino médio é o ano de aprofundamento, quando são apresentadas situações com maior grau de complexidade. Apesar de alguns tópicos serem comuns aos dois anos, a diferença fundamental ocorre nas habilidades previstas para cada um. No Eixo Temático V do segundo ano do Ensino Médio são retomados os estudos das funções do primeiro grau. Os Eixos Temáticos propõem como tópico a função do primeiro grau e nas habilidades propostas abrange a Função Afim, conforme podemos verificar na quadro 4.

Quadro 4: Tópico do Eixo Temático V do CBC

Eixo Temático V	
Tópicos	Habilidades
Função do primeiro grau	- Relacionar o gráfico de uma função do primeiro grau, no plano cartesiano, com uma reta. - Identificar uma função linear a partir de sua representação gráfica ou algébrica.

Fonte: SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS (2006)

De acordo com a SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS (2006), o CBC do Ensino Médio estabelece uma dependência com o CBC do Ensino Fundamental porque recorre às habilidades desenvolvidas anteriormente em alguns tópicos para o desenvolvimento de outras habilidades para os novos conteúdos a serem estudados. Isso implica que o conteúdo seja retomado no ano seguinte com mais aprofundamento. Dessa maneira, os conteúdos de Matemática do Ensino Médio devem ser trabalhados sucintamente no primeiro ano e retomados com mais profundidade no segundo ano. No terceiro ano devem ser implementadas as atividades complementares e, segundo o desenvolvimento da turma, abordados novos conteúdos. Para que o CBC tenha uma efetiva implantação, é necessário que os professores conheçam a proposta para os dois níveis como um todo.

O CBC contempla as orientações metodológicas, a resolução de problemas e o processo de avaliação na perspectiva de orientar o professor para o desenvolvimento eficaz do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A orientação metodológica contida no CBC deve contribuir com um processo ativo de aprendizagem matemática dos alunos e com o desenvolvimento de sua autonomia. Neste sentido, declara que:

> As metodologias utilizadas devem priorizar um papel ativo do aluno, estimulando a leitura de textos matemáticos, os estudos dirigindo os trabalhos em grupo e os recursos didáticos de caráter lúdico como jogos, exposições, murais de problemas e curiosidades matemáticas e, quando disponíveis, recursos computacionais para uso em geometria dinâmica e experimentos de cálculo (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006, p.15).

Em consonância com as metodologias propostas pelo CBC e para a realização de nosso trabalho de pesquisa, serão elaboradas atividades de intervenção - relacionadas com plano cartesiano, Função Afim e Função Quadrática - que deverão ser implementadas durante a realização das aulas práticas no laboratório de informática. Estas aulas serão desenvolvidas apoiadas na utilização de recurso computacional, especialmente do GeoGebra que é um *software* de geometria dinâmica.

O CBC ressalta também a resolução de problemas como uma metodologia a ser utilizada no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo o mesmo, um dos principais objetivos do ensino da Matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver habilidades para a solução de problemas. Estes problemas podem advir de situações concretas observáveis ("modelagem") ou não. Nesse sentido, caracteriza "situação de problemas" por problemas que envolvem o processo de tradução do enunciado, seja contextualizado ou não em linguagem matemática, e a tomada de decisão sobre quais ferramentas matemáticas serão usadas em sua resolução ("modelagem"). Para a resolução de problemas, segundo o CBC, é preciso uma boa capacidade de usar a linguagem matemática para interpretar questões formuladas verbalmente. Por outro lado, os problemas devem ser interessantes e despertar a curiosidade dos alunos. Podem surgir dentro do próprio contexto matemático quando novas situações forem exploradas e o conhecimento aprofundado, num exercício contínuo de imaginação.

Para o conteúdo de funções, o CBC sugere algumas atividades para orientação do professor no desenvolvimento das suas aulas, tais como:

> a) Sejam $f(x) = 3$ e a um número real positivo. Escreva a expressão para a função $g(a)$ que expressa a medida da área da figura plana compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo OX, o eixo OY e a reta vertical $x = a$.
> b) Construa mais exemplos e generalize o que pode ser observado.
> c) Se $f(x) = c$ representa a velocidade de uma partícula que se move com velocidade constante, qual a interpretação pode ser dada para a função $g(a)$ construída acima?
> d) Considere a função $f(x) = 2x$ e a um número real positivo. Usando a fórmula para a medida da área de um triângulo, escreva a expressão para a função $g(a)$ que expressa a medida da área da figura plana compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo OX, o eixo OY e a reta $x = a$. Observe que $g(a)$ é uma função quadrática.
> e) Construa mais exemplos e generalize o que pode ser observado e, usando a fórmula para a medida da área do trapézio, proceda como acima considerando a função f. Compare o que você fez com o estudo do movimento uniformemente acelerado.
> (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006, p.64).

As atividades propostas no nosso trabalho também atendem às sugestões do CBC no que se refere à proposição de situações intramatemáticas, relacionando os conteúdos de Geometria Euclidiana Plana com o estudo de funções. Corroborando com o proposto pelo CBC, buscaremos aplicar as características da Matemática que consistem na:

> [...] Investigação e compreensão: capacidade de enfrentar desafios e resoluções de situações-problema, utilizando-se de conceitos e procedimentos peculiares (experimentação, abstração, modelagem) (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006, p.32).

Segundo o CBC, o constante desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas envolve as seguintes estratégias, que devem tornar-se hábitos para o aluno e seu uso deve ser estimulado pelo professor, tais como:

> - Usar figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva.
> - Expressar oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras, propriedades matemáticas, atribuindo significado aos conceitos abstratos e formulando por meio do uso da linguagem simbólica questões expressas verbalmente (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS, 2006, p.43).

Estas estratégias propostas pelo CBC serão contempladas nas atividades de intervenção desta pesquisa. Para isso, utilizaremos os aspectos dinâmicos do GeoGebra tanto para a construção e interpretação de figura de medida da áreas planas como função, quanto para expressá-las algebricamente por meio de uma lei de formação. As referidas atividades deverão contribuir com a produção de significados para os conceitos abstratos e com o enunciado de propriedades pelos alunos.

Quanto à avaliação, observamos que é um processo integrante do CBC. O professor - ao planejar, orientar, observar, investigar, organizar e registrar as atividades em sala de aula - estrutura um conjunto de parâmetros que o habilita a fazer uma avaliação contínua de todo o processo de aprendizagem dos alunos. Neste processo estão envolvidos professores, alunos, material e a metodologia utilizada. Isso permite ao professor reformular a cada momento suas práticas pedagógicas e melhor adaptá-las às condições de sala de aula, o que poderá ser realizado por meio do *redesign* das atividades.

No caso das competências pedagógicas, cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem em relação à compreensão dos conhecimentos, por exemplo, os raciocínios e análises desenvolvidas e o domínio de certas estratégicas.

Essas informações podem orientar o professor na elaboração de ações pedagógicas mais diversificadas objetivando atender aos diferentes ritmos de aprendizagem, trabalhar diferentes níveis de aprofundamento e complexidade ao mesmo tempo e a orientar os alunos quanto aos currículos diferenciados.

Como avaliação das atividades de intervenção implementadas por meio do nosso trabalho, optamos por observarmos o desenvolvimento das mesmas pelos alunos no decorrer do curso e as dificuldades apresentadas por eles para resolvê-las. No que se refere à analise *a posteriori* das atividades realizadas por escrito pelos alunos, conjecturamos que as informações obtidas possibilitarão identificar os significados atribuídos pelos alunos para os conceitos estudados e às representações utilizadas. Por outro lado, a falta de compreensão relacionada a alguns conceitos, propriedades abordadas, à conversão entre as distintas representações ou ao tratamento realizado no contexto de uma representação específica (no sentido atribuído pela Teoria do Registro de Representações Semióticas de Raymond Duval), deverá permitir que as atividades possam ser modificadas, aprimoradas e, se preciso, reaplicadas. Isso implica na realização de um *redesign*, conforme sugere a metodologia *Design Research* que dá suporte a esta pesquisa.

Ao fazermos uma releitura do CBC de Matemática, percebemos que os conteúdos de funções são distribuídos em "doses homeopáticas", sugerindo que sejam trabalhados ao longo de todo o Ensino Médio para que o aluno se familiarize com os mesmos.

CAPÍTULO 3 - APORTE TEÓRICO: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Em Matemática, os objetos de estudo não são diretamente acessíveis à percepção e sua comunicação se estabelece por meio de diferentes representações. Para sua apreensão, é necessário o uso de diferentes representações.

Neste capítulo, apresentamos aspectos da Teoria de Registros de Representação Semiótica, com ênfase nos trabalhos de Raymond Duval e que exerce papel importante neste trabalho.

As pesquisas por nós analisadas de Schwarz (1995), Oliveira (1997), Maia (2007) e Scano (2009) mostraram a importância da mudança de registros para o reconhecimento do mesmo objeto matemático, no caso funções. Em razão disto, escolhemos para dar suporte e sustentação à nossa pesquisa os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que tratam da aquisição de conhecimentos matemáticos.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica são de fundamental importância no arcabouço teórico dos trabalhos de Duval, em que ele toma como referência os seguintes colaboradores: a) Peirce, para analisar o papel das representações centrando uma forte teorização geral sobre os signos; b) Saussure, para o qual o signo é uma entidade linguística de duas faces: uma acústica e a outra conceitual; c) Frege, para o qual o discurso tem forte amparo na logicidade da linguagem e para a Matemática se acirra a necessidade de certo progresso rigoroso nas formas em que o matemático se organiza para a produção de sentidos.

Na perspectiva de Duval (2003, p.8), uma análise do conhecimento matemático da sala de aula é, essencialmente, uma análise do sistema de produção dos Registros de Representação Semiótica referentes a este conhecimento. Para ele interessa, portanto, estudar o que a semiótica permite dizer acerca da representação do pensamento, com especificidade no pensamento matemático. Assim, o autor preocupa-se com a maneira de produção de sentidos por meio de uma relação entre a imagem acústica e possíveis representações permitidas para os objetos matemáticos e como os signos exercem papéis essenciais para a estabilização de certos sentidos matemáticos.

Aqui vale a pena uma digressão. A imagem acústica de elefante, por exemplo, tem certa possibilidade de estabilização do sentido mais do que a imagem acústica de 200: no primeiro exemplo, o fato de se ter a possibilidade de realização de uma representação do elefante a partir de um objeto imagético pode diminuir a complexidade da estabilização do signo na produção do sentido deste signo, ao contrário do que se passa com o segundo exemplo. Não há um objeto no raciocínio campo perceptivo que faça uma identificação do signo; claramente o número 200 poderia ser escrito como CC, em algarismos romanos, e ainda assim a segunda representação pouco, ou nada, ajudaria. Em Matemática a complexidade da produção de sentido se constitui de uma ordem em que o objeto tem de ser originariamente elaborado na mente.

Nos trabalhos de Raymond Duval (2003, p.8) sobre os Registros de Representação Semiótica ele tem posto de manifesto alguns questionamentos importantes:

-Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática?

-Qual a natureza dessas dificuldades?

-Onde elas se encontram?

Estas questões passaram a ter uma amplitude e uma importância particular com a recente exigência de uma maior formação matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentar um ambiente informático da atual sociedade tecnológica, assim denominada.

Para Duval (2003), para responder a essas questões, não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. Para ele é necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e visualização.

Para o autor, a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Na matemática a atividade cognitiva requerida é diferente em relação às medida da áreas do conhecimento em que é possível produzir experiências em que exemplos imagéticos de objetos podem ser visualizados no campo perceptivo ou observáveis com a ajuda de instrumentos. A matemática lida com uma produção de sentidos em que os objetos estão para uma ordem de domínios abstratos.

Para Duval (2003, p.13):

> a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurado nos conceitos – pois não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo – mas nas duas características seguintes:
> A importância primordial das representações semióticas: a história do desenvolvimento da matemática foi um fator marcante para o desenvolvimento das representações semióticas sendo uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. O fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não serem diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, o acesso aos números está ligado a utilização de representação que os permite designar. A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática – além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a de linguagem corrente.

Para Duval (2003, p.14), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois Registros de Representação Semiótica ao mesmo tempo, ou na possibilidade de troca, a todo momento, de registros de representação.

Duval (2003) utiliza o termo “registro” de representação para designar os diferentes tipos de representações semióticas usadas na matemática conforme quadro abaixo.

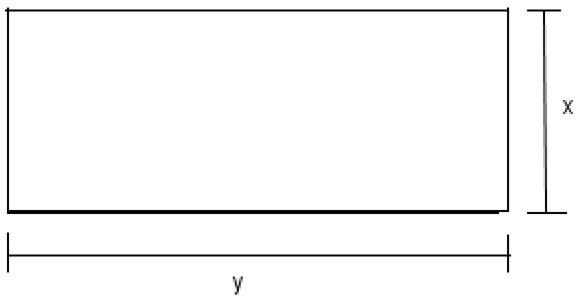
Quadro 5: Registros de representação semiótica

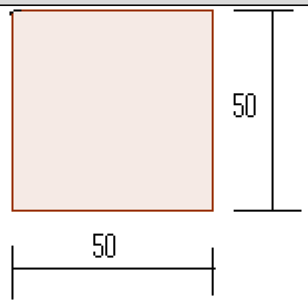
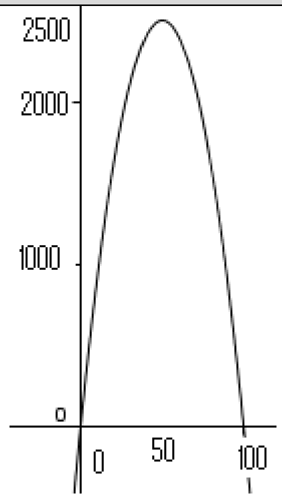
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritimizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). -Argumentação a partir de observações, de crenças (...) . - Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2, 3). - Apreensão operatória e não somente perceptiva. - Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escrita - Numéricas (binária, decimal, fracionária(...). - Algébricas. -Simbólicas (línguas informais), cálculo.	Gráficos cartesianos. - Mudanças de sistema de coordenadas. -Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14)

Vamos exemplificar, no quadro a seguir, com uma atividade no tocante do que seja a “originalidade de uma atividade matemática”.

Quadro 6: a conversão da língua natural para o Registro algébrico/Simbólico. Os tratamentos no Registro algébricos e a conversão para o Registro gráfico

Registro língua natural	Registro simbólico/algébrico
Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com tela de alambrado. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a medida da área seja a maior possível. Mostre tal resultado gráficamente.	 $P = 200$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
Considerando a figura acima o perímetro P é dado pela soma dos lados.	$P = 2x + 2y$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
Expressar uma variável em função da outra.	$P = 200$ $2x + 2y = 200$ $y = 100 - x$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
A medida da área do retângulo é dada pelo produto dos lados.	$A = xy$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
A medida da área do terreno é dada por $x(100 - x)$.	$A = x(100 - x)$ $A = 100x - x^2$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
Podemos expressar a medida da área A como uma função quadrática.	$A = f(x)$ $f(x) = 100x - x^2$
Registro língua natural	**Registro algébrico**
A medida da área assume o valor máximo no vértice da parábola.	$x_v = \frac{-b}{2a}$
Registro língua natural	**Registro algébrico**

Calculamos o valor da largura do retângulo.	$x_v = \frac{-100}{2(-1)}$ $x_v = 50$
Registro língua natural	Registro algébrico
Calculamos o valor do comprimento do retângulo.	$y = 100 - x$ $y = 100 - 50$ $y = 50$
Registro língua natural	Registro simbólico
A medida da área máxima a ser cercada é uma região quadrada cujos lados medem 50 m.	
Registro algébrico	Registro gráfico
$f(x) = 100x - x^2$	

Fonte: O Autor (2013).

Assim fica evidente e concordamos com Duval que para resolver um problema torna-se necessária uma sucessiva troca de registros e também os tratamentos dentro do próprio registro.

Sobre a mudança de registros, Duval (2003, p.15) tece a seguinte conjectura: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, ou seja, para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representação semiótica: os tratamentos e as conversões. Veja o seguinte quadro.

Quadro 7: Mudança de Registros de Representação Semiótica

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica			
	Permanecendo no mesmo sistema: **Tratamento**		Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: **Conversão**
	Quase sempre é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.		Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isto se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: Duval (2003, p.15)

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro. Por exemplo:

- O produto notável $(a+b)^2$ é um tratamento quando o desenvolvemos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pois houve uma transformação dentro de um mesmo sistema de escrita, que é um Registro Monofuncional de Representação Discursiva na forma algébrica.

- Completar uma figura (como segue) segundo os critérios de conexidade e simetria é um Registro multifuncional de Representação não Discursiva.

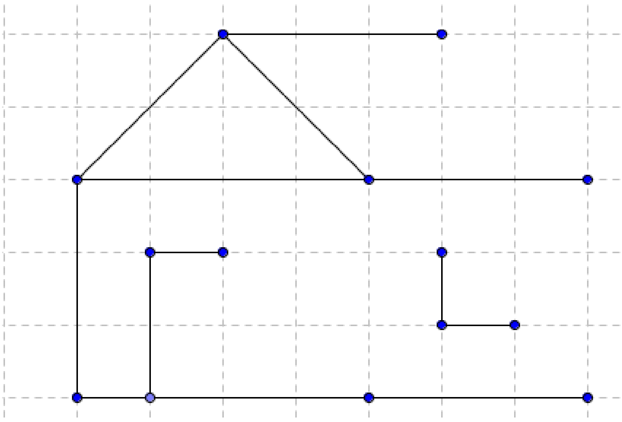


Figura 2: Exemplo de tratamento
Fonte: O Autor (2013)

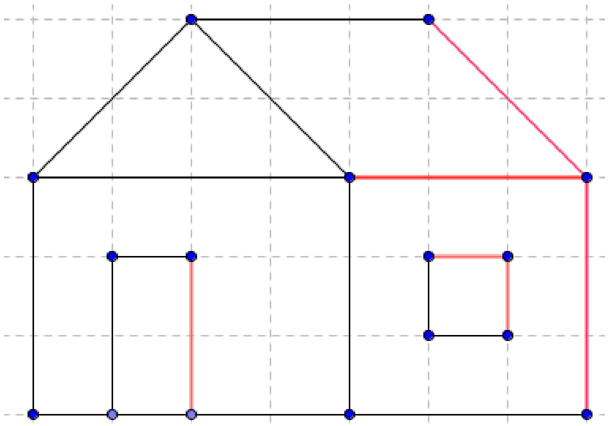


Figura 3:Transformação de tratamento dentro de um mesmo registro.
Fonte: O Autor (2013)

O tratamento segundo Duval (2003) é o tipo de transformação que mais chama a atenção porque passa por um processo de justificativa. Poderemos ilustrar como exemplo os teoremas que são compostos por hipótese, que é um conjunto de afirmações para poder iniciar uma demonstração e a tese, que é aquilo que deverá ser provado. Do ponto de vista pedagógico, como afirma Duval (2003, p.15), os professores procuram sempre que possível lançar mão de estratégias para escolher o melhor registro de representação para a compreensão dos alunos.

Poderíamos citar também o teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, que tem várias demonstrações dadas no tratamento algébrico. Ou ainda por atividades manipulativas, usando o tangran.

Conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados. Por exemplo:

- A função f dada por $f(x) = 2x$ (forma algébrica) e a sua representação gráfica utilizando o GeoGebra.

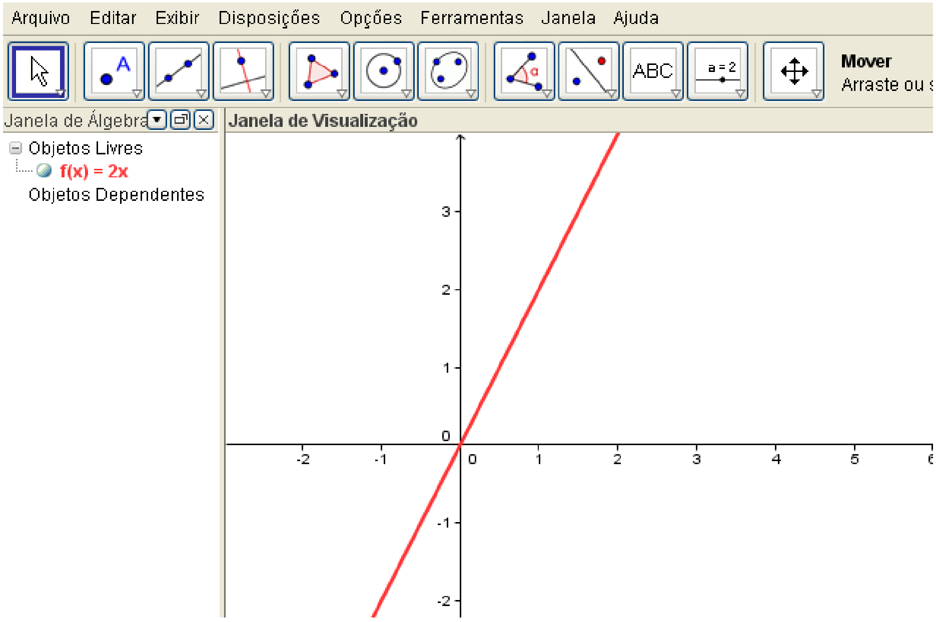


Figura 4: Exemplo de Conversão
Fonte: O Autor (2013)

A conversão é uma transformação de um Registro em outro, por exemplo, da representação algébrica (ponto de partida) para a representação gráfica (ponto de chegada) ou vice-versa, conservando as propriedades do objeto.

Em nossa pesquisa o objeto matemático são as Funções Afim e Quadrática e apresentamos no Quadro 6 exemplos de conversões. O *software* utilizado será o GeoGebra, pois o mesmo apresenta duas telas simultaneamente e possibilita a percepção dessas transformações algébrica/gráfica e gráfica/algébrica. O tratamento é utilizado para demonstrar a lei de formação da referida função.

A conversão é analisada sob dois pontos de vista: o matemático e o cognitivo. Do ponto de vista matemático, a conversão, segundo Duval, não faz parte dos processos matemáticos de justificação ou de prova, o que faz com que a conversão passe despercebida como se tratasse de uma atividade lateral evidente e previa a "verdadeira" atividade matemática. Aqui entendemos como "verdadeira" atividade matemática aquelas que envolvem demonstrações com tratamentos algébricos, levantamento de hipóteses e teses, etc.

Do ponto de vista cognitivo, a conversão aparece como uma atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Duval (2003) explica que geralmente considera-se a conversão de representações como uma operação simples e local, ou seja, seria reduzida a uma “codificação”. Por exemplo, passar de uma equação a uma representação gráfica seria aplicar uma regra na qual um ponto está associado a um par de números num plano quadriculado por dois eixos graduados (plano cartesiano). O autor considera ainda a passagem de uma expressão escrita em língua natural – como “o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa”- a escrita simbólica – “ $x < y$ ” - corresponderia a uma codificação.

O autor reporta a estes exemplos para inferir que a visão de que uma conversão consiste em “uma operação simples e local é enganadora e superficial não somente nos fatos concernentes à aprendizagem (DUVAL, 2003), como também de um ponto de vista teórico”, uma vez que a codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas. Segundo ele, para que haja uma apreensão global e qualitativa é necessário ir além para que se possa extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos.

Para o autor, a conversão entre gráficos e equações é suposto que se leve em conta as variáveis visuais do gráfico com os valores escalares das equações.

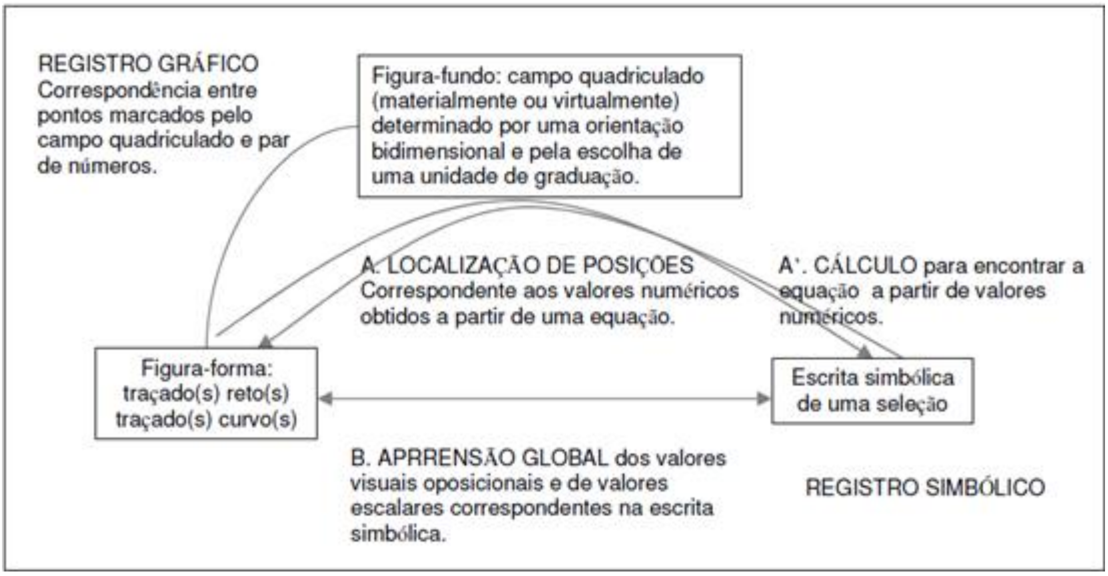


Figura 5: Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas.
Fonte: Duval (2003, p. 18)

O autor explica que essa organização permite três tipos de tratamento e dois tipos de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A` permitem somente uma leitura pontual dos gráficos e somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa.

O autor afirma que a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação interseção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes, positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1, etc.). Ele evidencia a dificuldade dos alunos em passarem do registro algébrico para o gráfico e vice-versa.

Duval (2003) ressalta que a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro, pois passar de um registro de representação a outro não é somente mudar o modo de tratamento, mas também saber explicar propriedades de um mesmo objeto. E isso está intimamente ligado ao fato de dispor ao menos de dois registros diferentes.

Como foi citado anteriormente, os Registros de Representação Semiótica têm servido de base para várias pesquisas concernentes à aquisição do conhecimento matemático e à organização de situações de aprendizagem destes conhecimentos e será a base para a nossa pesquisa.

CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos a metodologia *Design Research* que é usada como suporte à nossa pesquisa e os procedimentos metodológicos. Abordaremos o projeto do qual emergiu a nossa pesquisa, o público alvo e a coleta de dados. Faremos também uma apresentação das ferramentas do GeoGebra que serão utilizadas no desenvolvimento das atividades.

4.1. O *Design experiments* como metodologia da pesquisa

"*Design experiments*" ou "*Design research*" é a metodologia utilizada na nossa pesquisa. Segundo Collins (2004), este termo foi introduzido na década de 1990, mais precisamente em 1992, por Ann Brown e Allan Collins, quando havia um movimento para desenvolver uma nova metodologia para a realização de intervenção.

De acordo com Collins (2004), a pesquisa de *design* foi desenvolvida para abordar várias questões centrais para o estudo da aprendizagem, tais como:

> A necessidade de abordar as questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem em contexto;
> A necessidade de abordagem para o estudo da aprendizagem de fenômenos no mundo real em vez de laboratório;
> A necessidade de ir além das medidas estreitas de aprendizagem;
> A necessidade de obter resultados de pesquisa de avaliação formativa.

Umas das características da pesquisa *design experiments* é desenvolver uma forma de efetuar uma investigação formativa para testes e refinar modelos educacionais baseados em princípios teóricos derivados de pesquisa prévia (COLLINS, 2004).

O *Design experiments* pode ser entendido como progressivo refinamento da investigação que consiste em aplicar em uma primeira versão de um projeto para que seja possível diagnosticar e analisar como ocorre e, posteriormente, seja revisto de maneira constante com base nas experiências colhidas, até que todos os obstáculos sejam trabalhados.

O *Design* não se destina somente ao aperfeiçoamento da prática. Ele também deve abordar teorias, perguntas e questões para que seja eficaz. E assim possa atingir os duplos objetivos de refinamento em relação à teoria e à prática.

A metodologia *Design* é utilizada em diferentes contextos, dependendo da função ou foco a que se aplica. Pode ocorrer entre professores, pesquisadores e grupos restritos de alunos ou ainda abordar classes mais numerosas (comunidade de aprendizes), como experimento para dar suporte ao desenvolvimento de uma comunidade profissional.

Uma das características do *Design* é a inversão de papéis dos professores pesquisadores e estudantes, pois todos são colaboradores do processo.

De acordo com Doerr e Wood (2006, p. 114), professores, salas de aula e escolas, em conjuntos com currículos, tecnologias e instrumentos de aprendizagem, precisam ser pensados como sistemas que interagem de maneira complexa.

Se não bastasse o reconhecimento da complexidade, a criação de práticas efetivas continua sendo um desafio. A investigação do ensino como se ele estivesse desconectado desta complexidade provavelmente levaria a investigação de pouca relevância prática.

Segundo Doerr e Wood (2006):

> O desafio com que nos defrontamos enquanto investigadores é desenhar pesquisas que levem em conta a multiplicidade de fatores que interagem influenciando as práticas pedagógicas e que, ao mesmo tempo, apoiem mudanças nessas práticas e contribuam para o desenvolvimento de um repertório comum de conhecimento profissional para o ensino da matemática (p.114).

Existem alguns problemas práticos na pesquisa sobre ensino, conforme pontuam Doerr e Wood (2006):

> - O primeiro conjunto de problemas está associado ao desenho da pesquisa, à metodologia e aos quadros teóricos analíticos produzidos empiricamente para sumarizar os resultados.
> - Um segundo conjunto prático, relacionado à pesquisa em ensino, é caracterizado pelas dificuldades com a escala e o escopo.
> - Uma terceira medida da área problemática localiza-se no desenvolvimento de intervenções para o aprimoramento da pedagogia, alinhada a visões atuais sobre a aprendizagem.

De acordo com Doerr e Wood (2006), para focalizar esses problemas com as pesquisas em ensino, estes são voltados para uma categoria mais ampla que é o *design experiments*.

Eles apontam dois princípios norteadores do *design* experiments. O primeiro é a intenção explícita de desenvolver um processo ou um produto aprimorado visando algum propósito dentro de um sistema necessariamente imerso em negociações e limitações. No caso da aprendizagem docente, os processos e os produtos que buscamos aprimorar são as interpretações, modo de pensar que os professores utilizam para dar sentido a seu ensino e os artefatos e instrumentos que são utilizados em seu trabalho.

A compreensão das negociações e limitações que os professores encontram em sua prática não deve ser vista como regras universais e sim como indicadores para compreender as variações das especificidades da prática. Esses indicadores não devem apenas descrever as variações da prática, mas também descrever o sentido sobre como os professores poderiam efetivamente responder a essas variações dentro dos seus próprios cenários. O segundo princípio requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis. Isto quer dizer que a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação dos dados em todos os níveis devem gerar e aprimorar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais úteis a professores, pesquisadores e outros profissionais.

O grande desafio na aplicação de uma pesquisa está em articular as interpretações em cada nível de modo que sejam testadas, revisadas e progressivamente compartilhadas e generalizadas a novos participantes e novos contextos.

Lesh e Kelly (2000, apud Doerr e Wood, 2006) descreveram os níveis de interação, interpretação e análise.

TABELA 1 - Pesquisa-Projeto: o experimento de ensino multicamadas

Nível 3 Pesquisadores	Com ajuda de estudantes e pesquisadores, os pesquisadores desenvolvem modelos que dão sentido à aprendizagem de alunos e professores e reinterpretam e estendem suas teorias.
Nível 2 Professores	Os professores trabalham com colegas e pesquisadores para escrever, pesquisar e dar sentido à aprendizagem do aluno.
Nível 1 Estudantes	Equipes de estudantes resolvem, com ajuda de professores, atividades matemáticas por meio das quais eles constroem, revisam e refinam sua interpretação de uma situação- problema.

Fonte: Borba (2010, p.118)

Para Lesh e Kelly (2000, apud Doerr e Wood, 2006), o maior desafio encontrado no projeto-pesquisa está centrado nas dificuldades em criar as atividades de intervenções para professores. A característica essencial destas tarefas é a capacidade de extrair ou revelar os modelos correntes do pensamento docente ou suas interpretações, de maneira que possam ser testados, revisados e aprimorados.

Collins (2004) mostra como se deve proceder para implementar um *design*. De acordo com este autor, a implementação de um projeto de educação é diferente. É importante identificar os elementos críticos do *design* e como eles combinam entre si.

É necessário um perfil para cada ampliação, como a forma que cada um dos elementos críticos foram implementados e como estes elementos trabalham juntos em direção aos objetivos do *design*. Afirma também que o objetivo do *design* é o de melhorar a forma como o experimento funciona na prática. Diante disso, é importante que os pesquisadores analisem qual elemento que não está funcionando, fazer a correção e investigar por que isso ocorre.

Diante do exposto, verificamos que o sucesso ou o fracasso de uma inovação não podem ser avaliados em termos de quantidade, ou seja, de quanto os alunos aprenderam sobre alguma medida de critério. Para avaliar diferentes variáveis dependentes e independentes é necessário utilizar diversificadas técnicas de avaliação como: pré e pós-testes, entrevistas, notas de observações de aulas. Para o *Design Experiments* as avaliações qualitativas e quantitativas são peças essenciais para a referida metodologia.

Para esta metodologia é importante pelo menos três tipos de variáveis dependentes:

- Variáveis de clima, como cooperação, comprometimento, o grau de envolvimento dos alunos na aprendizagem na sala de aula, o grau de cooperação dos alunos em sala de aula e o grau de esforço que os alunos estão fazendo para entender o conteúdo do currículo.

- Variáveis de aprendizagem, como conteúdos, conhecimentos, habilidades, atitudes, estratégias metacognitivas e estratégia de aprendizagem são melhores avaliadas pela cobrança do pré e pós-testes, respostas ou perguntas curtas, entrevistas orais, instrumentos desenvolvidos por Dweck (1986, apud Collins, 2004), para avaliar se existem mudanças nas crenças dos alunos refletindo em movimento de metas de desempenho para a aprendizagem.

- Variáveis sistemáticas, como sustentabilidade, alteração, facilidade de adoção e custos. Estas variáveis podem ser avaliadas por entrevistas estruturadas e pesquisas.

Para Collins (2004), na avaliação de qualquer projeto há um grande número de variáveis independentes que podem afetar o sucesso do projeto em prática. Existem variáveis que podem determinar o sucesso de uma inovação, que são as variáveis contextuais. São elas:

- Ambiente: o ambiente é uma variável crítica, como quaisquer outros experimentos de ensino, podendo variar em residências, locais de trabalho, museus, escolas ou colégios particulares, ou públicas, escolas rurais, etc., como amplamente aplicável uma inovação só pode ser determinada após ser aplicada diversas vezes em ambientes diferentes.

- Natureza dos Educando: é uma variável crítica sobre os alunos que contempla idade, estado socioeconômico, taxa de rotatividade, taxa de participação; as inovações podem trabalhar com alunos fracos e superdotados; é importante saber para qual tipo de aluno o *design* é destinado.

- Desenvolvimento profissional: para um bom desempenho de um experimento os professores precisam de um desenvolvimento profissional como encontros reflexivos com colegas, seminários, cursos etc.; é importante ressaltar estes aspectos para o sucesso de uma inovação.

- Objetivos e elementos de desenho: os elementos críticos de um projeto podem ser materiais, as atividades, um conjunto de princípios ou alguma combinação entre estas variáveis; é importante esclarecer os objetivos do projeto e como os elementos interligam entre si para atingir a meta proposta.

Para Collins (2004) não existe uma estrutura para a introdução e evolução de uma concepção que precisa ser caracterizado em analisar qualquer execução. Collins (2004) afirma que existe uma teia de inter-relações entre variáveis independentes e dependentes. A divisão entre as variáveis dependentes e independentes vai depender dos resultados nos quais se está interessado. Adverte Collins (2004) que mudanças em qualquer variável podem ter efeito sobre as outras variáveis.

A linguagem das variáveis dependentes e independentes destina-se apenas para captar e mostrar a diferença entre os resultados, identificando qual a variável que pode alterar o processo.

Para Collins (2004) quando mudanças forem feitas em uma definição, as razões para as alterações devem ser específicas juntamente com os efeitos da mudança. Isto é necessário por que vai descrever a forma como os elementos críticos do resenhar vai conseguir atingir os objetivos do projeto original ou como os objetivos o mudaram.

Utilizamos o *design experiments* como metodologia principal da nossa pesquisa. A coleta de dados foi baseada numa parte da disciplina Fundamentos da Matemática desenvolvida por meio do Projeto intitulado “Implementação de Novas Tecnologias na Produção de Materiais Didáticos Para o Ensino da Matemática nos Cursos de Graduação da UNIMONTES”, integrante da Proposta Institucional que será sintetizada a seguir.

4.2. Síntese do Projeto desenvolvido na UNIMONTES

A UNIMONTES, por meio da Pró-Reitoria de Ensino, desenvolveu a Proposta Institucional "Uso e Disseminação das Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino Superior Presencial da UNIMONTES" (Proposta Institucional TIC's). Esta Proposta Institucional foi fomentada pela CAPES e sua implementação, inicialmente prevista para um ano, foi prorrogada por mais 12 meses. Segundo descrito na referida proposta:

> Aliada às ações e princípios norteadores previstos no Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI) da UNIMONTES, a presente proposta caracteriza-se pelo alto grau de inovação, pela notória relevância nos diversos aspectos da sociedade e pela possibilidade de reafirmar a determinação da UNIMONTES de ser instrumento de transformação da realidade, o que inclui formar profissionais de qualidade que sejam capazes de reconhecer nas TIC's as possibilidades de aprender a aprender (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, p.5, 2010).

A principal diretriz da Proposta Institucional consiste em "estimular os professores dos cursos presenciais oferecendo recursos tecnológicos e humanos que os apóiem para que a aprendizagem efetiva seja algo almejado e alcançado por alunos e professores" (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, p. 5, 2010).

O objetivo geral da Proposta Institucional TIC's consiste em "realizar ações que visem o uso e disseminação das TIC's no âmbito da educação presencial oferecida nos cursos de graduação da UNIMONTES". Dentre os principais objetivos específicos, ressaltamos:

> Despertar na comunidade acadêmica os benefícios advindos do uso das tecnologias de informação e comunicação;
> Contribuir com a qualidade do ensino superior de várias formas, incluindo o oferecimento de cursos de nivelamento e materiais específicos da educação matemática;
> Conceber e refinar o processo de inserção da UNIMONTES no contexto das Universidades que apoiam e fortalecem o uso das TIC's na graduação presencial (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, p. 8, 2010).

A proposta Institucional foi composta por sete projetos, dentre eles o projeto intitulado "Implementação de Novas Tecnologias na Produção de Materiais Didáticos para o Ensino da Matemática nos Cursos de Graduação da UNIMONTES". Esse projeto propõe a elaboração de materiais didáticos com a utilização de tecnologias aplicadas ao ensino da Matemática, assim como a realização de cursos presenciais e a distância de cinco disciplinas: Geometria Euclidiana Plana, Geometria Analítica, Educação Matemática, Tópicos de Cálculo e Fundamentos da Matemática.

Nossa pesquisa está centrada no estudo de Funções Afim e Quadrática desenvolvido por meio do curso de Fundamentos da Matemática. Toda a equipe de professores do Projeto consentiu a utilização dos dados coletados por meio da realização do referido curso, conforme declaração, nos anexos, do coordenador do projeto, Professor Dr. Edson Crisostomo dos Santos. O objetivo geral desse Projeto consiste em:

> Contribuir com a produção de materiais didáticos, com o uso das TIC's, como estratégias de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, integrando as modalidades do ensino presencial e a distância nos distintos cursos de graduação desenvolvidos no âmbito da UNIMONTES, que contemplam disciplinas específicas da medida da área de Matemática em sua estrutura curricular [...] (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, p. 46, 2010).

As atividades implementadas em cada curso, particularmente no curso Fundamentos da Matemática, deverão contribuir com a discussão e análise da problemática específica inerente ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nos cursos de graduação presenciais e a distância da UNIMONTES, em consonância com a proposta educacional da Universidade Aberta do Brasil - UAB.

A Universidade Aberta do Brasil é um programa implantado pelo Ministério da Educação e realizado por meio do Centro de Educação a Distância – CEAD/UNIMONTES. O CEAD foi criado e implantado para acolher os cursos e programas oferecidos pela UNIMONTES na modalidade a Distância por meio da Plataforma de aprendizagem VIRTUALMONTES que é usada no contexto da UAB. Por meio desta plataforma desenvolvemos as atividades do curso de Fundamentos da Matemática (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS, 2012).

Entendemos que, para atender aos objetivos da Proposta Institucional TIC's, a produção de materiais didáticos das disciplinas de Matemática Universitária, particularmente de Fundamentos da Matemática, deveria ser organizada a partir das seguintes sessões: título, objetivos, preparação, recursos didáticos e tecnológicos, situação-problema, processo de construção, abordagem teórica, formalização de alguns conceitos e proposições, dicas para aprofundamento dos estudos, síntese e referências.

A partir dessa estrutura elaboramos as atividades que compõem o material didático do referido curso. Posteriormente, optamos por centrar nossa pesquisa nas sete atividades iniciais que contemplam os temas: plano cartesiano, função afim e função quadrática. Elaboramos também duas atividades de *redesign*: a primeira sobre plano cartesiano e a segunda sobre função constante. As referidas atividades foram desenvolvidas em cinco encontros presenciais, de 4h/a cada, realizados no laboratório de informática do Centro de Ciências

Exatas e Tecnológicas da UNIMONTES. Apesar de termos realizado os cursos de Fundamentos da Matemática nas modalidades presencial e a distância, utilizaremos somente os dados do curso presencial neste estudo, visto que as atividades foram realizadas em sala de aula e, posteriormente, entregues ao professor para análise dos dados.

4.3. Público Alvo

As atividades foram desenvolvidas com catorze (14) alunos do 1º período do curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES, no Estado de Minas Gerais, ingressantes no 2º semestre de 2012, oriundos de escola pública. Neste trabalho de pesquisa, faremos a análise das atividades de três alunos, os quais, para manter suas identidades preservadas, serão identificados por A, B e C em nosso estudo.

O critério de escolha dos alunos para participarem do nosso trabalho de pesquisa foi feito de forma aleatória. Primeiro esclarecemos para os mesmos que estávamos desenvolvendo um projeto de mestrado e que as atividades realizadas seriam utilizadas como instrumentos de coleta de dados para análise em nosso trabalho. Após o esclarecimento, perguntamos se os mesmos estavam dispostos a participar deste trabalho de pesquisa e se permitiriam que as atividades desenvolvidas durante o curso fossem utilizadas em nossa pesquisa. Prontamente todos concordaram. Asseguramos que as suas identidades seriam totalmente preservadas. Após a realização e entrega da primeira atividade escrita, foi extraída uma amostra aleatória de três atividades cujos dados serão analisados ao longo da pesquisa. Também foram analisadas as oito atividades restantes realizadas pelos mesmos três alunos da amostra.

4.4. Coleta e análise de dados

Os dados foram coletados por meio de atividades fotocopiadas, desenvolvidas individualmente pelos alunos durante os encontros presenciais, nas quais foi utilizada a mídia lápis-papel. Ainda, realizamos algumas entrevistas semiestruturadas, as quais foram gravadas em áudio após o desenvolvimento das atividades, com a finalidade de identificarmos componentes das varáveis de aprendizagem.

Como se trata de uma pesquisa qualitativa, devido à complexidade da análise dos dados, optamos por selecionar todas as nove atividades desenvolvidas por três alunos participantes do curso.

4.5. Desenvolvimento das atividades

As atividades foram desenvolvidas em cinco encontros presenciais de 4h/a cada. Sendo que quatro encontros aconteceram aos sábados, no turno vespertino, das 13h às 17h e 20min e um encontro numa terça-feira das 7h10 min às 11h e 30min. Foi utilizado um dos laboratórios da Universidade Estadual de Montes Claros, construído em uma medida da área de 39 m^2, com capacidade para 20 alunos, sendo um aluno por computador. O laboratório é equipado com um projetor de multimídia, internet, ar condicionado e uma lousa branca tradicional, oferecendo todas as condições necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas.

As atividades foram desenvolvidas ao longo do curso, com o uso do *software* GeoGebra. Quando as elaboramos não tínhamos informações relacionadas ao conhecimento dos alunos sobre o referido *software*. Então cada atividade encontra-se acompanhada por um processo de construção para dar suporte aos alunos na execução das construções propostas.

Nossa intenção ao enunciarmos detalhadamente o processo de construção consiste em minimizar as possíveis dificuldades iniciais dos alunos ao terem contato com o software. Pensamos que dentre as principais dificuldades dos alunos surgiriam questões tais como: em qual janela do software poderia encontrar uma determinada ferramenta usada na construção? Como obter uma reta perpendicular? Como fazer a animação de um determinado objeto?

O processo de construção explicitou todas as orientações para que o aluno executasse as construções referentes às atividades. Pensamos também no *redesign* das atividades para aprimorá-las e reaplicá-las aos mesmos alunos ou não, visto que a metodologia *Design Research* possibilita aplicar, analisar, modificar e reaplicar as atividades de intervenção.

As atividades foram desenvolvidas com o objetivo, sempre que possível, de propor mudança de registros, tomando como base a conversão da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval aliada ao GeoGebra que é um *software* que possibilita este tipo de transformação.

4.5.1. Introdução do curso. Apresentação do GeoGebra e do Virtualmontes

Neste encontro tínhamos como objetivos apresentar o *software* GeoGebra e algumas ferramentas do mesmo e a Plataforma Virtualmontes; ensinar os alunos como criar uma pasta em “Documentos” para arquivar as atividades desenvolvidas durante o curso e um arquivo no

GeoGebra, nomeando-o de arcordo com cada atividade e desenvolver uma atividade explorando o plano cartesiano.

Primeiramente fizemos nossa apresentação para os alunos, falamos sobre a proposta do curso que propõe desenvolver atividades utilizando um *software* dinâmico, o GeoGebra. Antes da apresentação do GeoGebra perguntamos se eles conheciam esse *software* e a resposta foi unânime em dizer que não. De posse desta informação, passamos a fazer a apresentação do GeoGebra. Esclarecemos que se trata de um *software* de domínio público, criado pelo austríaco Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado. De acordo com Markus Hohenwarter e Judith Hohenwarter:

> GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e equipe de programadores internacionais para aprender e ensinar matemática nas escolas (MANUAL DO GEOGEBRA, 2012 p.6).

O nome GeoGebra é uma junção de duas palavras Geometria e Álgebra Geo = de geometria e Gebra = de álgebra. A seguir, faremos uma breve apresentação do GeoGebra e mostraremos algumas ferramentas que foram utilizadas no desenvolvimento das atividades previstas para o curso de Fundamentos da Matemática.

A tela do GeoGebra, na versão utilizada neste trabalho, é composta por uma barra de menu, barra de ferramentas, campo de entrada, janela de álgebra e janela de visualização.

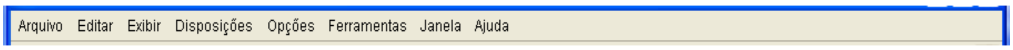


Figura 6- Bara de Menu do Geogebra
Fonte: O Autor (2012)

A barra superior de menu do GeoGebra é composta de sete janelas sendo que cada janela apresenta outras opções. Para acessá-las basta Clicar sobre cada janela e abrirá outras possibilidades.

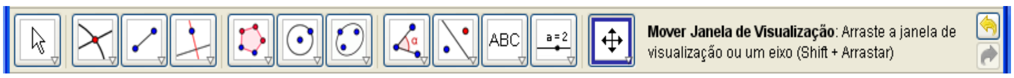


Figura 7- Barra de ferramentas do GeoGebra
Fonte: O Autor (2012)

A barra de ferramentas é composta por onze janelas, sendo que cada uma possui ícone na parte inferior. Clicando sobre este ícone, abrem outras possibilidades de ferramentas como indicado na figura a seguir.

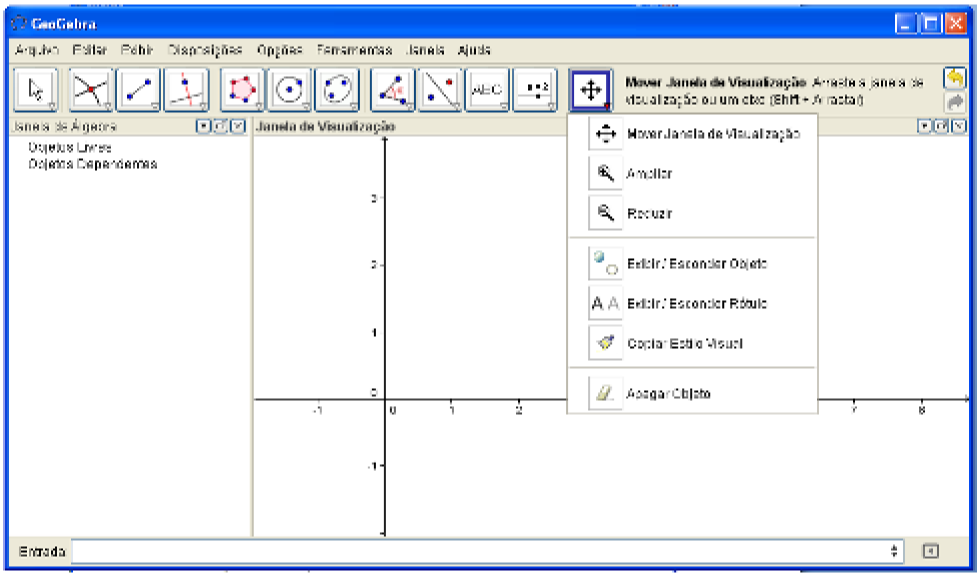


Figura 8 - Janelas do GeoGebra
Fonte: O Autor (2012)

O campo de entrada aparece na parte inferior da tela do GeoGebra. Por meio do campo dessa entrada é possível operar o GeoGebra utilizando comandos escritos.

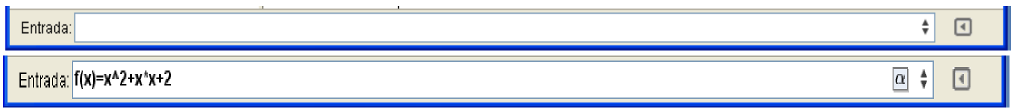


Figura 9 - Campo de Entrada
Fonte: O Autor (2012)

A imagem inicial do GeoGebra é divida em duas janela: uma de Álgebra e outra de visualização. A Janela de Álgebra fica posicionada a esquerda da Janela de Visualização.

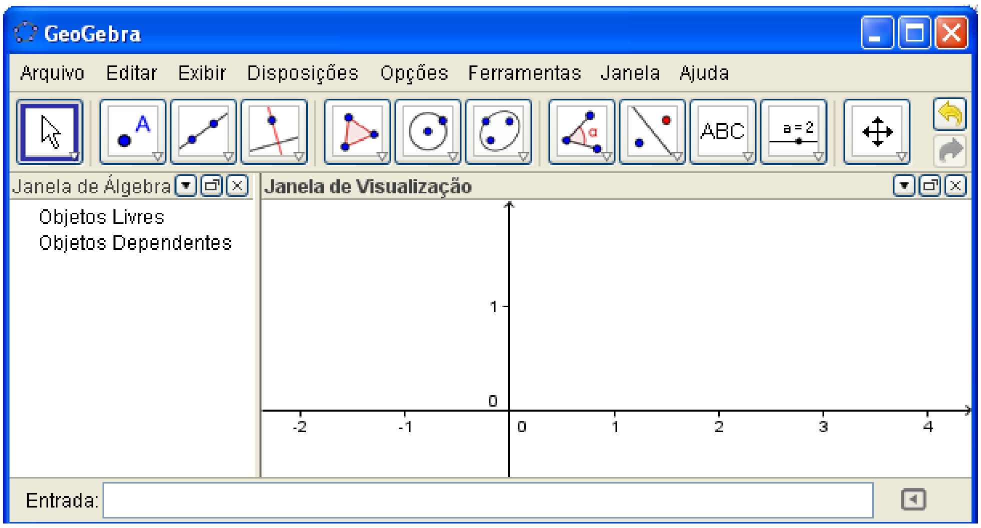


Figura 10 – Janelas do GeoGebra
Fonte: O Autor (2012)

Uma das funções da janela algébrica é fornecer informações dos objetos que estão na janela de visualização como: coordenadas dos pontos, equações, medida da área, indica os objetos livres e os objetos dependentes nas cores azuis e pretas respectivamente, etc.

Objetos livres são aqueles que podem ser movimentados sem que dependam de outros objetos. Objetos dependentes são aqueles que foram construídos a partir de outros objetos. Em geral eles foram construídos dos objetos livres. A figura a seguir exemplifica a utilização das duas janelas.

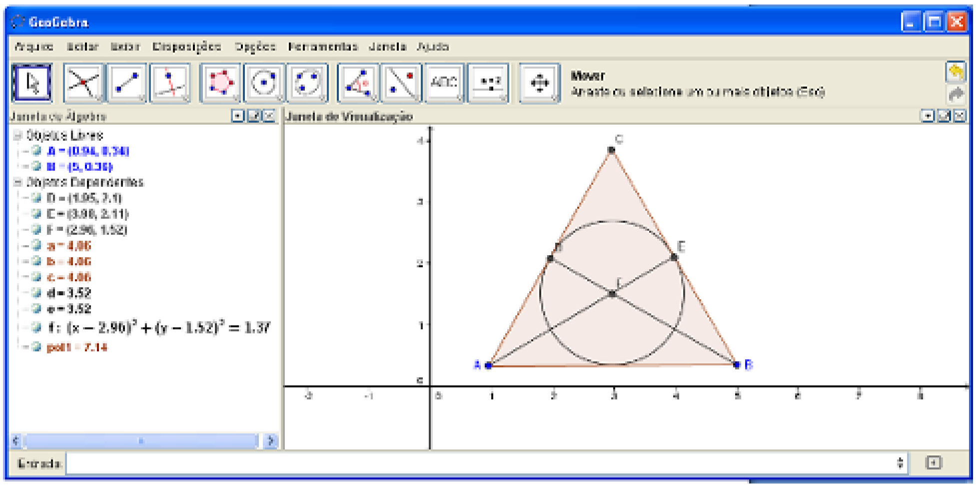


Figura 11 – Objetos livres e dependentes
Fonte: O Autor (2012)

A tela do GeoGebra nos dá a possibilidade de observar as mudanças de registros, no caso da forma algébrica para a gráfica. Quando movimentamos algum objeto na janela de visualização podemos acompanhar as atualizações do mesmo por meio da janela algébrica.

Segundo (Duval, 2003), para que um aluno aprenda Matemática é necessário que ele tenha domínio de pelos menos dois registros. A teoria dos Registros de Representação Semiótica, suporte teórico desta pesquisa, permite analisar a transição entre as representações de nosso objeto de estudo por meio das atividades realizadas com a utilização do GeoGebra.

4.5.2 - Aprendendo com o GeoGebra

Neste momento da apresentação, passamos a explorar as principais ferramentas do GeoGebra que utilizaremos no desenvolvimento das atividades de intervenção. Para isso, executamos junto aos alunos algumas ações, tais como:

1) *Criar alguns pontos na Janela de Visualização de duas maneiras diferentes*

1º) Usando o Menu Barra de Ferramentas.

Ative a ferramenta Novo Ponto  (janela 2) e clique em dois lugares distintos da janela de Visualização. Observe que o GeoGebra vai criar os pontos e nomeá-los com as letras A e B. Lembrando que os pontos são sempre nomeados com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Observe que a janela na qual a ferramenta está sendo usada fica sempre com a cor mais forte.

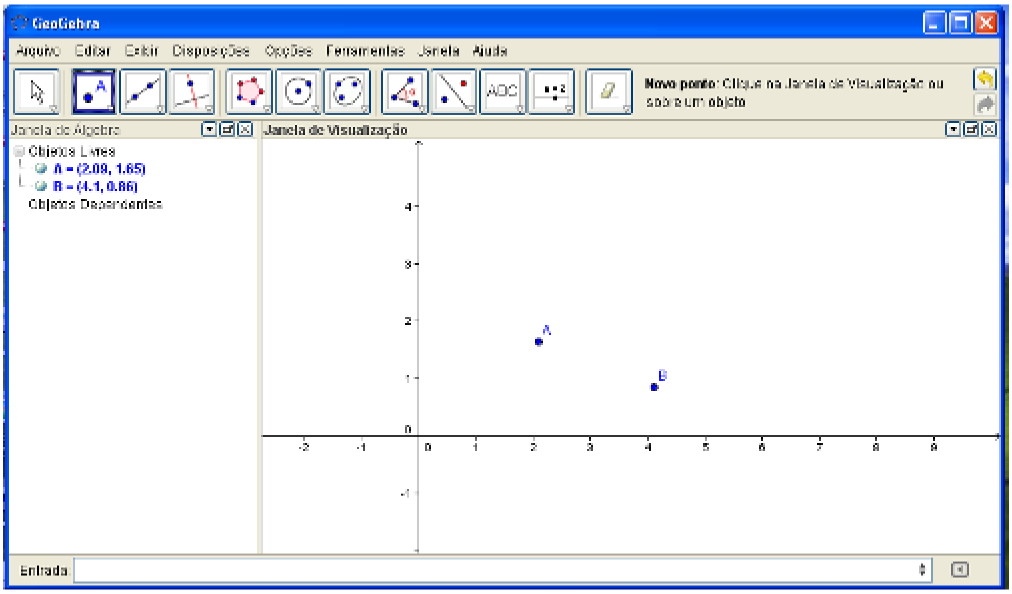


Figura 12- Pontos obtidos com a ferramenta "Ponto"
Fonte: O Autor (2012)

Na janela de visualização têm-se os pontos A e B com suas respectivas coordenadas.

2º) Usando o Campo de Entrada

Suponha que se queira criar dois pontos cujas coordenadas são (2,4) e (4,3). Digite no Campo de Entrada um ponto de cada vez, neste caso, (2,4) e tecle "enter".

Observe que o GeoGebra criará o ponto e o nomeará com letra C.

Observação: Toda vez que formos usar o campo de entrada, assim que digitarmos um ponto, uma equação, etc, teremos que acionar a teclar "enter" que é o comando para a execução daquilo que queremos fazer.

Prosseguindo repita o mesmo processo para o ponto (4,3). Observe que o GeoGebra criará o ponto e o nomeará com a letra D.

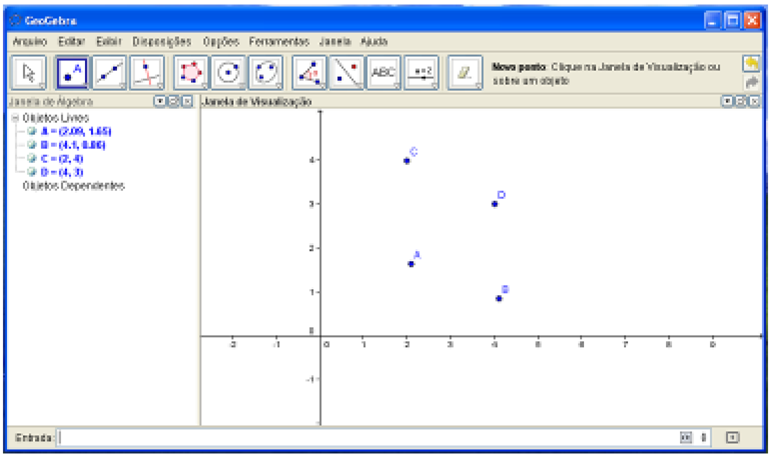


Figura 13- Pontos obtidos pelo campo "Entrada"
Fonte: O Autor (2012)

2) Criar retas

Vamos criar retas de duas maneiras.

1º) Usando o Campo de Entrada.

Digite no Campo de Entrada de entrada $y = 2x + 1$ e tecle "enter".

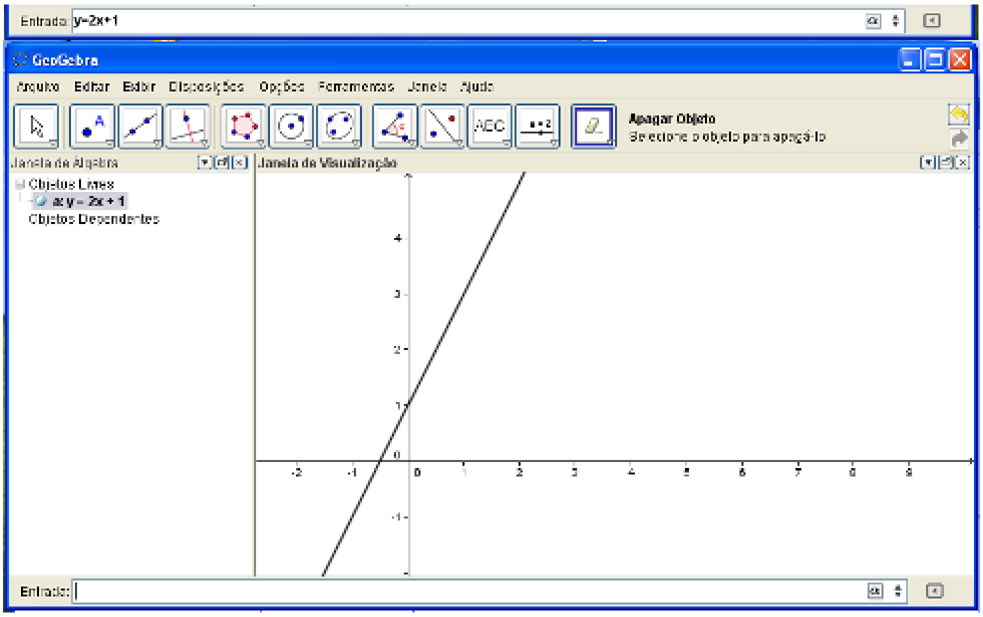
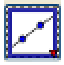


Figura 14- Reta obtida pelo campo de "Entrada"
Fonte: O Autor (2012)

Observe que o GeoGebra criou o gráfico de uma reta e na janela de Álgebra registrou sua expressão algébrica nomeando-a como reta **a**.

Chamamos a atenção dos alunos para o fato de que a reta aparece na janela de visualização na forma gráfica e, na janela de álgebra, na forma algébrica.

2º) Usando a Barra de Ferramenta 

Considerando a reta da questão anterior e conhecendo dois de seus pontos poderíamos esboçá-la usando a ferramenta "reta definida por dois pontos". Para isso, utilizaremos dois pontos quaisquer da reta definida por $y = 2x + 1$. Por exemplo, se tomássemos os pontos (1,3) e (2,4), como deveríamos proceder? Teríamos que digitar no Comando de entrada o ponto (1,3) e teclar "enter"; em seguida, repetiríamos o procedimento para o ponto (2,4).

Perguntamos aos alunos: o que apareceu na Janela de Visualização?

E eles responderam: os pontos A e B.

Logo em seguida, solicitamos aos alunos que ativassem a ferramenta "Reta Definida por Dois Pontos" (3ª janela) e dessem um clique sobre os pontos A e B. O GeoGebra criou uma reta passando pelos referidos pontos (Figura 15).

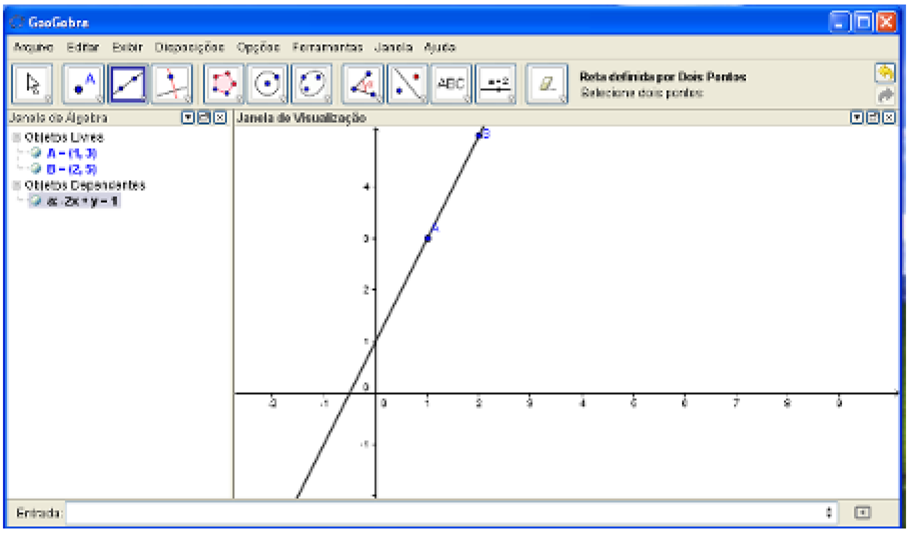


Figura 15 – Reta obtida com a ferramenta "Reta definida por dois pontos"
Fonte: O Autor (2012)

Pedimos para que os alunos observassem a reta gerada na Janela de Visualização e observamos que se trata da mesma reta do exemplo anterior. Entretanto, na janela de Álgebra aparece sua equação na forma implícita 2x + y = 1.

Consideramos a construção da reta do exemplo anterior para explorarmos a opção propriedades (utilizando o botão direito do mouse) para mudarmos a cor da reta. Clicamos com o botão direito do mouse sobre a reta abrindo uma janela com várias opções dentre as quais "propriedades".

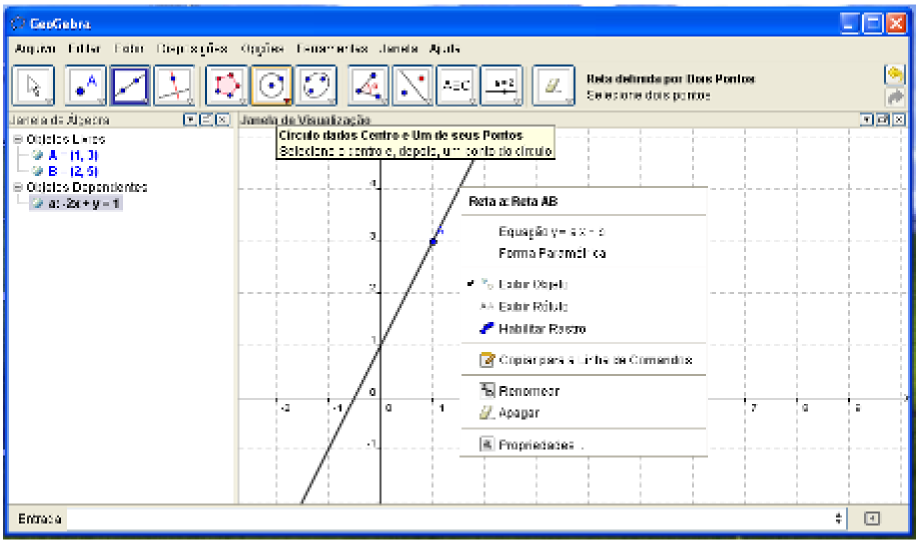


Figura 16 – Janela para alterar as propriedades dos objetos
Fonte: O Autor (2012)

Clicamos sobre “propriedades” com o botão direito do mouse para abrir outra janela (Figura 17). Clique sobre a opção cor e observe que abrirão algumas opções de cores. Então clique sobre a cor desejada e, em seguida, na parte inferior direita da janela na opção fechar.

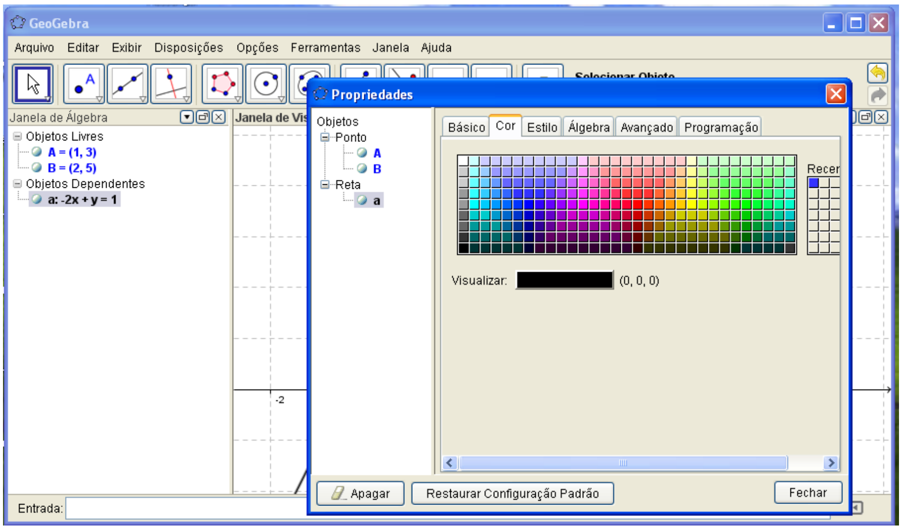


Figura 17 – Janela para alterar a cor dos objetos
Fonte: O Autor (2012)

Logo aparece na Janela de Visualização a reta na cor escolhida, no caso, azul (Figura 18).

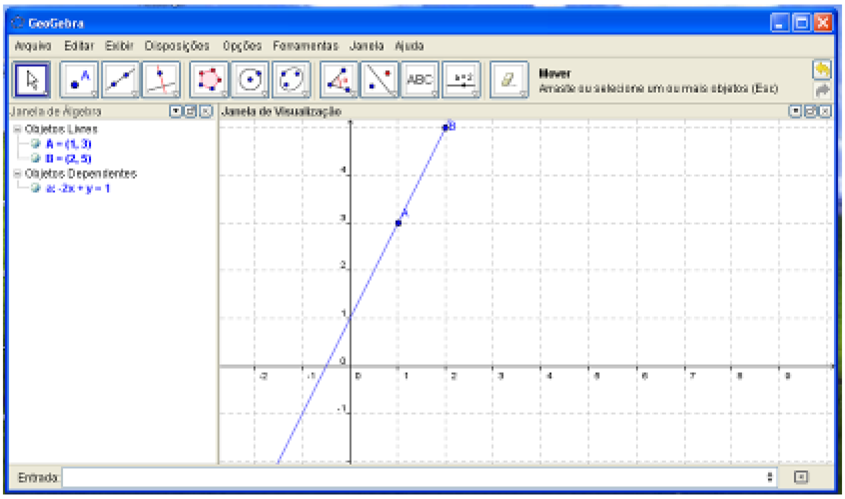
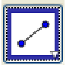


Figura 18 – Gráfico da reta com a cor modificada.
Fonte: O Autor (2012)

3) Segmento Definido Por dois Pontos 

Esta ferramenta serve para criar um segmento de reta que une dois pontos. Para usá-la, ativamos a ferramenta “Segmento definido por dois pontos” (janela 3), clicamos em dois lugares distintos sobre a Janela de Visualização criando o segmento de reta $\overline{AB}$ (Figura 19).

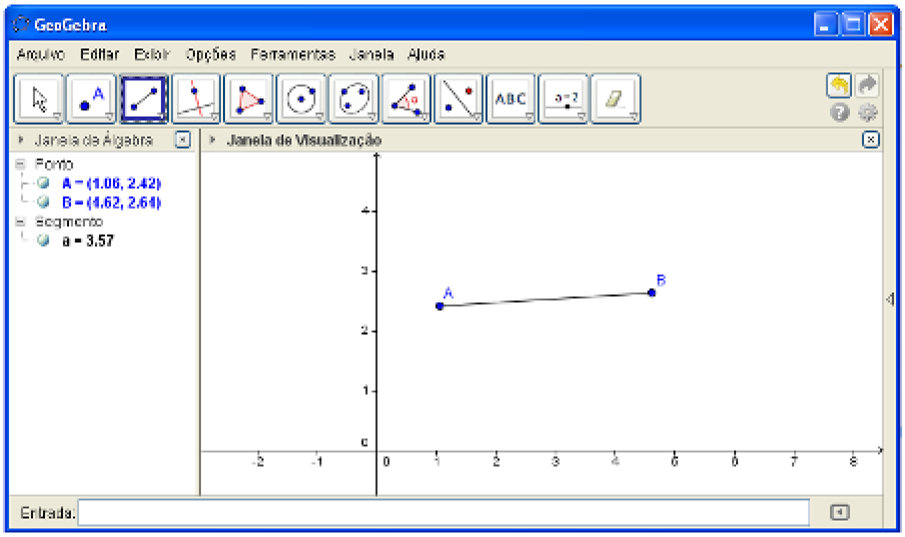


Figura 19 – Segmento de reta definido por dois pontos
Fonte: O Autor (2012)

Poderíamos também criar o segmento da seguinte maneira: Se já existissem dois pontos na Janela de visualização bastaria clicarmos sobre os mesmos para determinar o segmento.

4) Interseção de dois objetos 

Para usarmos a ferramenta que determina a interseção de dois objetos, segundo ícone, podemos criar, como exemplo, duas retas concorrentes quaisquer usando a ferramenta “Reta

Definada Por Dois Pontos”. Observe que a janela a qual a ferramenta esta sendo usada sempre fica com a cor mais forte.

Para determinarmos a interseção das duas retas, devemos ativar a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” (janela 2). Observe que quando passamos o mouse sobre o ponto de interseção das retas, as mesmas ficam selecionadas, isto é, com uma cor mais escura. O que também pode ser observado na Janela de Álgebra. Ao clicarmos sobre a interseção das retas obtemos o ponto E. Observe que suas coordenadas aparecem na Janela de Álgebra (Figura 20).

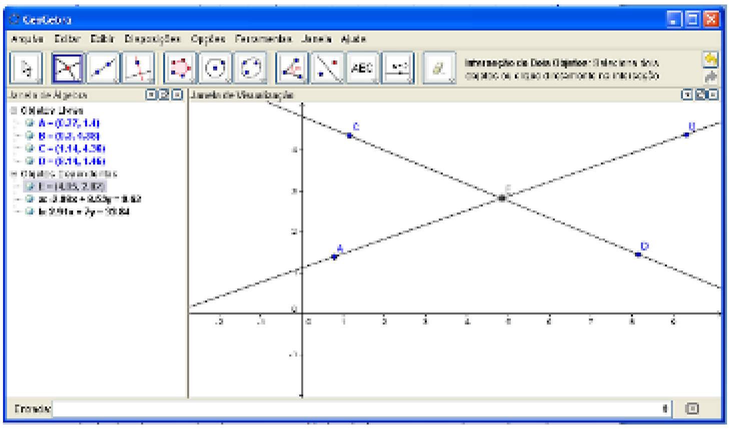
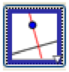


Figura 20 – Ferramenta intersecção de dois objetos.
Fonte: O Autor (2012)

5) Reta perpendicular 

Para usarmos esta ferramenta devemos ativar “Reta Perpendicular” (janela 4) e, em seguida, clicar sobre qualquer lugar da Janela de Visualização. Obtem-se um ponto, neste caso, A. Em seguida, ao dar um clique em qualquer ponto sobre o eixo das abscissas será criada uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa por A (Figura 21).

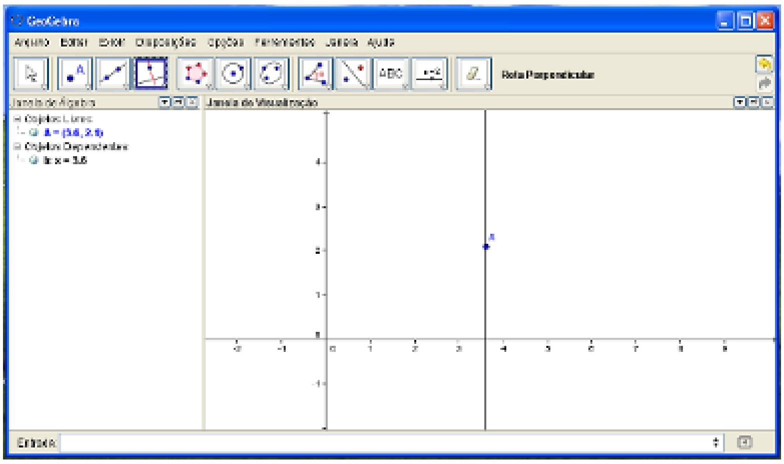


Figura 21- Construção da reta perpendicular
Fonte: O Autor (2012)

O mesmo procedimento pode ser aplicado para criar uma reta perpendicular ao eixo 0y por um ponto A qualquer que esteja na Janela de Visualização (Figura 22).

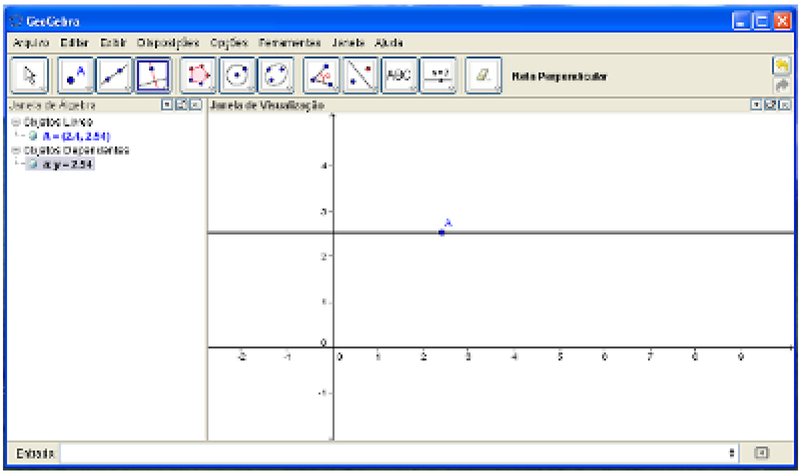


Figura 22- Construção da perpendicular ao Eixo y
Fonte: O Autor (2012)

6) Ferramenta Mover 

Uma das funções do GeoGebra é modificar a posição dos objetos. Ao darmos um clique sobre os pontos A, B ou C (Figura 23) podemos arrastá-los livremente em qualquer direção, um de cada vez. Observamos, na Janela de Álgebra, que à medida que movimentamos os pontos suas novas posições são atualizadas imediatamente. Da mesma forma, se clicarmos sobre a reta e a arrastarmos na Janela de Visualização, sua equação atualizará imediatamente na Janela de Álgebra.

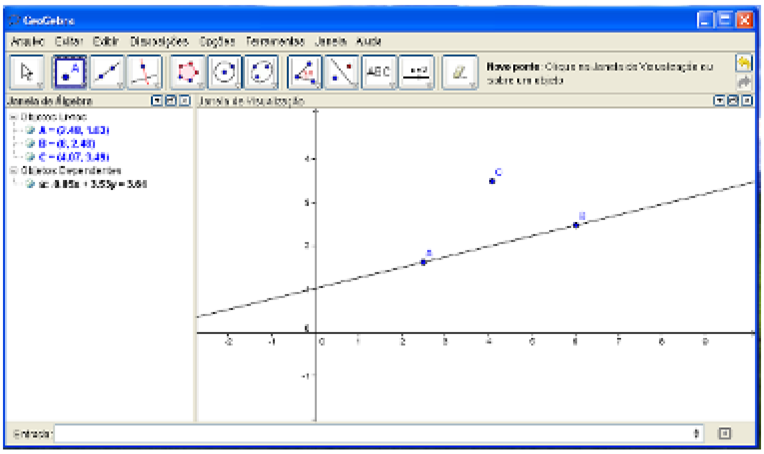
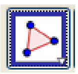


Figura 23- Ferramenta "Mover"
Fonte: O Autor (2012)

7) Polígonos 

Com esta ferramenta podemos construir polígonos com quaisquer quantidades de lados. Vamos ilustrar este fato construindo um triângulo qualquer. Para isso, devemos ativar a ferramenta polígono (janela 4) e clicar sobre a Janela de Visualização obtendo os pontos A, B e C.

Devemos observar um detalhe importante: o polígono só se fecha com o último clique no primeiro ponto. Caso contrário não será obtido. O procedimento é o mesmo para qualquer polígono que for construído usando está ferramenta. Observe também os registros na janela de Álgebra (Figura 24).

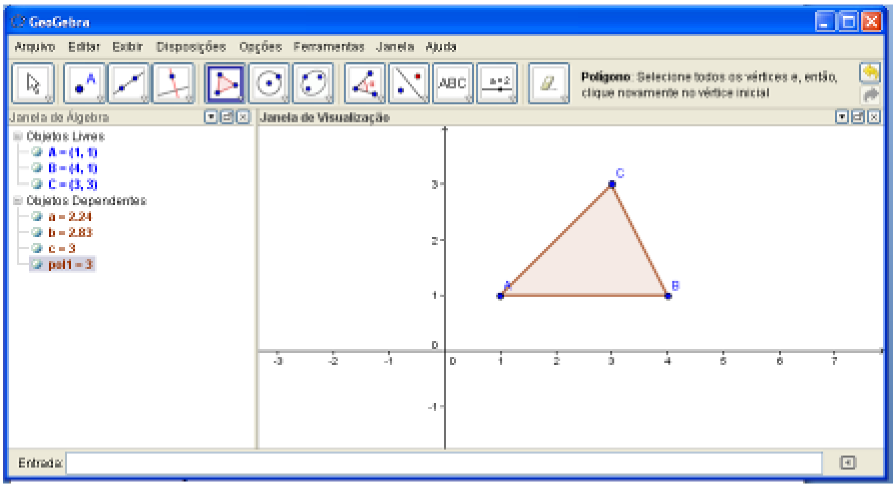
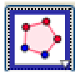


Figura 24 - Construção de um polígono qualquer.
Fonte: O Autor (2012)

Podemos também construir polígonos usando a ferramenta Polígonos Regulares 

Esta ferramenta constrói polígonos regulares a partir de um de seus lados e da quantidade de vértices. Por exemplo, podemos ativar a ferramenta "Polígono Regular" (janela 5), clicar sobre dois pontos quaisquer na janela de visualização (neste caso vamos clicar sobre os pontos (0,0) e (2,0). Observe que aparecerá uma janela na qual devemos indicar a quantidade de vértices do polígono a ser construído (Figura 25).

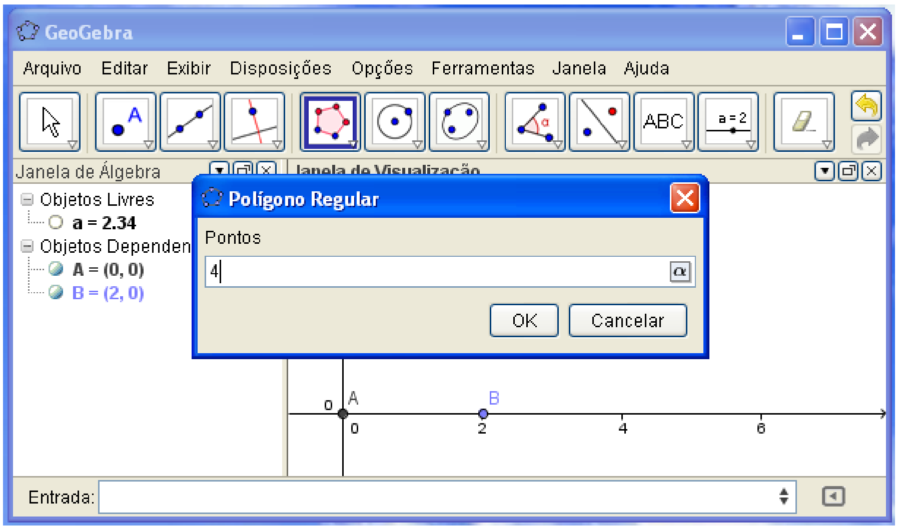


Figura 25 - Construção de polígono regular
Fonte: O Autor (2012)

Em seguida, clicamos na parte inferior da janela em OK, construindo assim o polígono regular de 4 lados ABCD. Ver Figura 26.

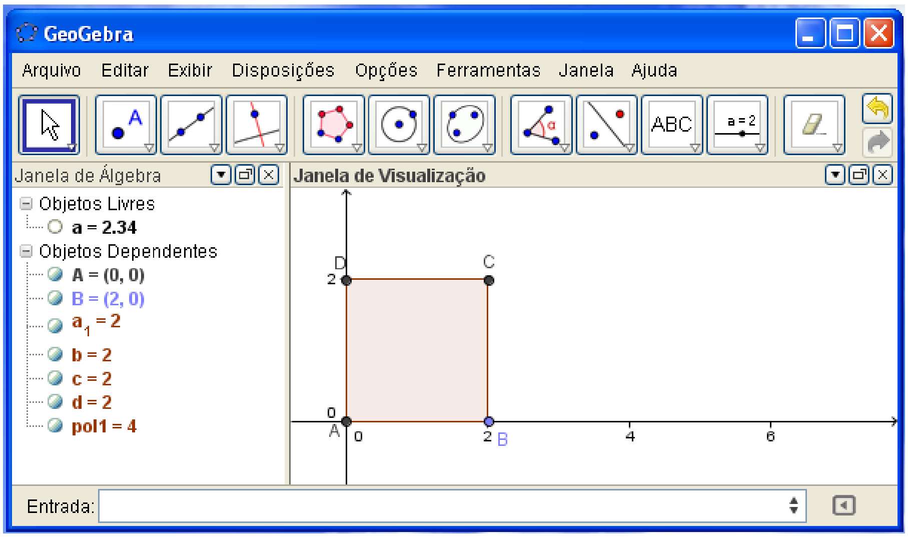
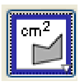
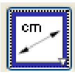


Figura 26 – Polígono regular
Fonte: O Autor (2012)

Para concluirmos, ressaltamos que esse procedimento poderá ser usado para construir qualquer polígono regular.

8) Medida da área e distância entre dois pontos

Para medirmos a medida da área de uma região poligonal, de uma circunferência ou elipse usamos a ferramenta ilustrada por . E para medirmos distância, comprimento ou perímetro devemos usar a ferramenta ilustrada por 

Na construção do triângulo feita anteriormente ao ativarmos a ferramenta “Medida da área” (janela 8) e darmos um clique dentro do polígono ABC ou em qualquer lugar da Janela de Visualização aparecerá o valor da medida da área. E quando ativarmos a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” e clicarmos sobre os pontos A e B o GeoGebra nos dará a medida do lado $\overline{AB}$; clicando sobre os pontos B e C, nos dará a medida do lado $\overline{BC}$ e, clicando sobre os pontos C e A nos dará a medida do lado $\overline{CA}$, neste caso medimos a distância entre os pontos (Figura 27).

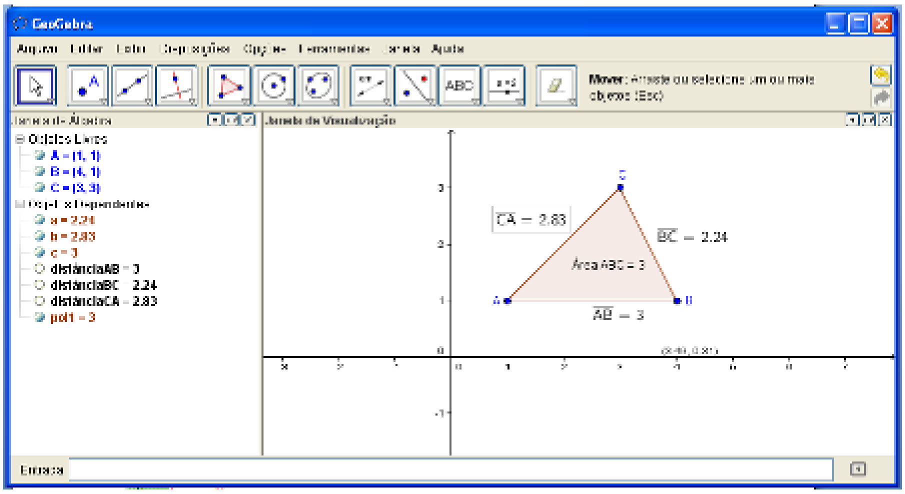


Figura 27 – Medida de medida da área e de comprimento
Fonte: O Autor (2012)

Podemos observar que as informações constantes na Janela de Visualização se referem às mesmas que aparecem na Janela de Álgebra, ou seja, distância de AB=3, de BC= 2.24 e CA=2.83 e pol 1=3 que significa a medida da área do polígono ABC.

Devemos observar também que para escrevermos um número decimal por meio do GeoGebra, as casas decimais devem ser separadas com um ponto no lugar da vírgula que geralmente utilizamos. Dessa maneira, se escrevermos o número 2,34 no campo de entrada e teclarmos “enter” aparecerá uma mensagem na tela informando que tem um erro o qual ele chama de Entrada Inválida (Figura 28).

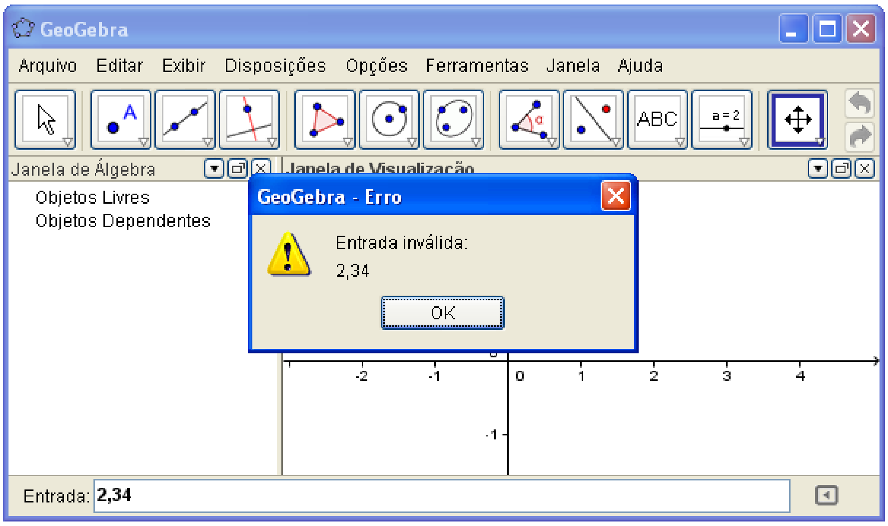


Figura 28 – Entrada inválida
Fonte: O Autor (2012)

Para fazermos a correção, clicamos em OK e reescrevemos o número decimal usando o ponto para separar a parte inteira da parte decimal.

Outra observação que consideramos importante é que quando utilizamos o GeoGebra configurado no idioma português, o *software* não aceita erros ortográficos. Por exemplo, se escrevermos as palavras polígono, medida da área, etc. Sem acentuá-las e dermos o comando "Enter", a mensagem de erro aparecerá na tela.

9) Medir Ângulos internos

Para medirmos um ângulo interno de um polígono ciclamos em três de seus vértices no sentido anti-horário. Por exemplo, vamos medir o ângulo interno de um triângulo e depois de um quadrado.

1º) triângulo (Figura 29) :

Para medirmos o ângulo A, clicamos nos vértices B, A e C.

Para medirmos o ângulo C, clicamos nos vértices A, C e B.

Para medirmos o ângulo B, clicamos nos vértices C, B e A.

2ª) quadrado (Figura 29):

Para medirmos o ângulo D, clicamos nos vértices E, D e G.

Para medirmos o ângulo G, clicamos nos vértices D, G e F.

Para medirmos o ângulo F, clicamos nos vértices G, F e E.

Para medirmos o ângulo E, clicamos nos vértices F, E e D.

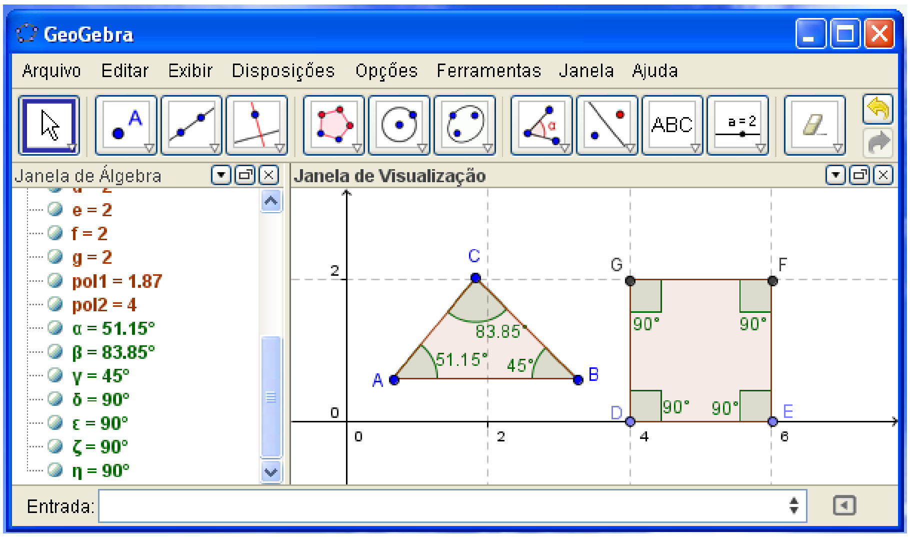


Figura 29 – Medir ângulos internos de um polígono
Fonte: O Autor (2012)

10) Medir ângulos externos

Para medirmos ângulos externos clicamos nos vértices dos polígonos no sentido horário. Vamos aproveitar a construção anterior para encontrarmos os ângulos externos do triângulo e do quadrado. (Figura 30)

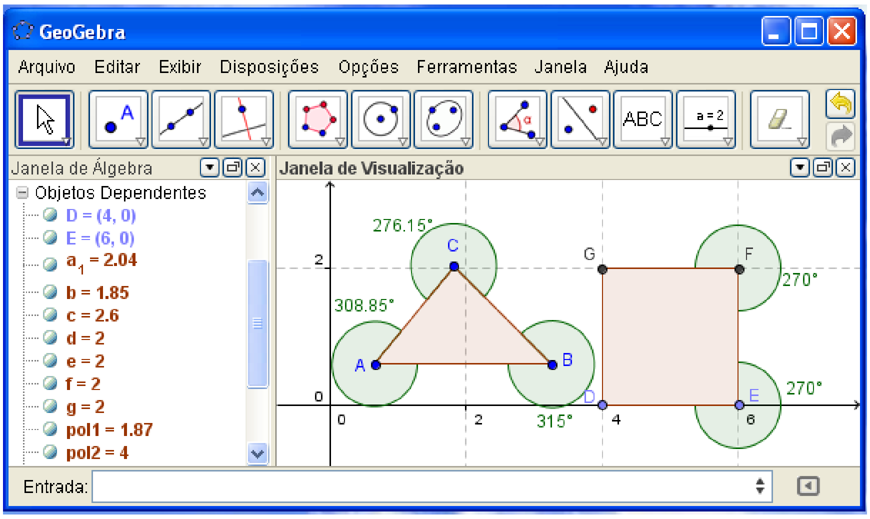
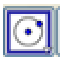


Figura 30 - Medir ângulos externos de um polígono
Fonte: O Autor (2012)

11) Construir Circunferênciasou Círculos

Como esta construção não era objeto de estudo dentro das nossas atividades propostas, mas fazia parte da apresentação das ferramentas do *software* fizemos uma rápida passagem pela janela 6  .

Trabalhamos com a ferramenta “Circulo dados Centro e um de seus pontos”.

Ativamos a ferramenta “Circulo dados Centro e um de seus pontos” (janela 6), clicamos sobre qualquer lugar da Janela de Visualização obtemos o ponto A, que é o centro da circunferência e, em seguida, clicamos em outro ponto qualquer deteminando assim uma circunferência de raio AB (Figura 31).

Observamos na Janela de Álgebra todos os dados referentes à circunferência de raio AB.

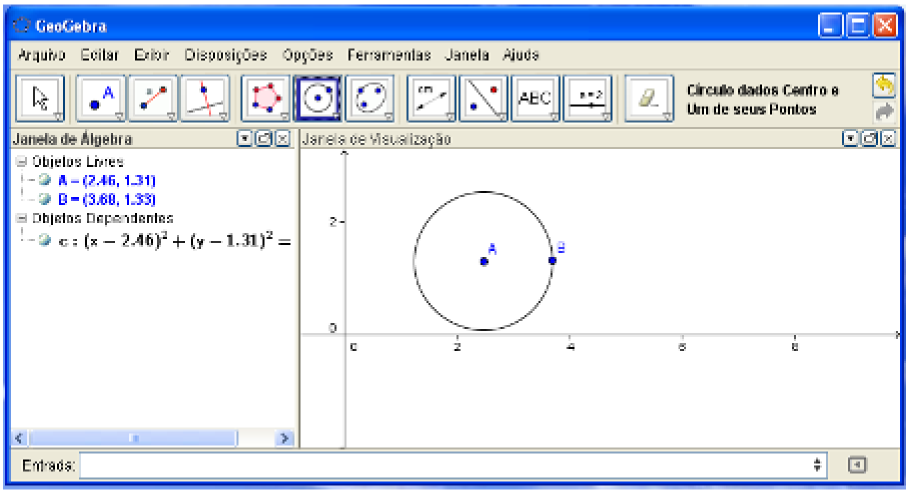
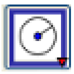


Figura 31 – Construção da circunferência
Fonte: O Autor (2012)

Exploramos também a ferramenta Circulo dado Centro e Raio 

Ativamos a ferramenta “Circulo dado Centro e Raio” (janela 6), clicamos sobre um lugar qualquer da Janela de Visualização obtemos o centro da circunferência e aparecerá uma caixa na janela de Visualização solicitando a medida do comprimento do raio. Digitamos a medida solicitada e teclamos enter para obtermos o círculo de centro A (Figura 32).

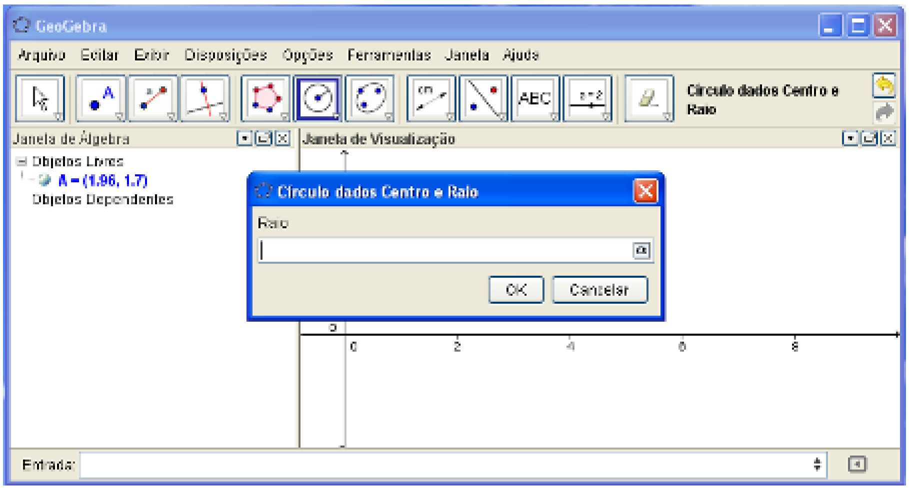


Figura 32 – Construção da circunferência
Fonte: O Autor (2012)

12) Construção de uma parábola

Ativamos a ferramenta “Novo Ponto” (Janela 2) e clicamos sobre um lugar qualquer na Janela de Visualização, obtendo o ponto A (foco da parábola). Ativamos a ferramenta “Reta Definida por Dois pontos” (Janela 3) e construímos uma reta diretriz em um lugar qualquer da Janela de Visualização. Em seguida, ativamos a ferramenta “Parábola” (janela 7) e clicamos sobre o ponto A e sobre a reta diretriz (Figura 33).

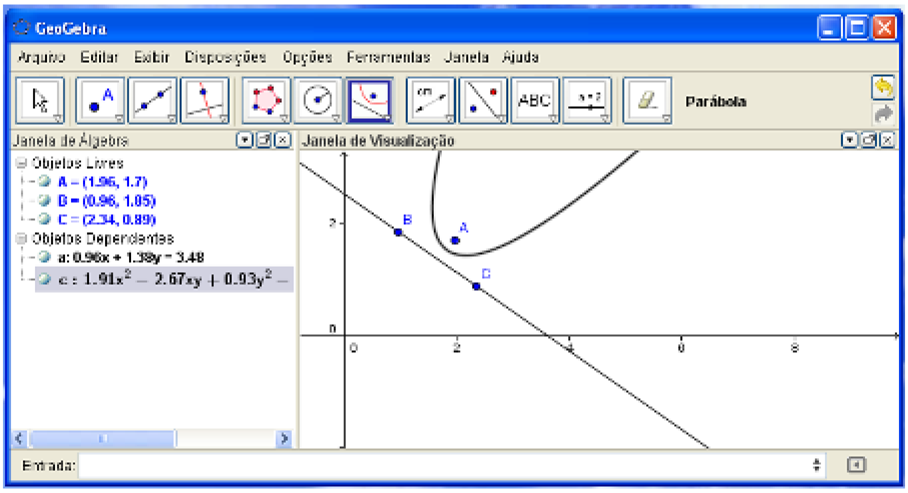


Figura 33 – Construção da Parábola
Fonte: O Autor (2012)

13) Reflexão com relação a uma reta

Esta ferramenta constrói o simétrico de um objeto (seja um ponto, um círculo, uma reta ou um polígono) em relação a uma reta. Por exemplo, construimos o triângulo ABC usando a ferramenta “Polígono Regular” (janela 5), ativamos a ferramenta “Reflexão com Relação a Uma Reta” (janela 9), clicamos sobre o triângulo ABC e sobre o eixo Y (eixo das ordenadas) para obtermos o triângulo simétrico do triângulo ABC com relação ao eixo Oy (Figura 34).

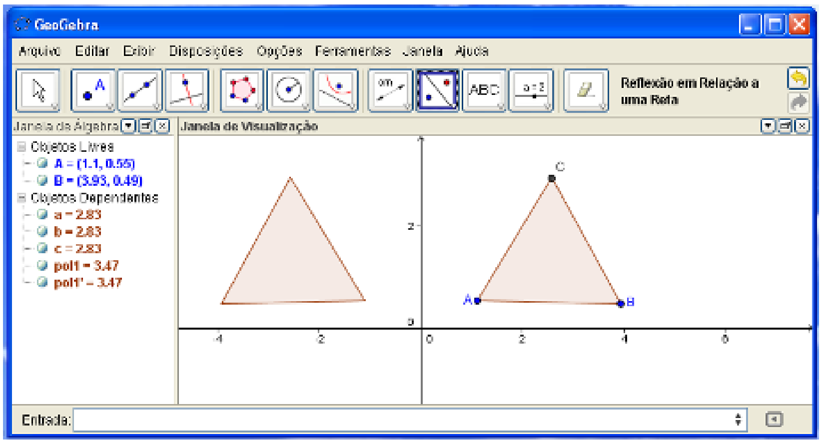
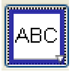


Figura 34 – Simetria axial
Fonte: O Autor (2012)

14) Inserindo texto 

Com esta ferramenta podemos inserir qualquer texto na janela de Visualização. Ativamos a ferramenta "Inserir Texto" (janela 10) e clicamos sobre a Janela de Visualização aparecerá uma caixa com uma tela para editar o texto desejado e, na parte inferior, outro campo para a visualização do texto editado (Figura 35).

Para Nóbriga e Araujo (2010, p.27) um texto dinâmico é aquele que é modificado quando modificamos algum de seus parâmetros.

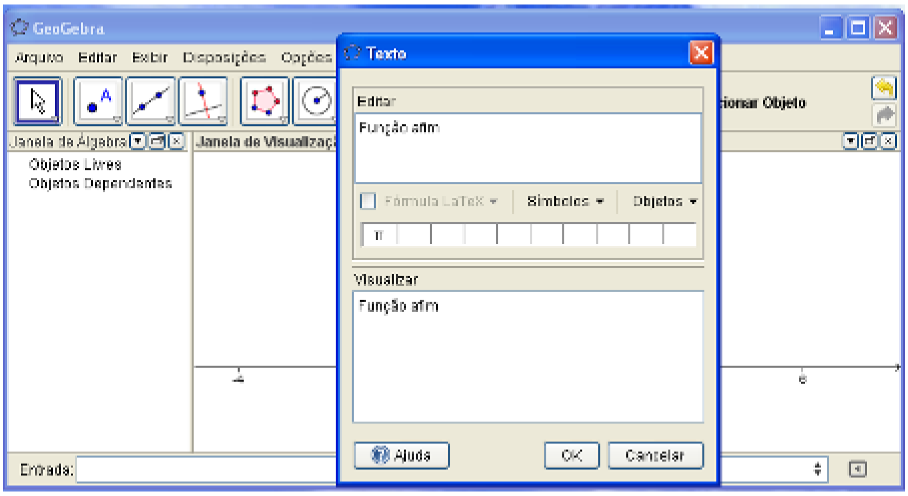
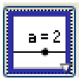


Figura 35 – Inserir texto
Fonte: O Autor (2012)

15) Seletor ou Controle deslizante 

Usamos esta ferramenta para trabalharmos com objetos de forma dinâmica.

> Um seletor é um pequeno segmento com um ponto que se movimenta sobre ele. Com esta ferramenta é possível modificar, de forma dinâmica, o valor de algum parâmetro (NÓBRIGA e ARAUJO, 2010 , p.11).

Para ilustrarmos uma situação com a utilização do controle deslizante, vamos construir uma reta perpendicular ao eixo das abscissas do plano cartesiano e usar a ferramenta "Seletor" ou "controle deslizante" para obter uma dinâmica da mesma.

Ativamos a ferramenta "Novo Ponto" (janela 2), clicamos sobre o eixo das abscissas criando um ponto A. Ativamos a ferramenta "Reta Perpendicular" (janela 3), clicamos sobre o ponto A e sobre qualquer ponto da abscissa. Criamos então uma reta perpendicular ao eixo das abscissas por A.

Agora ativamos a ferramenta "Seletor" (janela 10) e ao clicarmos em qualquer lugar da Janela de Visualização aparecerá uma nova janela com informações sobre o seletor. Observem que podemos alterar estas informações como intervalo máximo e mínimo e o valor do incremento do seletor (Figura 36).

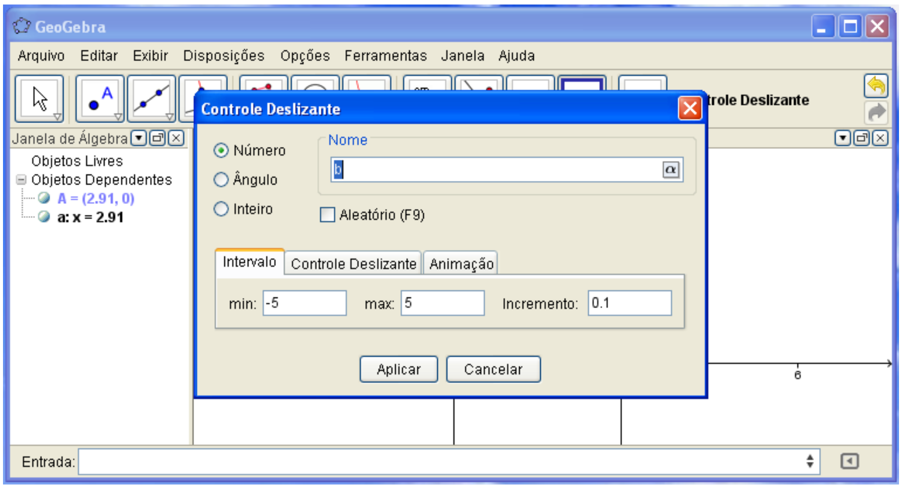


Figura 36 – Criação do seletor
Fonte: O Autor (2012)

Vamos considerar as propriedades padrão do seletor oferecida pelo *software* (Figura 37). Clicamos na parte inferior da janela na “opção fechar” e vamos obter o seletor $b=1$.

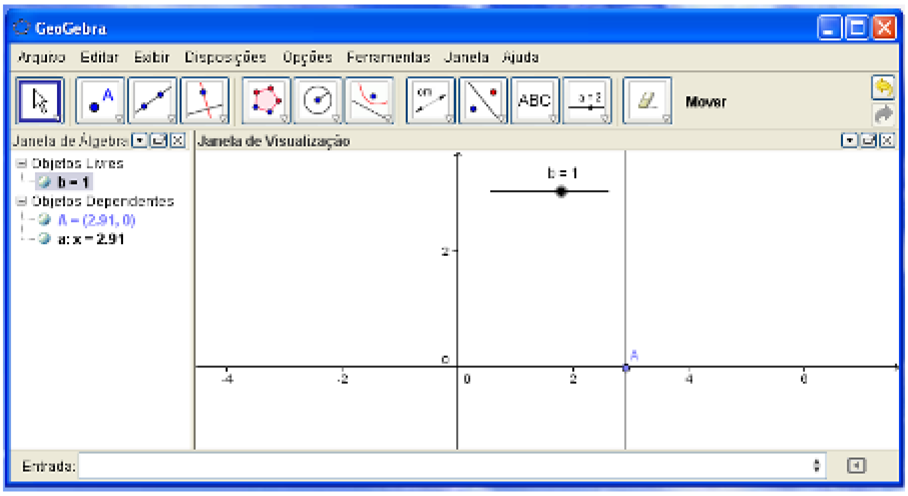


Figura 37 – Utilizando o seletor
Fonte: O Autor (2012)

Se digitarmos no campo de entrada do GeoGebra A=(b,0), esse ponto estará apto para movimentar-se em função do seletor b. A abscissa do ponto A será o seletor $b=1$ e a ordenada se mantém conservada. Ao clicarmos com o botão direito do mouse sobre o seletor $b=1$, aparecerá uma janela com algumas opções. Ao clicamos sobre a opção animação percebemos que o seletor b vai se deslocar no sentido horizontal de -5 até 5. Consequentemente como o ponto A pertence à reta perpendicular, esta se deslocará no referido intervalo (Figura 38).

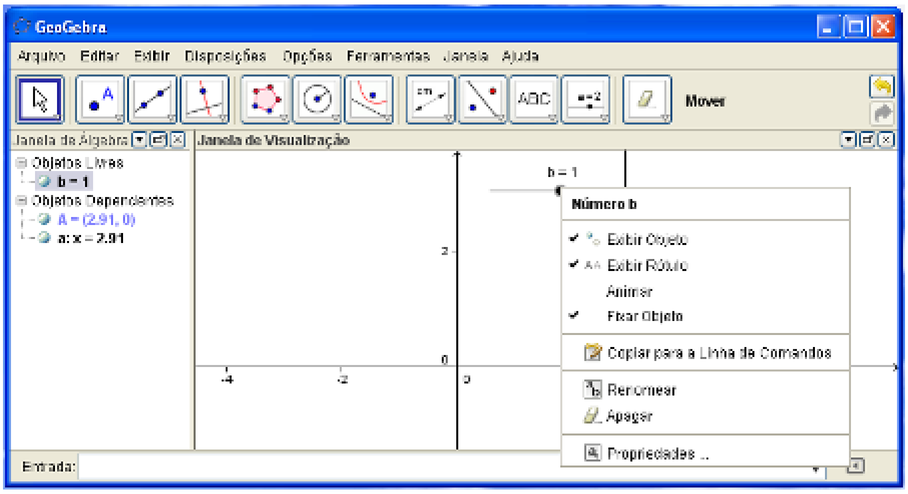
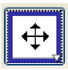


Figura 38 – Animação do seletor
Fonte: O Autor (2012)

Observe que à medida que o ponto A assume novas coordenadas na Janela de Visualização, estas são imediatamente atualizados na Janela de Álgebra.

16) Mover eixos e objetos 

Esta ferramenta tem como finalidade mover os eixos e todos os objetos inseridos na janela de visualização.

Para utilizá-la, ativamos a ferramenta “Mover” (janela 11), clicamos com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização e a arrastamos mantendo o botão direito pressionado. Esta ferramenta é ideal para ajustes de objetos na Janela de Visualização.

17) Criar uma pasta em meus documentos

Os arquivos das atividades desenvolvidas no decorrer do curso deveriam ser gravadas em uma pasta nomeada como “fund.matematica_seunome” em “meus documentos”. Para isso, instruímos os alunos sobre o procedimento para criar uma pasta em Meus Documentos e os instruímos em como salvar arquivos nesta pasta.

Finalmente, se tudo tiver corrido bem, acabamos de criar a pasta “fund.matematica_seu nome” para que as atividades desenvolvidas durante o curso possam ser arquivadas na mesma.

1º) Clicamos no ícone “Meus documentos”.

2º) Para abrirmos a pasta “fund.matematica_seunome”, pressionamos com um clique duplo sobre a mesma.

3º) Na opção nome do arquivo digitamos: “atividade1_seunome.ggb” (ggb é a extensão do arquivo do GeoGebra).

4º) Finalmente clicamos no botão “Gravar”.

Apresentamos também informações sobre os institutos de GeoGebra, espalhados pelo mundo, imbuídos em cada vez mais utilizar e aperfeiçoar esse *software*. Depois da apresentação do GeoGebra, mostramos a plataforma da Universidade Aberta do Brasil (UAB) que será utilizado para o desenvolvimento do curso.

Após a apresentação da Plataforma da UAB e do GeoGebra, foram destinados 20 minutos para que os alunos fizessem uma interação, isto é, explorassem as ferramentas, criassem objetos e os arrastassem, enfim para realizarem algumas atividades livres com o referido *software*.

Posteriormente, distribuímos uma atividade impressa intitulada “Explorando o plano cartesiano” com o objetivo de fazermos uma sondagem sobre o domínio dos alunos relativo ao plano cartesiano. Essa atividade consistia em esboçar um sistema de coordenadas cartesianas e localizar alguns dados, usando somente lápis e papel. Após o término da atividade a mesma foi recolhida para ser analisada.

Logo em seguida foi proposta a mesma atividade “Explorando o plano cartesiano“ para ser desenvolvida usando o GeoGebra. A atividade continha todas as instruções necessárias para o desenvolvimento, os objetivos e algumas abordagens teóricas. As atividades e as respectivas análises serão realizadas no Capítulo 5.

CAPÍTULO 5 - DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E RESPECTIVAS ANÁLISES DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos a análise a *priori* e a análise a *posteriori* das atividades realizadas durante o curso com o uso do *software* GeoGebra. Inserimos os protocolos das atividades desenvolvidas pelos alunos, as atividades elaboradas relacionadas ao plano cartesiano, à função afim e à função quadrática assim como as construções das atividades desenvolvidas pelos alunos.

5.1. 1º Encontro: descrição e análise das atividades 1 e 2

5.1.1 Atividade 1: Explorando o plano cartesiano

A atividade 1, tem como objetivo a localização de pontos nos quadrantes do plano cartesiano e posteriormente uma generalização dos pontos pertencentes aos quadrantes, assim como o reconhecimento dos pontos que estão situados sobre os eixos do sistema cartesiano ou sobre o plano cartesiano. A atividade de aprendizagem que compõe a atividade 2 tem como objetivo explorar a simetria entre pontos.

Essas são atividades de conversão e estão baseadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval que é a teoria usada no nosso trabalho de pesquisa. Diante disso, pretendemos que o aluno reconheça o mesmo objeto por duas representações diferentes, a algébrica e a gráfica.

Objetivos

- Reconhecer pontos no plano cartesiano.
- Identificar a abscissa e a ordenada de um ponto.
- Reconhecer que o sistema cartesiano divide o plano em 4 regiões denominadas quadrantes.
- Identificar quadrantes onde os pontos estão situados.
- Identificar as coordenadas dos pontos pertencentes ao plano cartesiano.
- Utilizar lápis e papel para explorar o plano cartesiano.
- Utilizar o *software* GeoGebra para explorar o plano cartesiano.

Recursos didáticos e tecnológicos

- Lápis e papel.
- Fotocópia da Atividade
- Laboratório de informática.
- *Software* GeoGebra.

Preparação

1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade1_seunome.doc".
2. Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.
3. Deixe visíveis os eixos.
4. Utilize o Campo de Entrada e digite os dados diretamente.

Processo de construção

a) Digite no campo de entrada o ponto A= (2,3) e tecle enter.

b) O ponto A pertence a qual quadrante?

c) Digite no campo de entrada o ponto B= (-3,4) e tecle enter.

d) O ponto B pertence a qual quadrante?

e) Digite no campo de entrada o ponto C= (-2,-3) e tecle enter.

f) O ponto C pertence a qual quadrante?

g) Digite no campo de entrada o ponto D= (5,-4) e tecle enter.

h) O ponto D pertence a qual quadrante?

i) Digite no campo de entrada os pontos: E= (2,0), em seguida tecle enter; F= (0,3) e tecle enter; G= (-2,0) e tecle enter e H= (0,- 4), tecle enter.

j) Onde estão localizados os pontos E, F,G e H? Eles pertencem a qual quadrante?

k) Qual a condição para que um ponto pertença ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?

l) Qual a condição para que um ponto pertença ao 1º quadrante? E ao 3º quadrante?

m) Qual a condição para que um ponto pertença ao eixo X? E ao eixo Y?

Ao término da atividade, foi criada uma pasta na medida da área de trabalho e a mesma foi salva intitulada "atividade1_seu nome".

5.1.2 Atividade 2 -Explorando o plano cartesiano

Objetivos

- Identificar a simetria dos pontos em relação aos eixos
- Identificar a simetria em relação a origem do sistema cartesiano.

Preparação:

1. Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.
2. Deixe visíveis os eixos.
3. Utilize o Campo de Entrada e digite os dados diretamente.

Processo de construção:

1. Digite no campo de entrada do GeoGebra os pontos A, B e C. Sendo A=(1,5), B=(1,-5) e C= (-1,5). Qual a relação entre os pontos: A e B? A e C? B e C?

Análise a *priori* da atividade 1

- Com relação aos itens b, d, f e h esperávamos que o aluno reconhecesse os pontos pertencentes aos quadrantes ímpares e pares por meio das características de cada par ordenado referentes às abscissas e ordenadas.
- Com relação ao item j esperávamos que o aluno reconhecesse que os pontos E e F que têm somente ordenada nula pertencessem ao eixo das abscissas e os pontos G e H que têm somente abscissa nula pertencessem ao eixo das ordenadas.
- Para o item k esperávamos que o aluno reconhecesse que para um ponto pertencer ao 2º quadrante terá como característica ordenada positiva e abscissa negativa e para o 4º quadrante abscissa positiva e ordenada negativa.
- Para o item l esperávamos que o aluno reconhecesse os pontos que tivessem como característica abscissa positiva e ordenada positiva e observasse que pertencem ao 1º quadrante e que os pontos com abscissa e ordenada negativas pertencessem ao 3º quadrante.
- Com relação ao item m esperávamos que o aluno reconhecesse que o ponto que tem somente ordenada nula pertencesse ao eixo das abscissas e os pontos que tem somente abscissas nulas pertencessem ao eixo das ordenadas.

Análise a *priori* da atividade 2

- Esperávamos que o aluno percebesse que sendo as abscissas positivas e as ordenadas opostas, o ponto A e o ponto B fossem simétricos em relação ao eixo-x, ou ao eixo das abscissas.

- Esperávamos que o aluno percebesse que sendo as abscissas de sinais opostos e as ordenadas positivas assumindo o mesmo valor, que o ponto A e o ponto C fossem simétricos em relação ao eixo-y, ou ao eixo das ordenadas.

- Esperávamos que o aluno percebesse as abscissas de sinais opostos e as ordenadas de sinais opostos, porém assumindo os mesmos valores em módulo. E, por fim, que os pontos B e C fossem simétricos em relação à origem.

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 1º. ENCONTRO

No decorrer do desenvolvimento das atividades observamos que houve dúvidas de alguns alunos tais como:

- qual seria a orientação dos quadrantes no plano cartesiano;
- a localização de pontos referentes ao 4º quadrante;
- pontos que estão situados sobre os eixos, a quais quadrantes os mesmos pertencem;
- algumas confusões com os termos abscissa e ordenada.

Essas dúvidas interferiram diretamente no desenvolvimento da atividade e consequentemente poderão interferir em estudos futuros com temas relacionados à função se elas persistirem. De acordo com Ardenghi (2008) em sua pesquisa sobre o Ensino Aprendizagem do conceito de Função, cujo objetivo era compreender as dificuldades sobre o conceito da mesma, a autora destaca que os alunos apresentam dificuldades relacionadas ao conteúdo da Matemática Fundamental e, como consequência, tais dificuldades acabam por interferir no aprendizado do tópico em estudo. Então percebemos que era necessário retomar o conteúdo abordado no desenvolvimento das atividades para esclarecermos as dúvidas que surgiram durante a sua realização.

Também discutimos toda a atividade realizada com o GeoGebra. Chamamos a atenção dos alunos para que observassem e fizessem comparação da janela Algébrica com a Janela de Visualização, dando ênfase à mudança de representação, que é a saída da representação algébrica para a representação gráfica, o que na teoria de Registros de Representação Semiótica, é denominado de conversão.

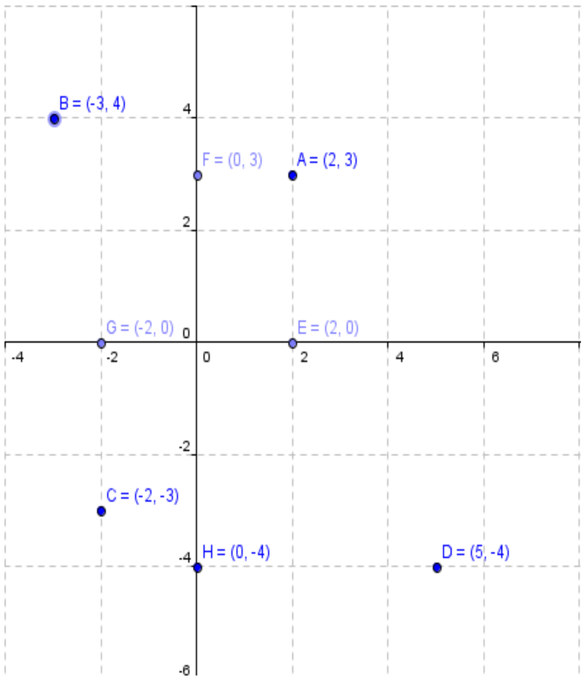
Observamos, neste encontro, que os alunos ficaram muito entusiasmados com o desenvolvimento das atividades e demonstraram um grande interesse pelo *software* GeoGebra.

Com relação à teoria de Duval, Registros de Representação Semiótica, as atividades estavam baseadas na conversão, mudança de representação, sair da representação algébrica para a gráfica ou da gráfica para a algébrica. Procuramos enfatizar bem isto com os alunos, afim de que pudessem sempre relacionar a representação da Janela Algébrica com a Janela de Visualização do GeoGebra.

Para encerrar o primeiro encontro, questionamos aos alunos se existia alguma diferença na realização da primeira atividade, na qual utilizamos somente lápis e papel, em relação à atividade desenvolvida usando o *software*. E todos foram unânimes em responder que: "O *software* propicia uma maior facilidade para realização da atividade como também sobre a visualização gráfica". Chamamos a atenção dos mesmos para que por mais sofisticado que seja um *software*, este apenas contribui para auxiliar na compreensão da atividade desenvolvida. Ainda esclarecemos que para haver aprendizagem é necessário que o professor tenha conhecimento e domínio do conteúdo que está em estudo, não basta apenas ter domínio das ferramentas do *software*.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES 1 e 2 DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

Construção feita pelo aluno (A)



Protocolo 1 – Atividade 1 explorando o plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

Protocolo 2 – Atividade 2 explorando o plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

a) Digite no campo de entrada o ponto A= (2,3) e tecle enter

b) O ponto A pertence a qual quadrante?

Resposta:

no 1º quadrante

c) Digite no campo de entrada o ponto B= (-3,4) e tecle enter

d) O ponto B pertence a qual quadrante?

Resposta:

no 2º quadrante

e) Digite no campo de entrada o ponto C= (-2,-3) e tecle enter

f) O ponto C pertence a qual quadrante?

Resposta:

3º quadrante.

g) Digite no campo de entrada o ponto D= (5,-4) e tecle enter.

h) O ponto D pertence a qual quadrante?

Resposta:

4º quadrante.

i) Digite no campo de entrada os pontos: E= (2,0) tecle enter; F= (0,3) tecle enter; G= (-2,0) tecle enter e H= (0,- 4), tecle enter.

j) Onde estão localizados os pontos E, F, G e H? Eles pertencem a qual quadrante?

Resposta:

1º, 2º, 3º quadrantes.

k) Qual a condição para que um ponto pertença ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?

Resposta:

2º do lado negativo de X e do lado positivo de Y.
4º do lado negativo de Y e do positivo de X.

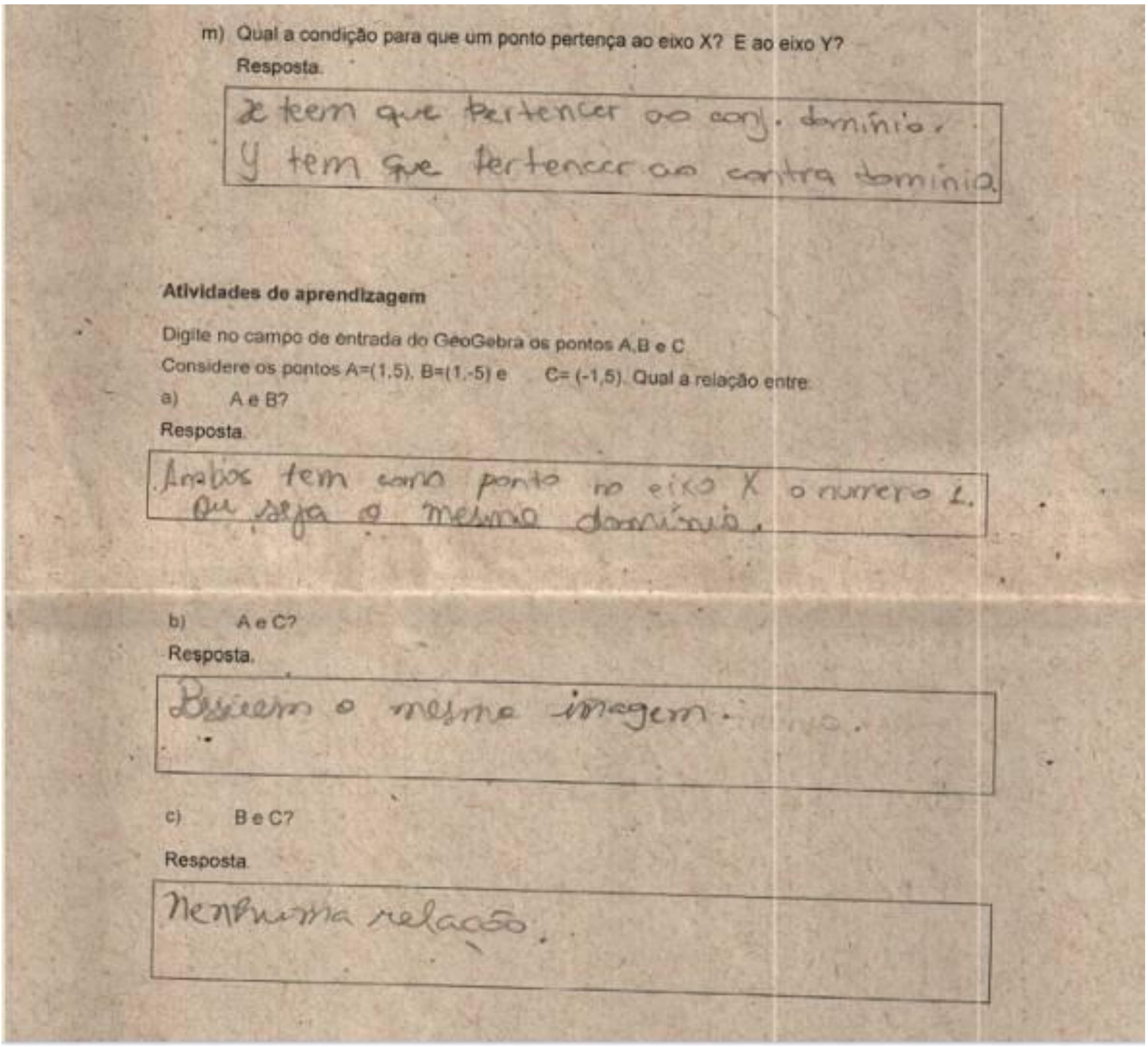
l) Qual a condição para que um ponto pertença ao 1º quadrante? E ao 3º quadrante?

Resposta:

1º ele tem que estar do lado positivo de X e de Y.

Protocolo 3 - Atividade explorando o plano cartesiano - aluno (A)

Fonte: O Autor (2012)



m) Qual a condição para que um ponto pertença ao eixo X? E ao eixo Y?
Resposta.

x tem que pertencer ao conj. domínio.
Y tem que pertencer ao contra dominio

Atividades de aprendizagem

Digite no campo de entrada do GeoGebra os pontos A,B e C
Considere os pontos A=(1,5), B=(1,-5) e C= (-1,5). Qual a relação entre
a) A e B?
Resposta.

Ambos tem como ponto no eixo X o numero 1.
ou seja o mesmo domínio.

b) A e C?
Resposta.

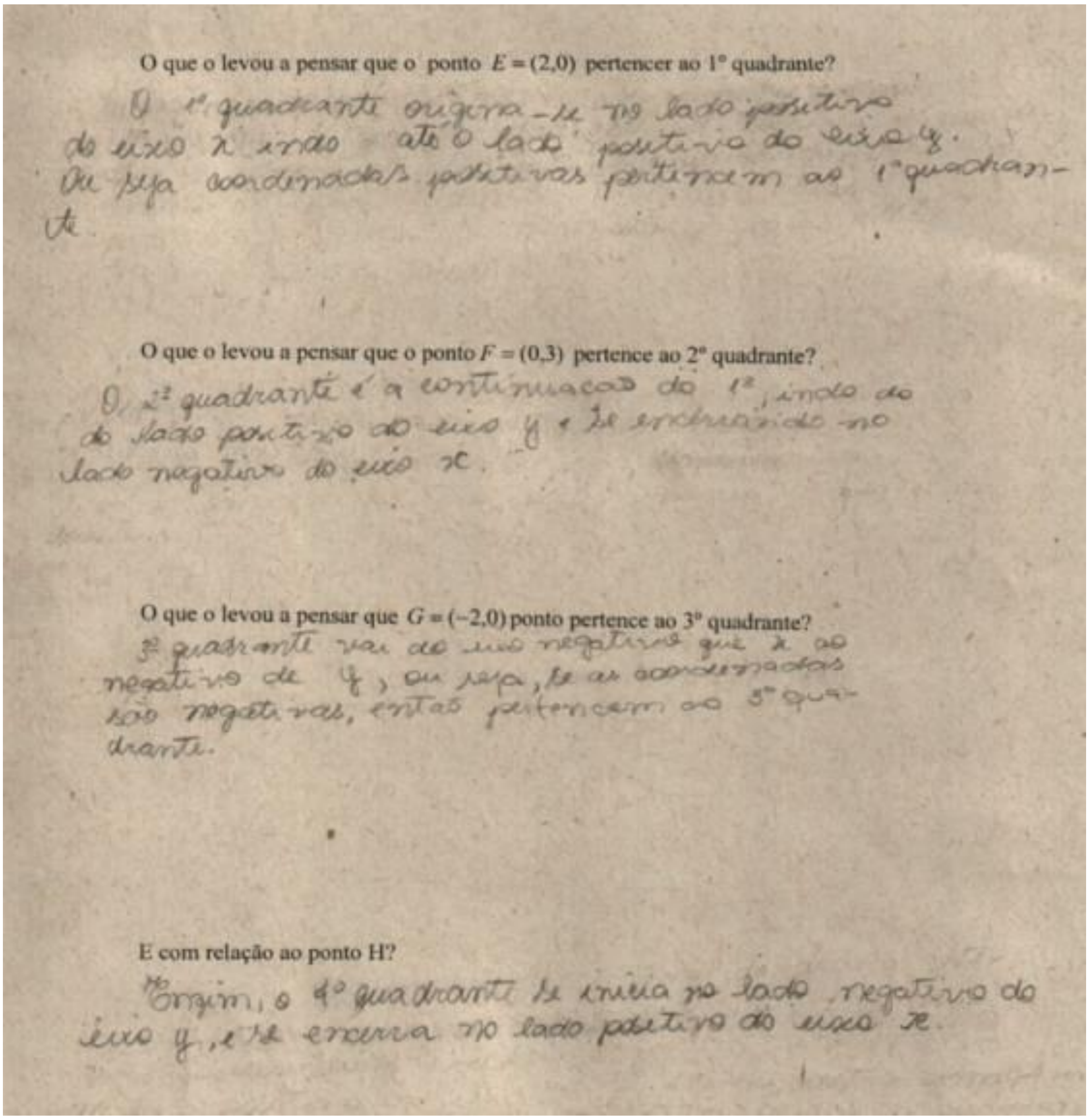
Possuem o mesmo imagem.

c) B e C?
Resposta.

Nenhuma relação.

Protocolo 4 - Continuação atividade explorando o plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

Observamos durante a análise do item j, da atividade 1, que o aluno não soube precisar a localização dos pontos que estão situados sobre o plano cartesiano ou sobre os eixos coordenados. Percebemos que no entendimento do aluno os eixos fazem parte dos quadrantes. Levantamos a hipótese: Será que o aluno imagina que os eixos coordenados fazem parte dos quadrantes? Perguntamos para o aluno: O que o levou a pensar que os pontos E, F, G e H pertencessem aos quadrantes? Veja protocolo a seguir.



O que o levou a pensar que o ponto $E = (2,0)$ pertencer ao 1° quadrante?

O 1º quadrante origina-se no lado positivo do eixo x indo até o lado positivo do eixo y. Ou seja coordenadas positivas pertencem ao 1º quadrante.

O que o levou a pensar que o ponto $F = (0,3)$ pertence ao 2° quadrante?

O 2º quadrante é a continuação do 1º, indo do do lado positivo do eixo y e se encerrando no lado negativo do eixo x.

O que o levou a pensar que $G = (-2,0)$ ponto pertence ao 3° quadrante?

3º quadrante vai do eixo negativo que x ao negativo de y, ou seja, se as coordenadas são negativas, então pertencem ao 3º quadrante.

E com relação ao ponto H?

Enfim, o 4º quadrante se inicia no lado negativo do eixo y, e se encerra no lado positivo do eixo x.

Protocolo 5 - Atividade explorando o plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

Depois de analisar o protocolo 5 percebemos que nossa hipótese foi confirmada e que realmente o aluno imagina que os eixos coordenados fazem parte dos quadrantes.

Com relação à atividade 2 (atividade de aprendizagem), após analisarmos as respostas do aluno sobre qual a relação existentes entre os pontos A, B e C, percebemos que as mesmas não atingiram o objetivo proposto, uma vez que, na elaboração das questões faltou especificar qual o tipo de relação poderia existir entre os referidos pontos, que seria a relação de simetria. As respostas do aluno foram analisadas e consideradas de acordo com outras relações existentes em que o mesmo conseguiu extrair.

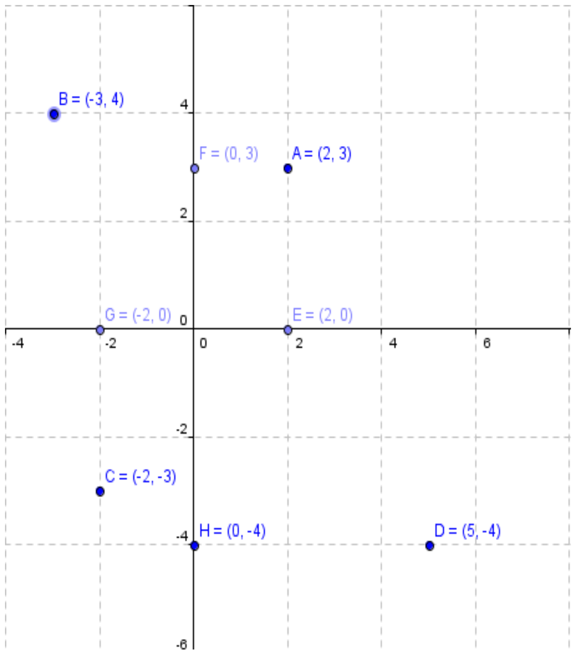
Conclusão aluno (A)

Depois de analisarmos todos os itens dos protocolos do aluno, percebemos que o mesmo inclui os eixos como pertencentes aos quadrantes e que nossa hipótese levantada foi confirmada.

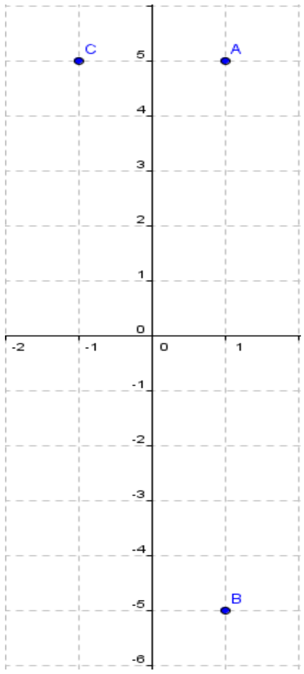
Ainda verificamos que a atividade 2 não atingiu os objetivos propostos, pois, durante a elaboração das questões não foi feita nenhuma menção sobre a relação de simetria. A atividade será reelaborada para ser reaplicada no *redesign*, de acordo com o *Design Research* metodologia que dá sustentação ao nosso trabalho. Os demais itens corresponderam à nossa expectativa.

Aluno (B)

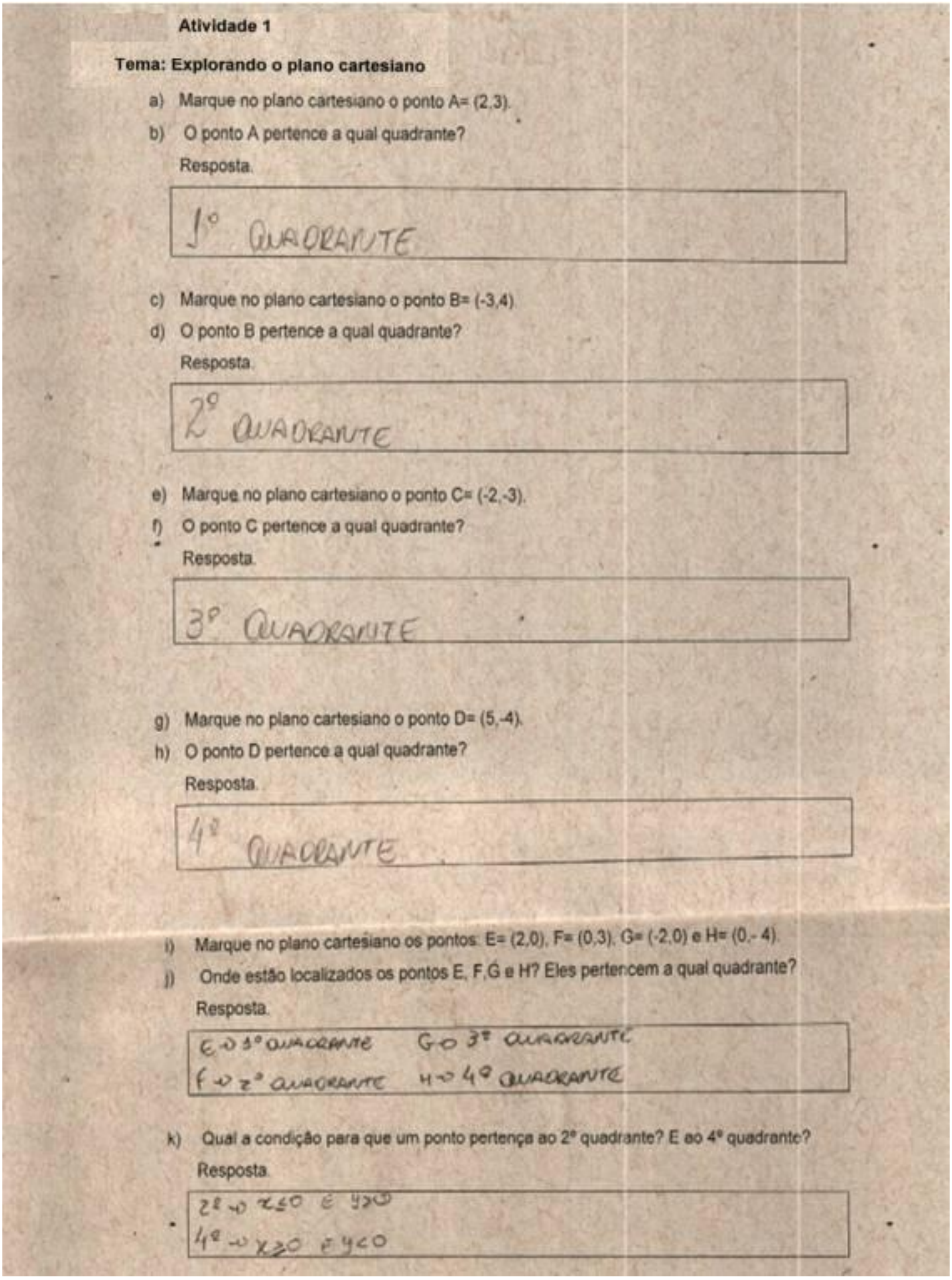
Construção feita pelo aluno (B)



Protocolo 6 – Atividade 1 explorando o plano cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 7 – Atividade 2 explorando o plano cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Atividade 1

Tema: Explorando o plano cartesiano

a) Marque no plano cartesiano o ponto A= (2,3).

b) O ponto A pertence a qual quadrante?

Resposta.

1º QUADRANTE

c) Marque no plano cartesiano o ponto B= (-3,4).

d) O ponto B pertence a qual quadrante?

Resposta.

2º QUADRANTE

e) Marque no plano cartesiano o ponto C= (-2,-3).

f) O ponto C pertence a qual quadrante?

Resposta.

3º QUADRANTE

g) Marque no plano cartesiano o ponto D= (5,-4).

h) O ponto D pertence a qual quadrante?

Resposta.

4º QUADRANTE

i) Marque no plano cartesiano os pontos: E= (2,0), F= (0,3), G= (-2,0) e H= (0,- 4).

j) Onde estão localizados os pontos E, F,G e H? Eles pertencem a qual quadrante?

Resposta.

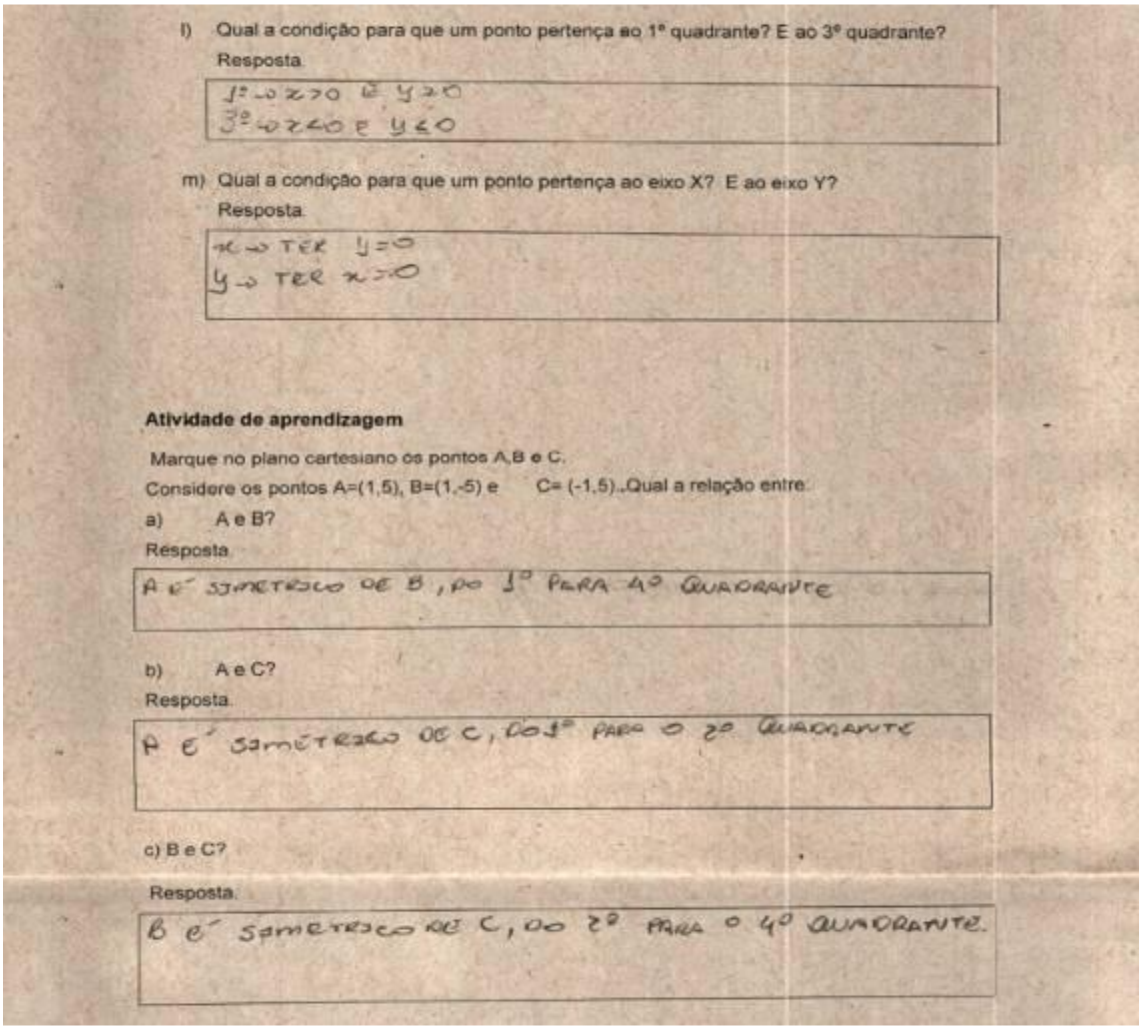
E → 1º QUADRANTE G → 3º QUADRANTE
F → 2º QUADRANTE H → 4º QUADRANTE

k) Qual a condição para que um ponto pertença ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?

Resposta.

2º → $x \leq 0$ E $y > 0$
4º → $x \geq 0$ E $y < 0$

Protocolo 8- Atividade explorando o plano cartesiano – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



l) Qual a condição para que um ponto pertença ao 1º quadrante? E ao 3º quadrante?

Resposta

$1^{\circ} \rightarrow x > 0$ e $y > 0$
$3^{\circ} \rightarrow x < 0$ e $y < 0$

m) Qual a condição para que um ponto pertença ao eixo X? E ao eixo Y?

Resposta

$x \rightarrow$ TER $y = 0$
$y \rightarrow$ TER $x = 0$

Atividade de aprendizagem

Marque no plano cartesiano os pontos A,B e C.

Considere os pontos A=(1,5), B=(1,-5) e C= (-1,5)..Qual a relação entre

a) A e B?

Resposta

A É SIMÉTRICO DE B, DO 1º PARA 4º QUADRANTE

b) A e C?

Resposta

A É SIMÉTRICO DE C, DO 1º PARA O 2º QUADRANTE

c) B e C?

Resposta

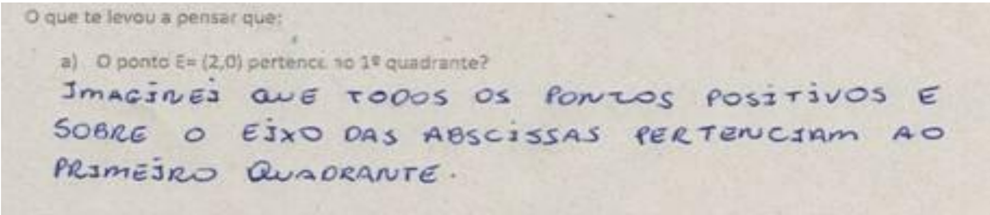
B É SIMÉTRICO DE C, DO 2º PARA O 4º QUADRANTE.

Protocolo 9- Continuação do protocolo 9 atividade explorando o plano cartesiano – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

Durante a análise do item j, da atividade 1, percebemos que o aluno não conseguiu desenvolver a conversão relacionada aos pontos A, B e C, que seria reconhecer que um ponto de ordenada nula pertence ao eixo das abscissas e os pontos de abscissa nula pertencem ao eixo das ordenadas. Assim, não correspondeu à nossa expectativa e, consequentemente, não atingiu o objetivo proposto.

Levantamos a hipótese de que o aluno poderia pensar que os eixos poderiam fazer parte dos quadrantes e o perguntamos: o que te levou a pensar que o ponto E=(2,0) pertencesse ao 1º quadrante?

A partir da resposta apresentada pelo aluno ao nosso questionamento, a nossa hipótese foi confirmada, conforme protocolo a seguir.


O que te levou a pensar que:

a) O ponto E= (2,0) pertence ao 1º quadrante?

IMAGINEI QUE TODOS OS PONTOS POSITIVOS E SOBRE O EIXO DAS ABSCISSAS PERTENCIAM AO PRIMEIRO QUADRANTE.

Protocolo 10 - Atividade explorando o plano cartesiano – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

Percebemos que nos itens k e l que o aluno não conseguiu generalizar os pontos pertencentes aos quadrantes, incluindo os eixos coordenados como pertencentes aos mesmos, pelo fato de ter pensado que os eixos fizessem parte dos quadrantes conforme a hipótese levantada e confirmada.

Com relação à atividade de aprendizagem, o aluno reconheceu que existia uma relação de simetria entre os pontos, porém, não conseguiu indicar o eixo de simetria entre os mesmos. Assim, não poderia ter encontrado outras relações entre os pontos dados.

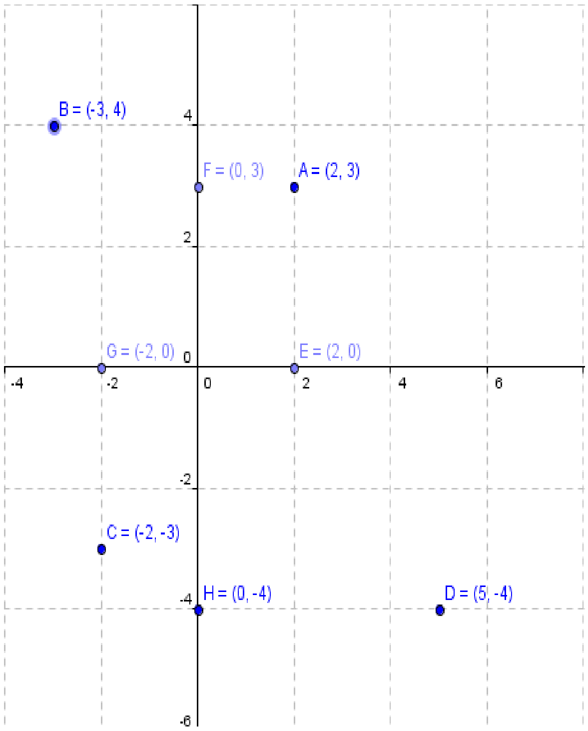
Essa atividade não atingiu o objetivo proposto, pois, na elaboração das questões, faltou especificar qual o tipo de relação poderia existir entre os pontos, ou seja, a relação de simetria.

Conclusão aluno (B)

Ao analisarmos os itens da atividade proposta, percebemos que o aluno não conseguiu generalizar os pontos pertencentes aos quadrantes e, assim como o aluno (A), inclui os eixos do sistema cartesiano como pertencentes aos quadrantes. A atividade 2 apesar do aluno identificar a relação de simetria entre os pontos, a mesma não atingiu os nossos objetivos, pois na sua elaboração não foi feita nenhuma menção em relação à simetria; o que será feito na reelaboração da questão para o *redesign*. Os demais itens corresponderam às nossas expectativas.

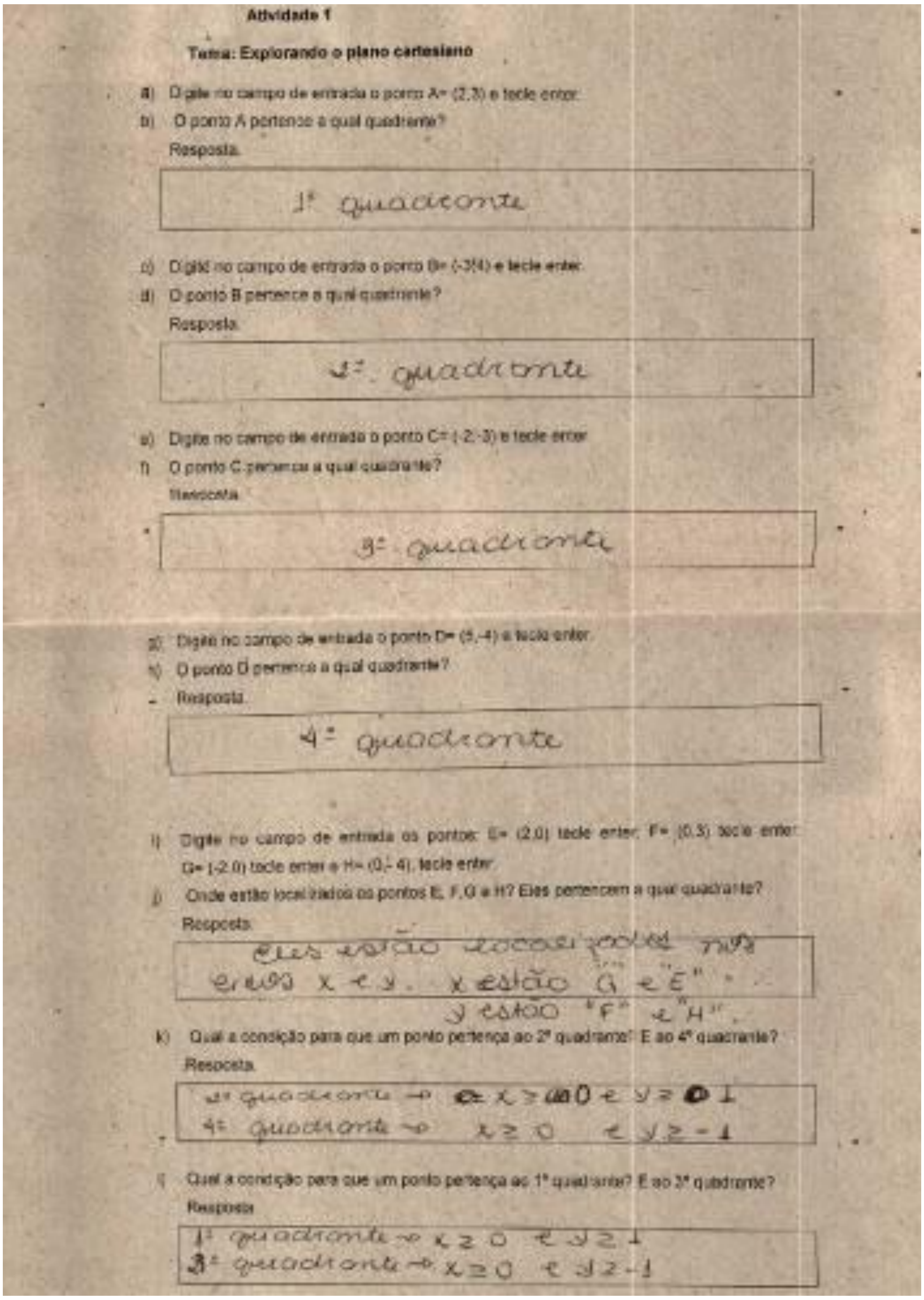
Aluno (C)

Construção feita pelo aluno (C)



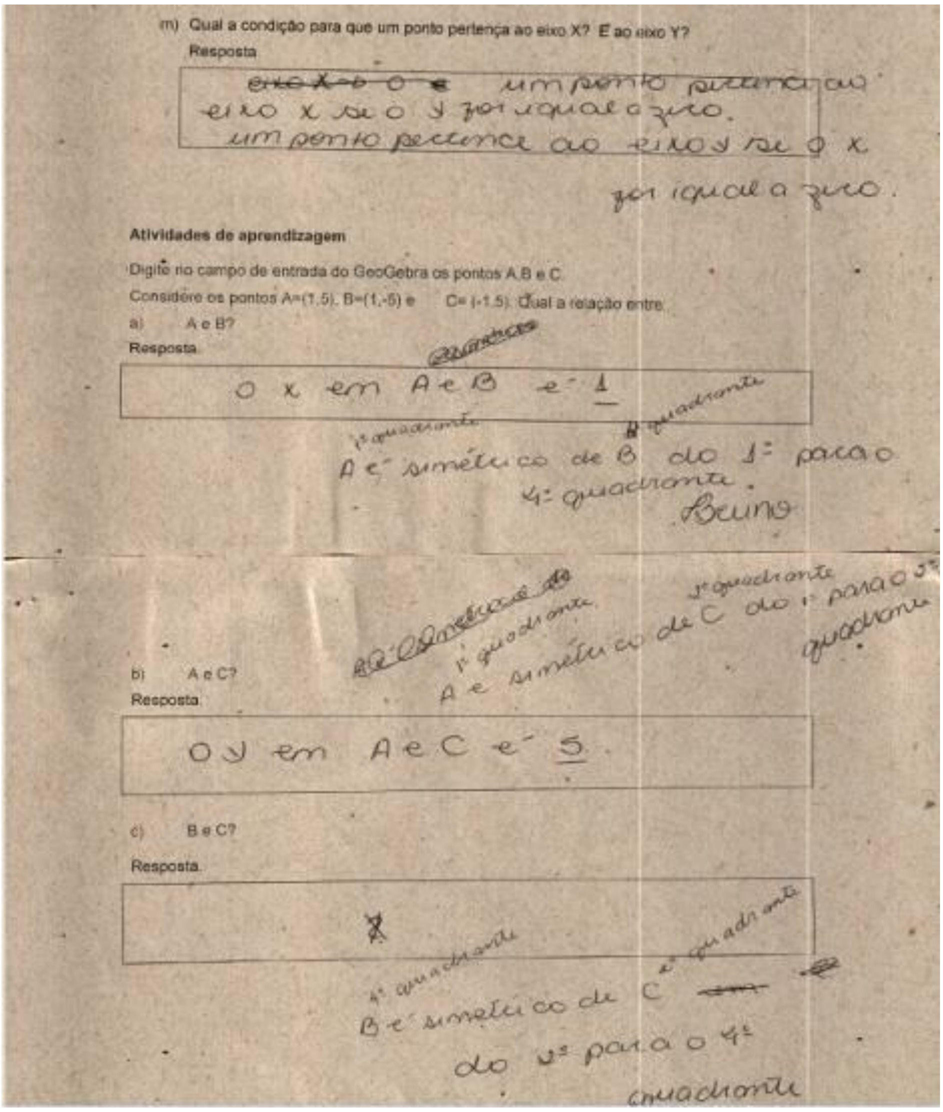
Protocolo 11 - Atividade 1 explorando o plano cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Protocolo 12 – Atividade 2 explorando o plano cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 13 atividade explorando o plano cartesiano – aluno (C)

Fonte: O Autor (2012)



(m) Qual a condição para que um ponto pertença ao eixo X? E ao eixo Y?

Resposta

um ponto pertence ao eixo x se o y for igual a zero.
um ponto pertence ao eixo y se o x for igual a zero.

Atividades de aprendizagem

Digite no campo de entrada do GeoGebra os pontos A,B e C.

Considere os pontos A=(1,5), B=(1,-5) e C= (-1,5). Qual a relação entre:

a) A e B?

Resposta

O x em A e B é 1

A é simétrico de B do 1º para o 4º quadrante.

Bruno

b) A e C?

Resposta

O y em A e C é 5.

A é simétrico de C do 1º para o 2º quadrante

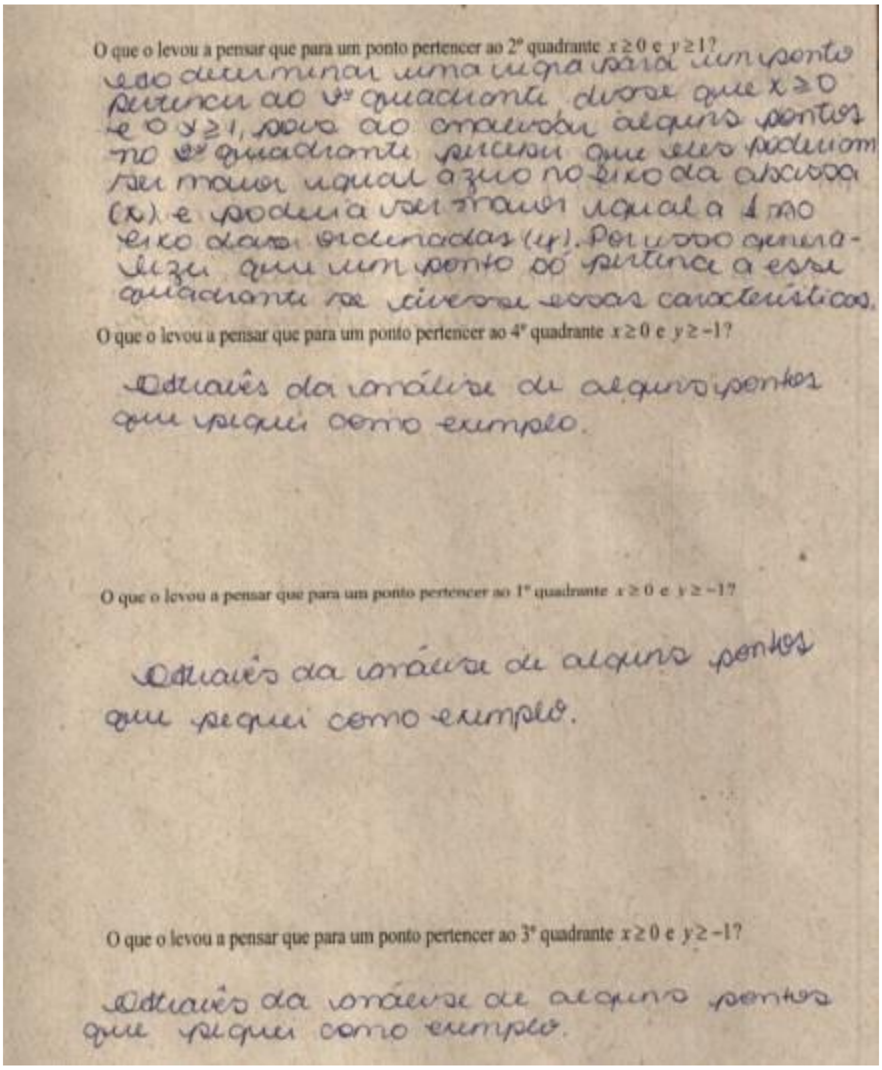
c) B e C?

Resposta

B é simétrico de C do 2º para o 4º quadrante

Protocolo 13 - Continuação protocolo 13 atividade explorando o plano cartesiano – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Observamos na análise dos itens k e l, da atividade 1, que o aluno não conseguiu generalizar os pontos pertencentes aos quadrantes. Levantamos a hipótese de que o aluno poderia imaginar que os eixos fizessem parte dos quadrantes. Diante disso, perguntamos ao aluno: “O que o levou a pensar que para um ponto pertencer ao 2º quadrante a abscissa tem que ser maior ou igual a zero ($x \geq 0$) e a ordenada maior que um ($y > 1$)?”. Isso pode ser observado no protocolo abaixo:



O que o levou a pensar que para um ponto pertencer ao 2º quadrante $x \geq 0$ e $y \geq 1$?

Eu ao determinar uma regra para um ponto pertencer ao 1º quadrante disse que $x \geq 0$ e o $y \geq 1$, pois ao observar alguns pontos no 1º quadrante percebi que eles poderiam ser maior igual a zero no eixo da abscissa (x) e poderia ser maior igual a 1 no eixo das ordenadas (y). Por isso generalizei que um ponto só pertence a esse quadrante se tivesse essas características.

O que o levou a pensar que para um ponto pertencer ao 4º quadrante $x \geq 0$ e $y \geq -1$?

Através da análise de alguns pontos que peguei como exemplo.

O que o levou a pensar que para um ponto pertencer ao 1º quadrante $x \geq 0$ e $y \geq -1$?

Através da análise de alguns pontos que peguei como exemplo.

O que o levou a pensar que para um ponto pertencer ao 3º quadrante $x \geq 0$ e $y \geq -1$?

Através da análise de alguns pontos que peguei como exemplo.

Protocolo 14 - Atividade explorando o plano cartesiano - do aluno (C)

Fonte: O Autor (2012)

Percebemos pelas respostas do aluno que o mesmo não soube precisar de forma geral quais os pontos que poderiam pertencer aos quadrantes. Em razão disso, perguntamos para ele: “Você teve dificuldade de identificar a localização dos pontos propostos na atividade 1?”

E obtivemos como resposta: “Identifiquei, mas na verdade não tinha muita certeza. Tanto que fiquei confuso quando foi para fazer a generalização.”

Com relação às questões relacionadas à atividade 2 (atividade de aprendizagem) observamos que o aluno identificou a relação de simetria entre os pontos A, B e C mas não soube indicar o eixo de simetria; assim como também poderia ter encontrado outras relações concernentes aos referidos pontos.

Reconhecemos que a atividade 2 não atingiu o objetivo proposto, pois na sua elaboração não foi feita nenhuma menção à simetria. Por isso, a mesma será corrigida para ser reaplicada no *redesign*. Isto só é possível porque a metodologia que dá sustentação ao nosso trabalho de pesquisa, *Design Research*, nos dá essa possibilidade.

Conclusão aluno (C)

Observamos durante a análise das questões que o aluno não soube fazer uma generalização dos pontos que pertencem ao plano cartesiano. Também percebemos que o aluno não tem segurança para localizar e identificar pontos pertencentes aos quadrantes e aos eixos coordenados. E assim de acordo com os Registros de Representação Semiótica, percebemos que o aluno tem dificuldade de reconhecer o mesmo objeto por duas notações diferentes.

5.2. 2º Encontro: descrição e análise das atividades 3 e 4

Neste encontro estava previsto desenvolver as atividade 3 "Domínio e imagem de uma função afim" e a atividade 4 sobre "função afim constante".

5.2.1 Atividade 3 – Domínio e imagem de uma função afim

Esta atividade tem como objetivo identificar, com o uso do GeoGebra, elementos do domínio de uma função e elementos do conjunto imagem.

Objetivos:

- Investigar com o uso do GeoGebra elementos pertencentes ao domínio de uma função.
- Investigar com o uso do GeoGebra elementos pertencentes ao conjunto imagem.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade 3

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade3_seunome.doc".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Deixe visíveis os eixos.

Utilize o Campo de Entrada para digitar os dados diretamente.

Processo de construção

1. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das abscissas e determine o ponto A.

2. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das ordenadas e determine o ponto B.

Abordagem teórica

1) Clique sobre o ponto A e movimente-o em diversos sentidos e descreva o seu comportamento.
2) Clique sobre o ponto B e movimente-o em diversos sentidos e descreva o seu comportamento.

Abra uma nova janela do GeoGebra

1. Digite no campo de entrada a função f dada por $f(x) = x+1$, depois tecle enter.
2. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das abscissas e determine o ponto A.
3. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), clique sobre o ponto A e, logo em seguida, sobre o eixo das abscissas para determinar uma perpendicular por A.
4. Ative a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a interseção da reta perpendicular com o gráfico da função e obtenha o ponto B.
5. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), clique sobre o ponto B, depois sobre o eixo das ordenadas para obter uma reta perpendicular por B.
6. Ative a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a interseção da reta perpendicular com o eixo das ordenadas e obtenha C.
7. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B (vai abrir uma janela), clique sobre a opção renomear (vai abrir uma nova janela), digite C e clique em ok.
8. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C (vai abrir uma janela), em seguida, clique sobre a opção renomear (vai abrir uma nova janela), digite B e clique em ok.
9. Ative a ferramenta Segmento Definido por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre A e C, depois sobre C e B.
10. Desabilite na Janela Algébrica as retas perpendiculares a e b.
11. Clique com o botão direito do *mouse*, sobre o segmento $\overline{AC}$ (vai abrir uma janela), clique sobre propriedades (vai abrir uma nova janela), clique sobre a opção "estilo", em estilo de linhas, selecione linha tracejada, clique em fechar.
12. Clique com o botão direito do *mouse,* sobre o segmento $\overline{CB}$ (vai abrir uma janela), clique sobre propriedades (vai abrir uma nova janela), clique sobre a opção "estilo", em estilo de linhas, selecione linha tracejada, clique em fechar.

13. Clique sobre o ponto A, mantenha-o pressionado e arraste-o ao longo do eixo x, para a direita e para a esquerda. Observe os valores correspondentes de A em C.

Análise a priori da Atividade 3

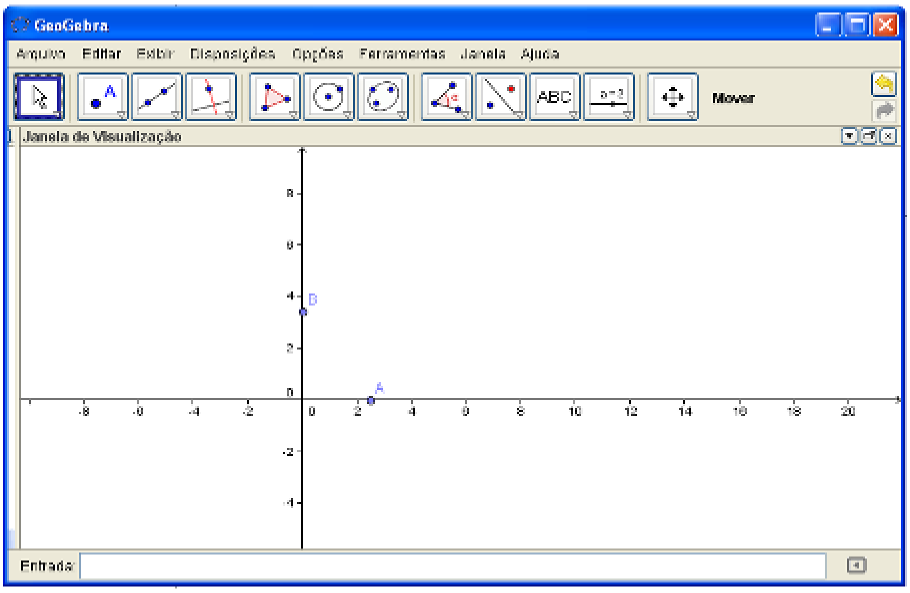


Figura 39- Atividade 3 domínio e imagem de uma função.
Fonte: O Autor (2012)

1. Esperávamos que o aluno descrevesse que o ponto A se move somente no sentido horizontal e sobre o eixo das abscissas ou eixo x.
2. Esperávamos que o aluno descrevesse que o ponto B se move somente na no sentido vertical e sobre o eixo y.

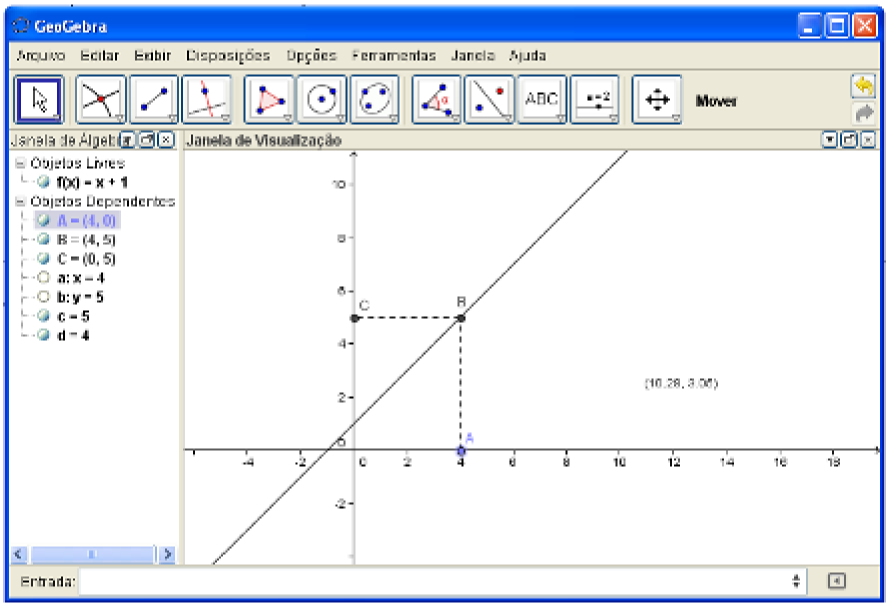


Figura 40 - Dominio e imagem de uma função afim
Fonte: O Autor (2012)

1. Em relação à função f dada por $f(x) = x+1$ como podemos definir os pontos A e B?

Esperávamos que o aluno reconhecesse os pontos A e B pertencentes à função f dada por $f(x) = x+1$, onde A pertencesse ao conjunto do domínio da função (eixo das abscissas) e B pertencesse ao conjunto imagem (eixo das ordenadas). Neste caso B é imagem é de A pela f .

2. Qual é a imagem de A para:

- A=(1,0)?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que a imagem de A pela f é 2.

- A=(0,0)?

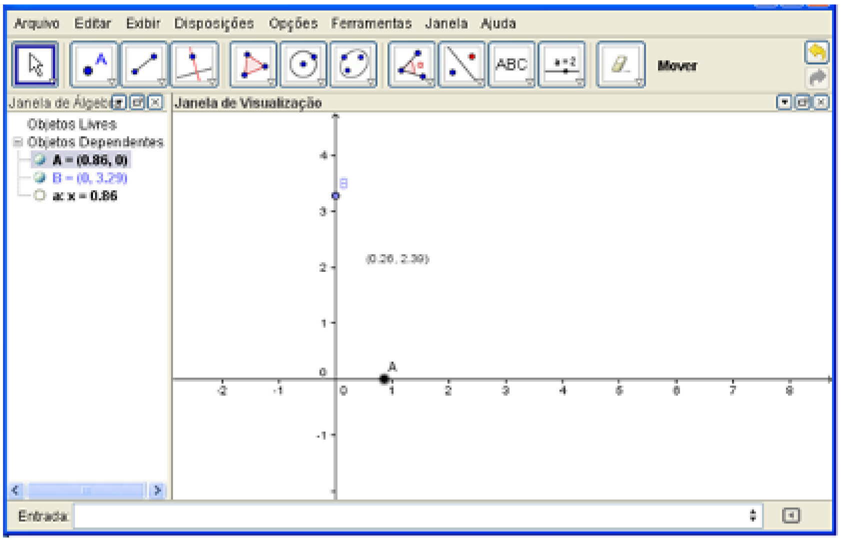
Esperávamos que o aluno reconhecesse que a imagem de A pela f é 1.

- A=(-1,0)?

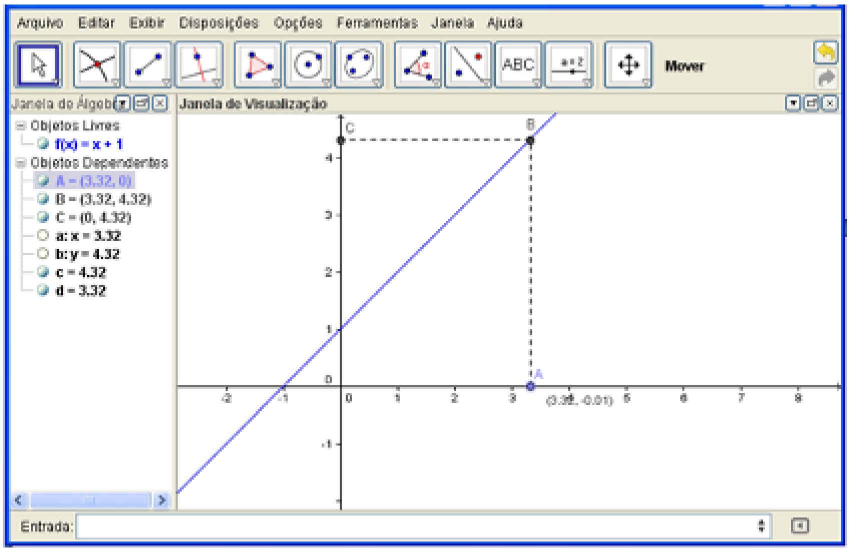
Esperávamos que o aluno reconhecesse que a imagem de A pela f é 0.

ANÁLISE DA ATIVIDADE 3 DESENVOLVIDA PELOS ALUNOS

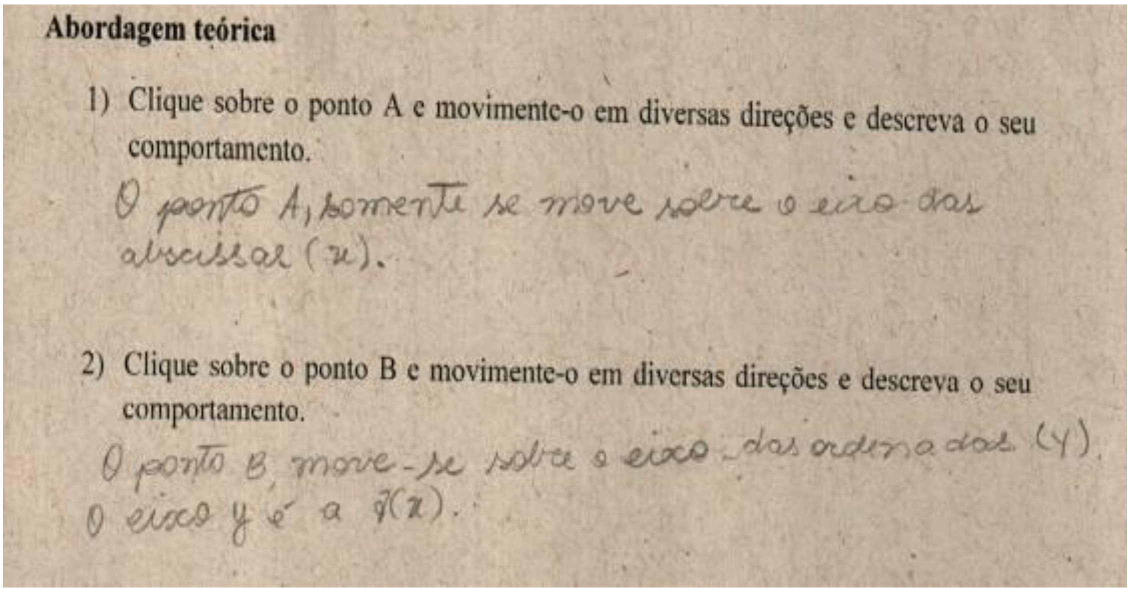
Aluno (A)



Protocolo 15– Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 16 – Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Abordagem teórica

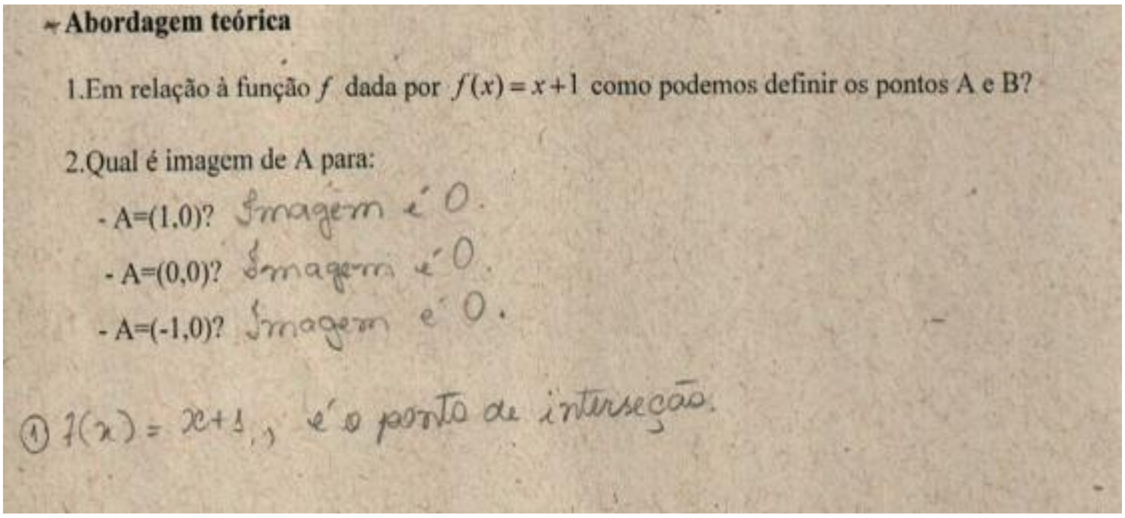
1) Clique sobre o ponto A e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.

O ponto A, somente se move sobre o eixo das abscissas (x).

2) Clique sobre o ponto B e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.

O ponto B move-se sobre o eixo das ordenadas (y).
O eixo y é a f(x).

Protocolo 17 - Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Abordagem teórica

1.Em relação à função f dada por $f(x)=x+1$ como podemos definir os pontos A e B?

2.Qual é imagem de A para:

- A=(1.0)? Imagem é 0.
- A=(0,0)? Imagem é 0.
- A=(-1,0)? Imagem é 0.

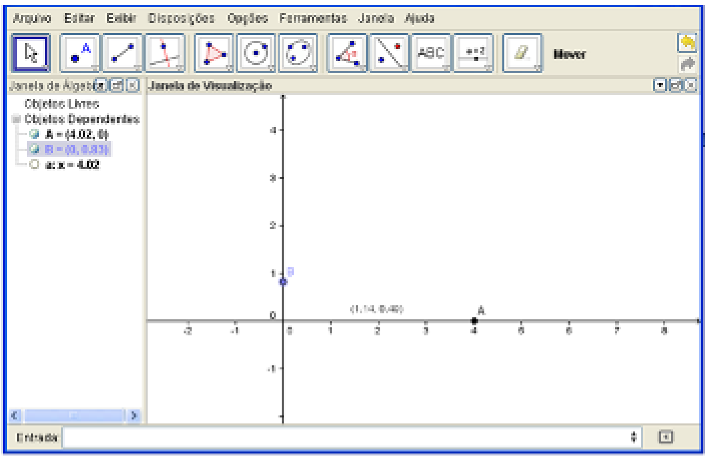
① f(x) = x+1, é o ponto de interseção.

Protocolo 18 - Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

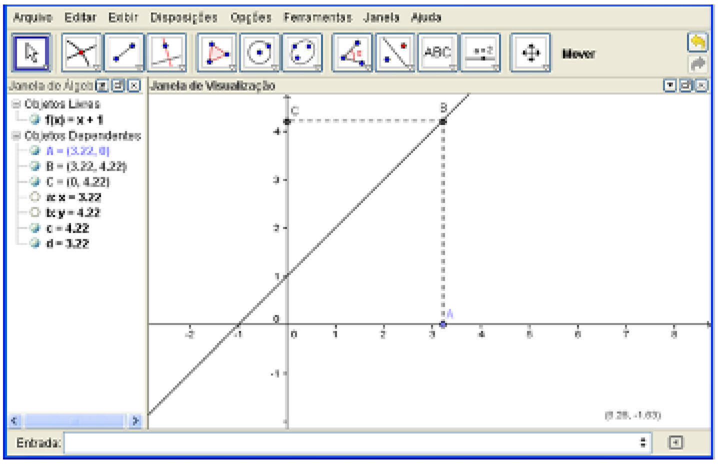
Conclusão aluno (A)

Durante a análise das questões, percebemos que o aluno não reconheceu os pontos A e B como elementos do domínio e imagem, respectivamente, da função afim definida por $f(x) = x+1$. Consequentemente, não realizou a conversão de acordo com os Registros de Representação Semiótica. Observamos, ainda, que o aluno não reconheceu a imagem dos pontos A=(1,0), A= (0,0). Depois da análise da questão, verificamos que a nomenclatura usada para os pontos poderia ter dificultado o entendimento do aluno para responder as questões propostas. Usaremos uma notação mais simples para abordagem do domínio e imagem da função afim no *redesign* desta atividade. Esta notação mais complexa pode ter contribuído para que o aluno não tenha conseguido reconhecer o mesmo objeto em duas notações diferentes.

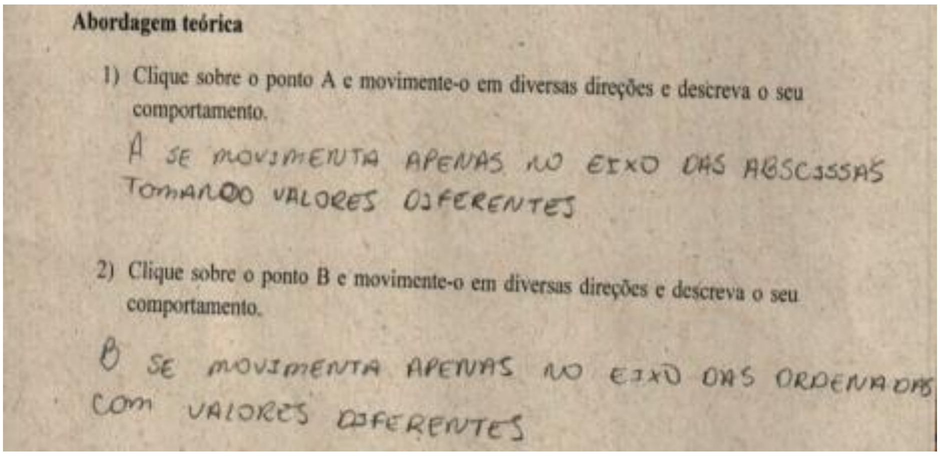
Aluno (B)



Protocolo 19 – Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 20 – Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Abordagem teórica

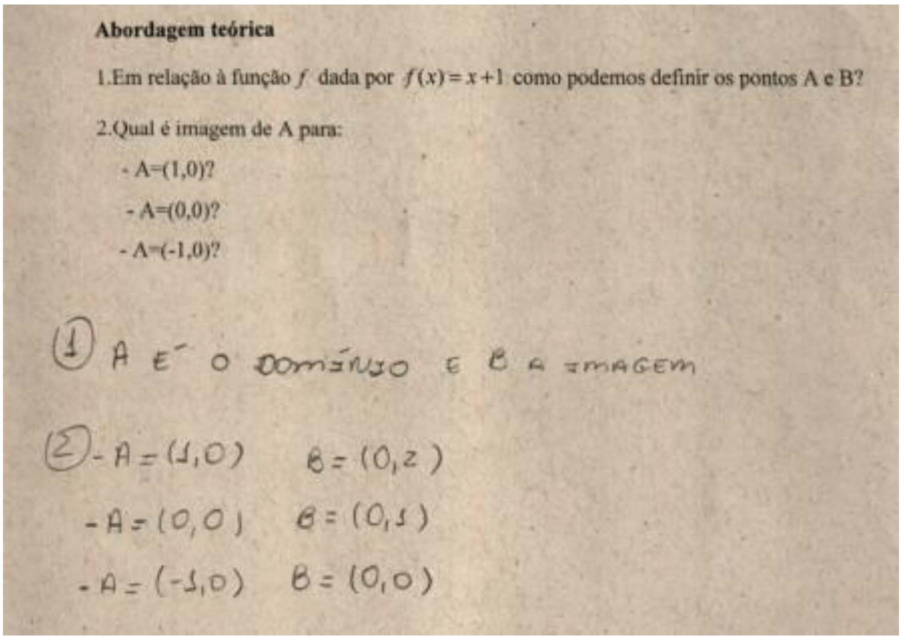
1) Clique sobre o ponto A e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.

A SE MOVIMENTA APENAS NO EIXO DAS ABSCISSAS TOMANDO VALORES DIFERENTES

2) Clique sobre o ponto B e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.

B SE MOVIMENTA APENAS NO EIXO DAS ORDENADAS COM VALORES DIFERENTES

Protocolo 21- Atividade domínio e imagem de uma função – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Abordagem teórica

1.Em relação à função f dada por $f(x) = x + 1$ como podemos definir os pontos A e B?

2.Qual é imagem de A para:

- A=(1,0)?
- A=(0,0)?
- A=(-1,0)?

1 A É O DOMÍNIO E B A IMAGEM

2 - A = (1,0) B = (0,2)

- A = (0,0) B = (0,1)

- A = (-1,0) B = (0,0)

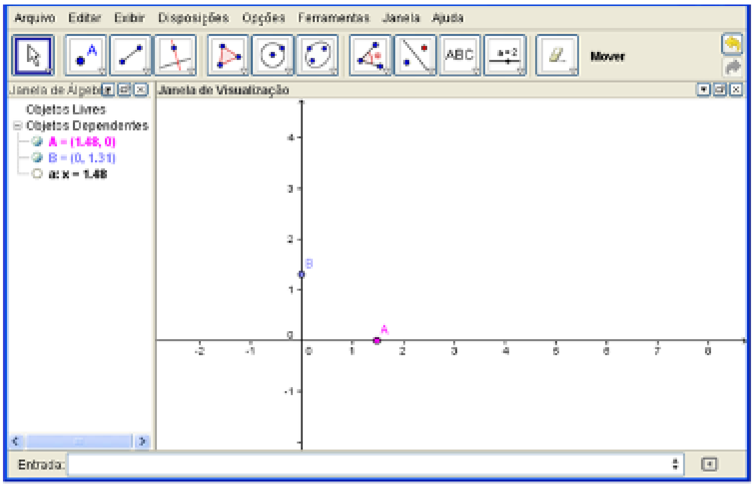
Protocolo 22- Atividade domínio e imagem de uma função – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

O aluno B cometeu um equívoco ao indicar que o ponto A= (1,0) tem como imagem o ponto B=(0,2) de acordo com o protocolo 22. Talvez a nomenclatura usada para indicar os pontos possa ter interferido na análise da questão pelo aluno.

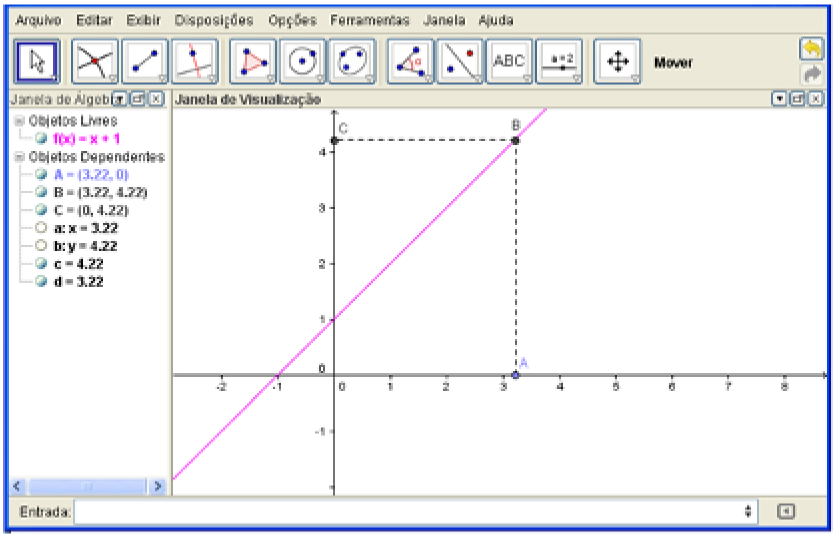
Conclusão aluno (B)

Com exceção dos pontos A e B as demais questões resolvidas pelo aluno corresponderam à nossa expectativa. Podemos perceber que o GeoGebra contribuiu para que o aluno investigasse e concluísse que os pontos A e B pertencessem, respectivamente, ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.

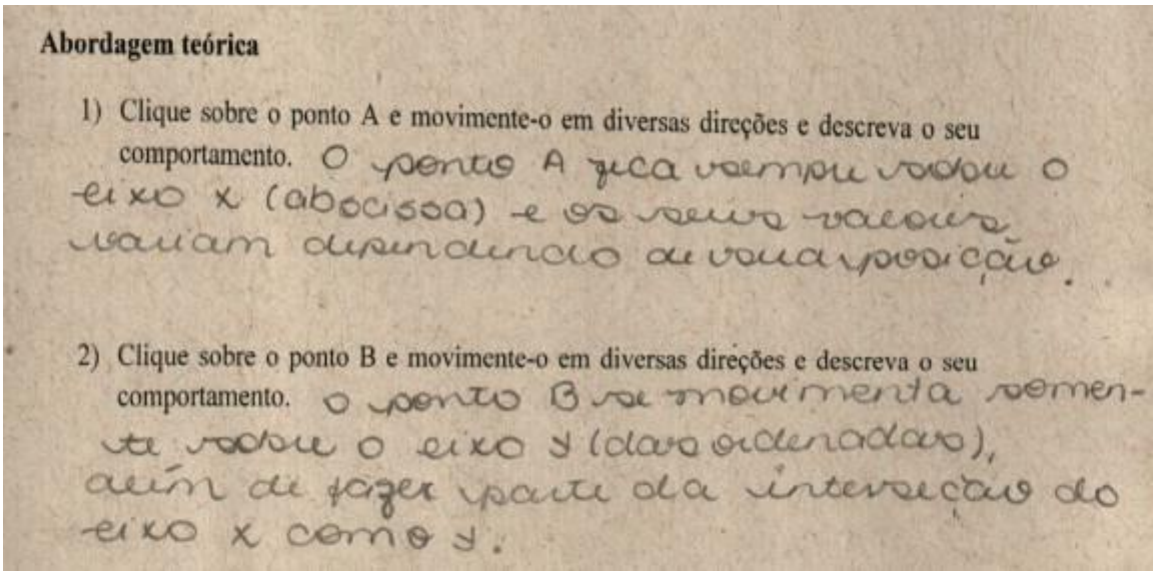
Aluno (C)



Protocolo 23 – Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 24 – Atividade 3 domínio e imagem de uma função afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

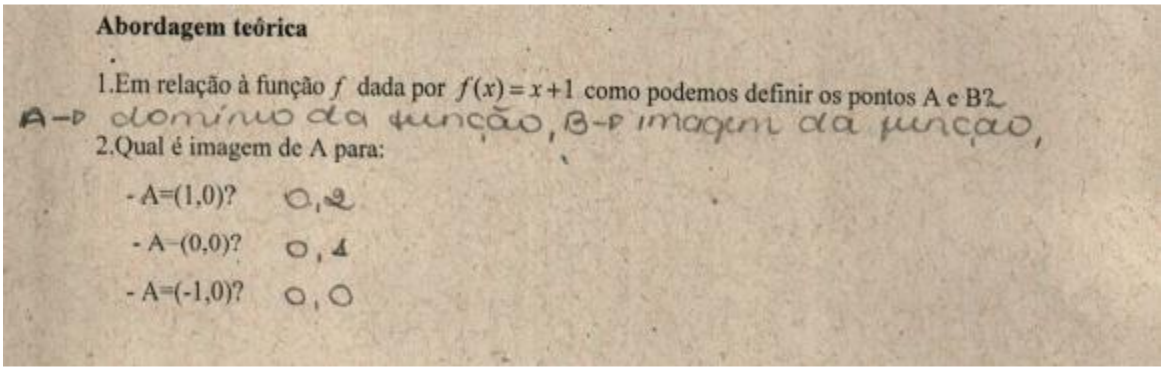


Abordagem teórica

1) Clique sobre o ponto A e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento. O ponto A fica sempre sobre o eixo x (abscissa) e os seus valores variam dependendo de sua posição.

2) Clique sobre o ponto B e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento. o ponto B se movimenta somente sobre o eixo y (das ordenadas), além de fazer parte da interseção do eixo x com o y.

Protocolo 25 - Atividade domínio e imagem de uma função – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Abordagem teórica

1.Em relação à função f dada por $f(x) = x+1$ como podemos definir os pontos A e B?
A→ domínio da função, B→ imagem da função,

2.Qual é imagem de A para:

- A=(1,0)? 0,2
- A=(0,0)? 0,1
- A=(-1,0)? 0,0

Protocolo 26 - Atividade domínio e imagem de uma função – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

A partir dos protocolos 25 e 26, talvez por falta de clareza da questão referente a notação, o aluno não conseguiu reconhecer a imagem dos referidos pontos A - questão 2. Isto pode ter contribuído para que a nossa expectativa não fosse correspondida.

5.2.2 Atividade 4 – Função Afim Constante

Esta atividade tinha como objetivo reconhecer uma função afim constante com a utilização do GeoGebra e a medida da área de uma figura plana, o trapézio. Assim como fazer uma associação da álgebra com a geometria plana. Nessa atividade, será utilizado o tratamento e a conversão.

Atividade 4 – Função Afim Constante

Questão adaptada do livro Matemática volume 1 versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola (BIANCHINI e PACCOLA, 1995, p.80).

Construção de uma função constante, por meio de medida da área, com a utilização do GeoGebra.

Objetivos

- Construir o conceito de função afim constante por meio de medida da área utilizando o *software* GeoGebra.
- Investigar e interpretar a medida da área do polígono como uma função f com o auxilio do GeoGebra.
- Deduzir uma lei de formação para uma função afim constante.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.
Laboratório de informática.
Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo “Atividade5_seunome”.
Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.
Utilize o Campo de Entrada.
Ative os eixos e malhas.

Processo de construção

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado AB marcar um ponto E a x cm de A. Por M traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. Obtendo dessa forma dois retângulos ABCD e AECD. Mostrar com o auxílio do GeoGebra que podemos enunciar uma fórmula para uma função afim linear.

1) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.
2) Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.
3) Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.
4) Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.
5) Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) e clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.

6) Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o lado AB, e obtenha o ponto E.

7) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obtenha por E uma perpendicular.

8) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC e obtenha F.

9) Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre os pontos E e F, obtendo o segmento $\overline{EF}$.

10) O segmento $\overline{AE}$ mede x cm e o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.

11) Na Janela Algébrica, clique sobre a bolinha da reta f $x = 4$ desabilitando-a.

12) Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A, E, F, D, A, obtenha, assim, dois retângulos ABCD e AEFD.

13) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

14) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da janela geométrica para obter o seletor g. Com o botão direito clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.

15) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.

16) Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter. Clique com o botão direito sobre P, clique sobre opção “Habilitar Rastro”. Na Janela Algébrica clique sobre a bolinha ao lado do ponto P desabilitando-o.

Abordagem teórica

1. Observe o que acontece com a medida da área do referido polígono AFDE quando as medidas de seus lados paralelos variam no intervalo de [0,6] do seletor. A medida da área do trapézio depende dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{FB}$? Descreva o que você observou.
2. A medida da área do trapézio pode ser interpretada como uma função? Caso afirmativo, defina esta função.
3. Deduza a fórmula da medida da área do polígono AFDE, nomeando-a como uma função f.

4. Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter.

5. Clique com o botão direito sobre P (vai abrir uma janela), clique sobre a opção habilitar rastro. Ative animação. Descreva o comportamento do ponto P.

6. Digite no campo de entrada a função que você deduziu, tecle enter e descreva o que acontece com a função f e a semirreta descrita por P.

Análise a priori da atividade 4

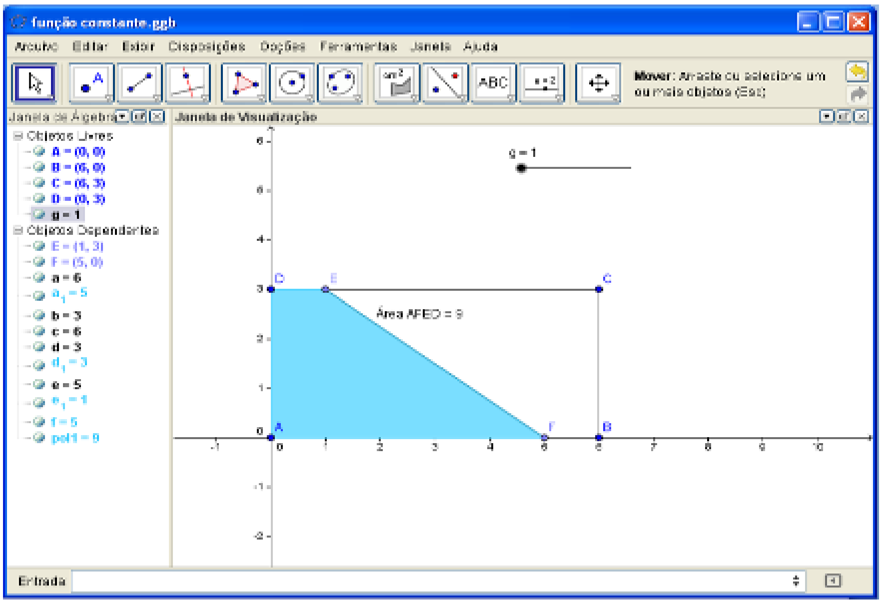


Figura 41 - Atividade 4 – Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

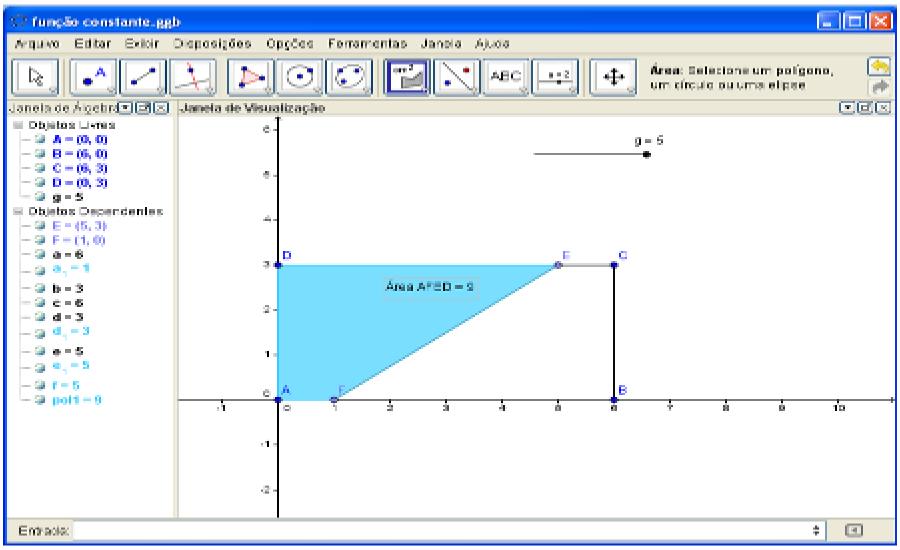


Figura 42 - Atividade 4 – Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

1-Esperávamos que o aluno reconhecesse que à medida que o seletor g se movimenta as bases do trapézio variam e a medida da área permanece a mesma. Assim, a medida da área do trapézio não depende da variação das suas bases $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

2-Esperávamos que o aluno observasse que à medida que o seletor g se desloca para a direita ou para a esquerda, as bases do trapézio variam, mas a medida da área permanece constante. Ainda que a interpretasse e a conceituasse como uma função constante. Assim, esperávamos que o dinamismo proporcionado pelo *software* proporcionasse esta condição para analisar e interpretar o que propõe a questão. Pela teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, percebemos uma conversão proporcionada pelo GeoGebra.

3-Esperávamos que o aluno reconhecesse a base maior como sendo $B = 6 - x$, base menor como x e altura 3.

Assim a medida da área do trapézio $A = \dfrac{[(6-x)+x]3}{2}$ e fazendo A= $f(x)$. Teremos

$$f(x) = \frac{[(6-x)+x]3}{2} \Rightarrow f(x) = 9$$

Esperávamos que o aluno enunciasse simplesmente a lei de formação da função afim constante como $f(x) = 9$ por uma dedução lógica por meio de observações na Janela de Visualização ou na Janela Algébrica.

4- Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter.

Esperávamos que o aluno reconhecesse e observasse na Janela de Visualização do GeoGebra, que a função constante $f(x) = 9$ em R sobrepõe o segmento de reta, sendo este um subconjunto da reta em R.

Poderíamos esperar também que o aluno respondesse que a reta sobrepõe o segmento de reta no intervalo [1,5].

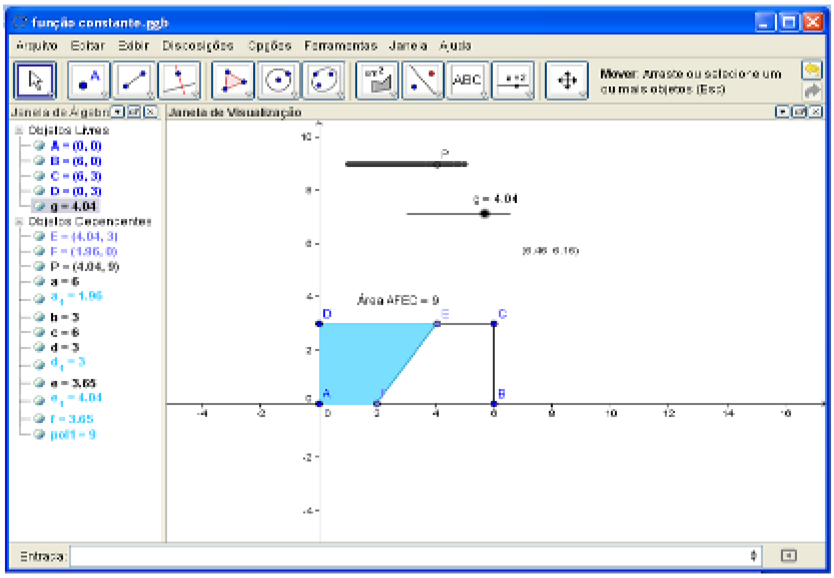


Figura 43 - atividade 4 – Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

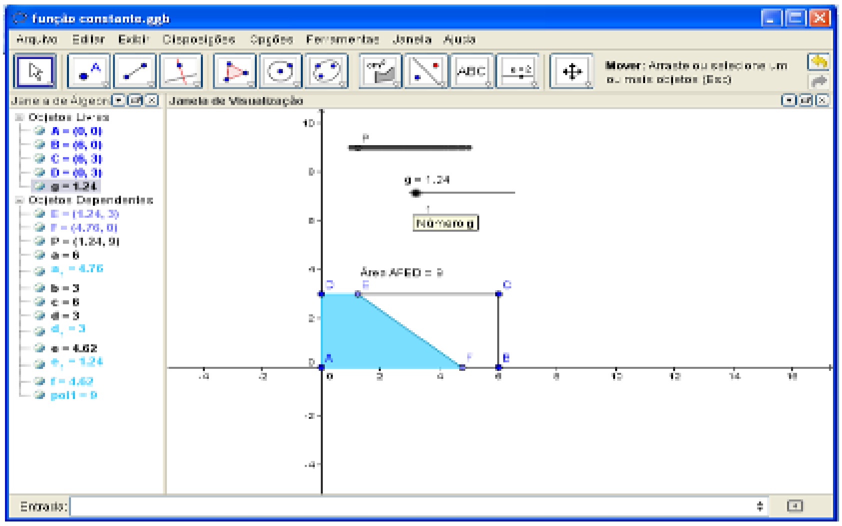


Figura 44 – Atividade 4 – Função Afim Constante
Fonte: O Autor (2012)

Esperávamos que o aluno reconhecesse, observando a Janela de Visualização do GeoGebra, que o ponto P descreve um segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas no intervalo de [0,6].

5-Digite no campo de entrada a função que você deduziu, tecle enter e descreva o que acontece com a função e o segmento de reta descrita por P.

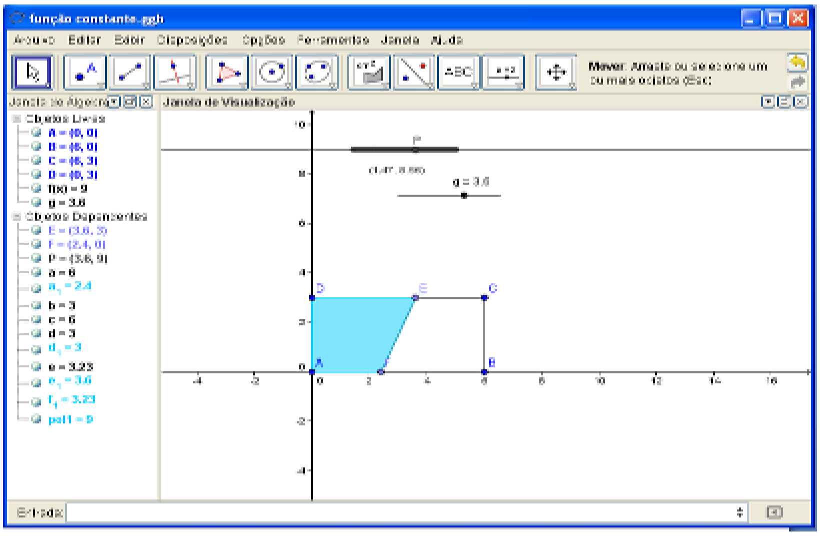


Figura 45 – Atividade 4 – Função Afim Constante
Fonte: O Autor (2012)

Esperávamos que o aluno reconhecesse e observasse na Janela de Visualização do GeoGebra, que a função constante $f(x) = 9$ em R sobrepõe o segmento de reta, sendo este um subconjunto da reta em R.

Poderíamos esperar também que o aluno respondesse que a reta sobrepõe o segmento de reta no intervalo [1,5].

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 2º. ENCONTRO

Neste 2º encontro, tínhamos programado duas atividades para serem desenvolvidas: a atividade 3, sobre domínio e imagem de uma função, e a atividade 4, sobre função afim constante.

Para a realização da atividade 3 sobre domínio imagem de uma função, observamos que os alunos tiveram dificuldades para responder as questões básicas que norteiam o estudo de uma função. Após a realização, as mesmas foram recolhidas para serem analisadas. Logo em seguida, passamos a fazer a socialização da atividade procurando sanar as dúvidas que os alunos apresentaram durante a sua realização.

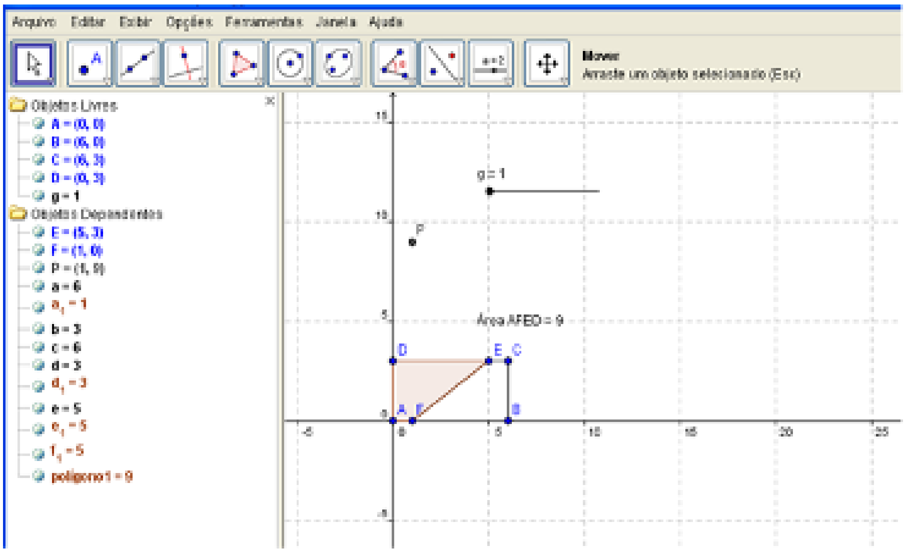
Observamos, no decorrer do desenvolvimento da atividade, um pouco de dificuldade dos alunos em lidar com o processo de construção e com o *software*, mas aos poucos foram se familiarizando e o desenvolvimento da atividade fluíu normalmente. Sempre falávamos para que eles relacionassem a Janela de Visualização com a Janela Algébrica, associando, assim, a construção algébrica e a geométrica. Após a construção geométrica, os alunos passaram para a segunda parte da atividade que era fazer associações entre a parte geométrica e a algébrica.

Observamos que os alunos mostravam muito entusiasmo e dedicação ao realizar as construções, porém sentiam dificuldades em fazer a interpretação entre a parte geométrica e a parte algébrica. Percebemos, também, que os alunos apresentavam dificuldades relacionadas ao conteúdo e, visivelmente, não conseguiam diferenciar função afim constante da função afim linear.

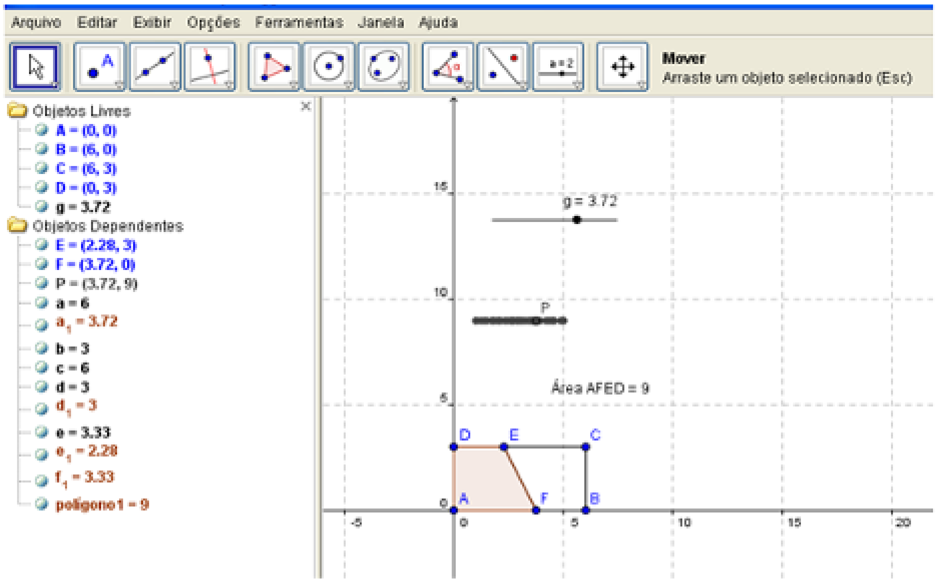
Após concluírem a resolução da atividade, a mesma foi salva na medida da área de trabalho para que no final da aula fosse gravada em um HD externo. Neste momento, fizemos a socialização da atividade, juntamente com os alunos, discutimos o processo de construção, fizemos também uma abordagem teórica definindo uma função constante e seu gráfico, sempre usando o software *GeoGebra*.

ANÁLISE DA ATIVIDADE 4 DESENVOLVIDA PELOS ALUNOS

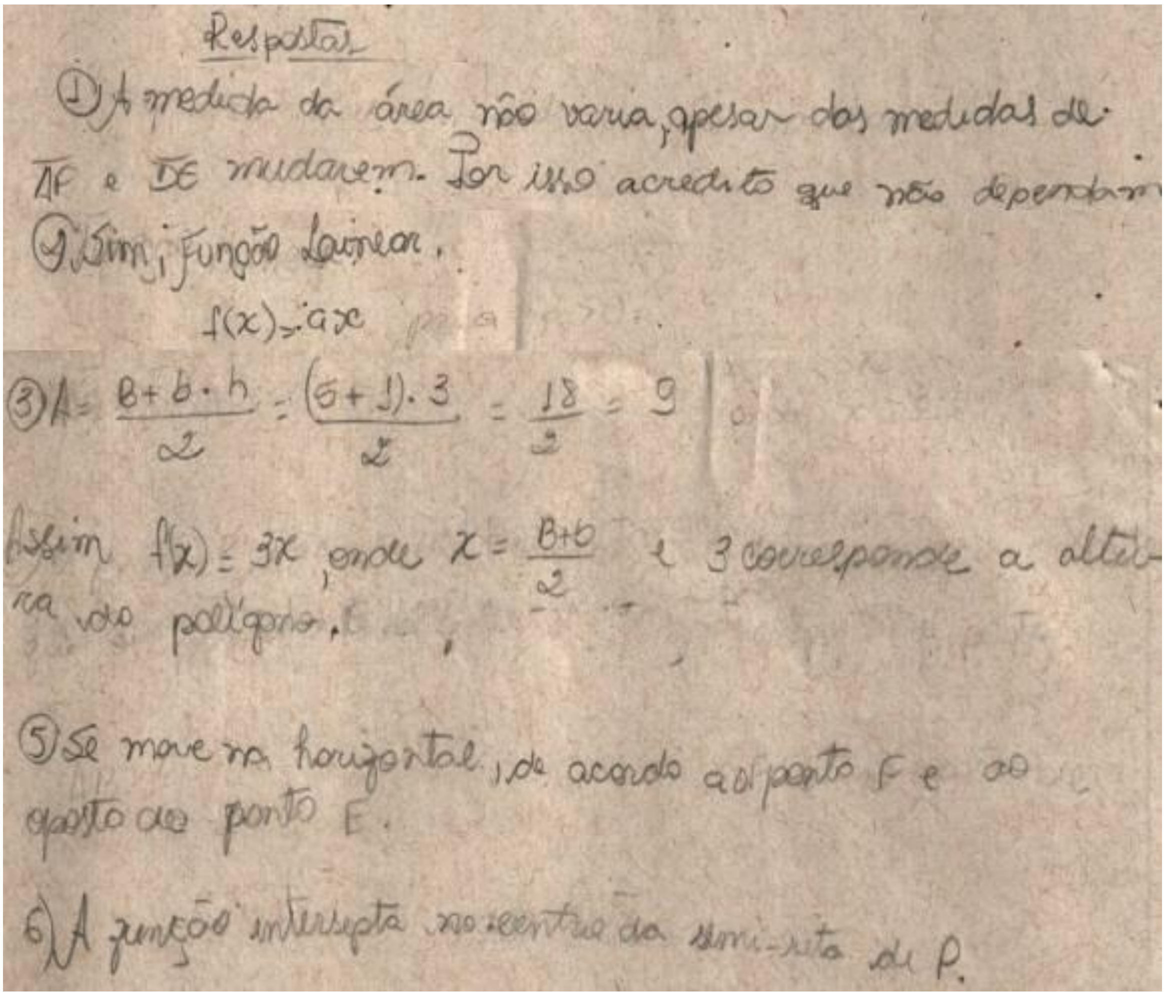
Aluno (A)



Protocolo 27 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 28 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Respostas

① A medida da área não varia, apesar das medidas de $\overline{AF}$ e $\overline{DE}$ mudarem. Por isso acredito que não dependem

② Sim, função Linear.

$f(x) = ax$

③ $A = \frac{B+b \cdot h}{2} = \frac{(5+1) \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Assim $f(x) = 3x$, onde $x = \frac{B+b}{2}$ e 3 corresponde a altura do polígono.

⑤ Se move na horizontal, de acordo ao ponto F e ao oposto ao ponto E.

6) A função intersepta no centro da semi-reta de P.

Protocolo 29 - Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

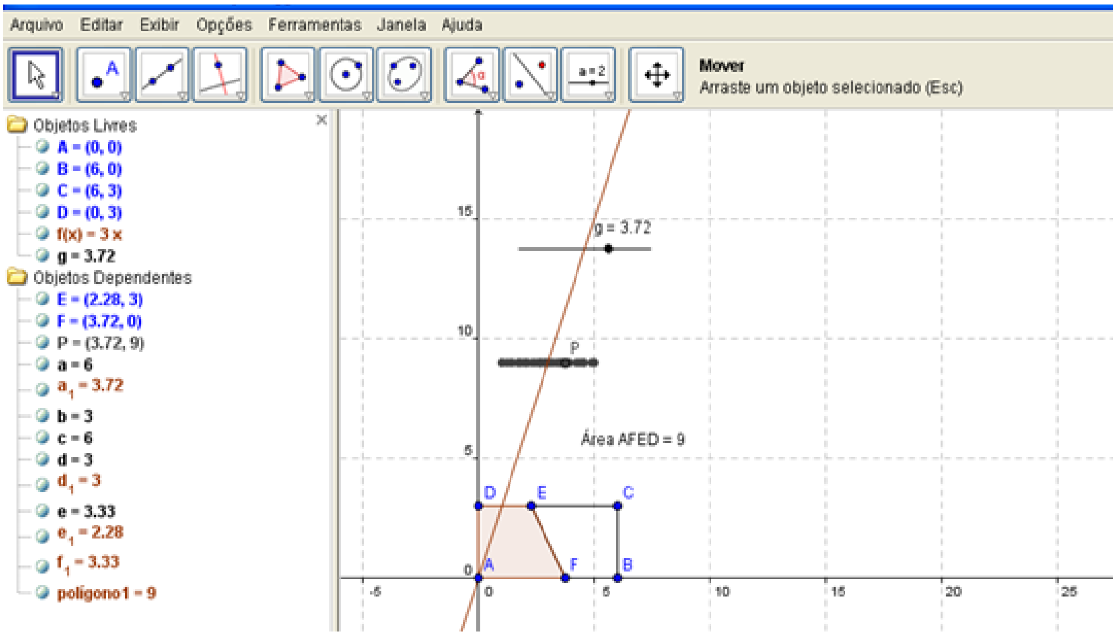
1) Observamos durante a análise da questão, que o aluno reconheceu que os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{DE}$, lados do polígono, apesar de proporcionarem variação nas bases do mesmo, a medida da área não sofre nenhuma alteração.

2) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do polígono como sendo uma função, mas não a reconheceu como uma função constante e sim como uma função linear. Percebemos que o aluno não consegue diferenciar uma função afim linear de uma função afim constante.

3) A partir da análise da questão, verificamos que o aluno conseguiu expressar corretamente a medida da área do trapézio como sendo 9, realizando, assim, um tratamento conforme a teoria dos Registros de Representação Semiótica, confirmando o valor encontrado com o valor dado pelo GeoGebra na Janela de Visualização. Apesar de não ter anotado a fórmula corretamente. Mas a usou corretamente na resolução da questão. Porém, não conseguiu expressar algebricamente a mesma como uma função afim constante. Observamos que o aluno

considerou x como a média aritmética entre as bases do trapézio e 3 correspondente à altura, concluindo seu raciocínio como $f(x) = 3x$.

5) Durante a análise da questão, observamos que o aluno reconheceu, por meio da Janela de Visualização, que o ponto P descreve um segmento de reta paralelo ao eixo das abscissas conforme protocolo 30.



Protocolo 30 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

6) Como o aluno não conseguiu reconhecer a medida da área do trapézio como uma função afim constante, isto é, não conseguiu associar a geometria com a álgebra, não houve uma conversão que seria reconhecer o mesmo objeto por duas notações diferentes. Logo, não correspondeu à nossa expectativa que seria obter o gráfico da função constante que, ao ser plotado, sobreporia o segmento de reta que representa a medida da área do trapézio no intervalo [1,5]. No caso, como o aluno não definiu corretamente a função, a mesma interceptou o segmento descrito por P no [1,5], não correspondendo à nossa expectativa.

No final da atividade, perguntamos ao aluno: “Qual a dificuldade encontrada na resolução da atividade?”

Obtivemos como resposta: “Dificuldade em definir a função e nomeá-la como uma função $f(x)$”.

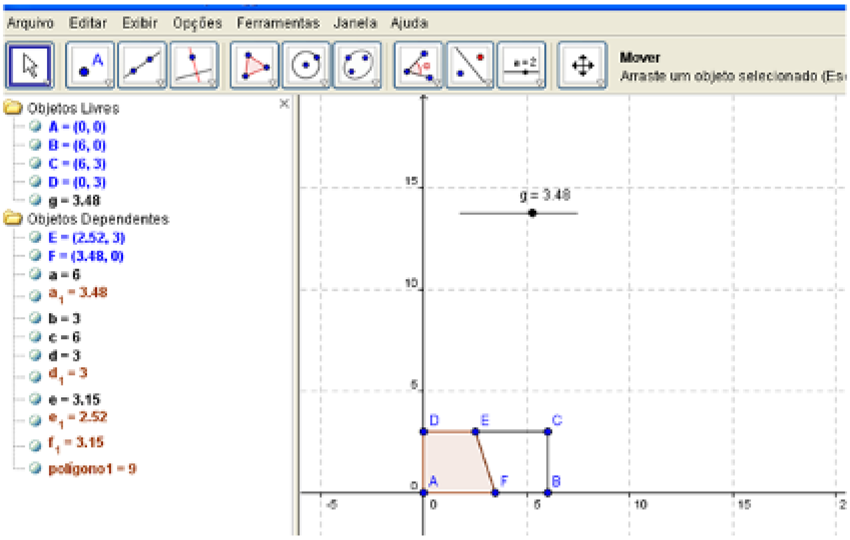
Entendemos que o aluno quis dizer que teve dificuldades em definir e determinar a lei de formação da função.

Conclusão sobre o aluno A

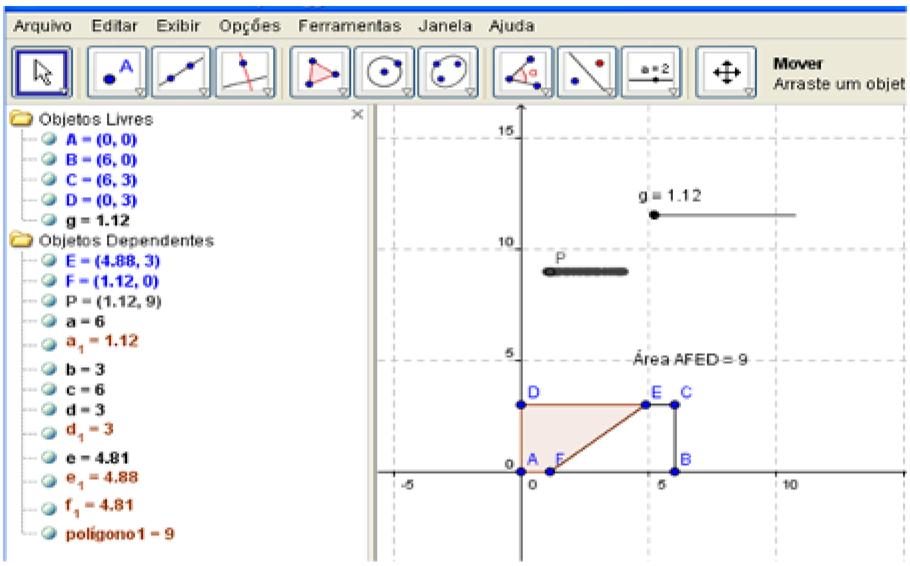
O aluno conseguiu usar corretamente a fórmula do trapézio para calcular a sua medida da área, usando bem, neste caso, o tratamento. Também conseguiu investigar por meio do *software* que a medida da área do trapézio não depende da variação de suas bases. Porém, não conseguiu reconhecer a medida da área do trapézio como uma função constante, deixando de realizar a conversão.

Aluno (B)

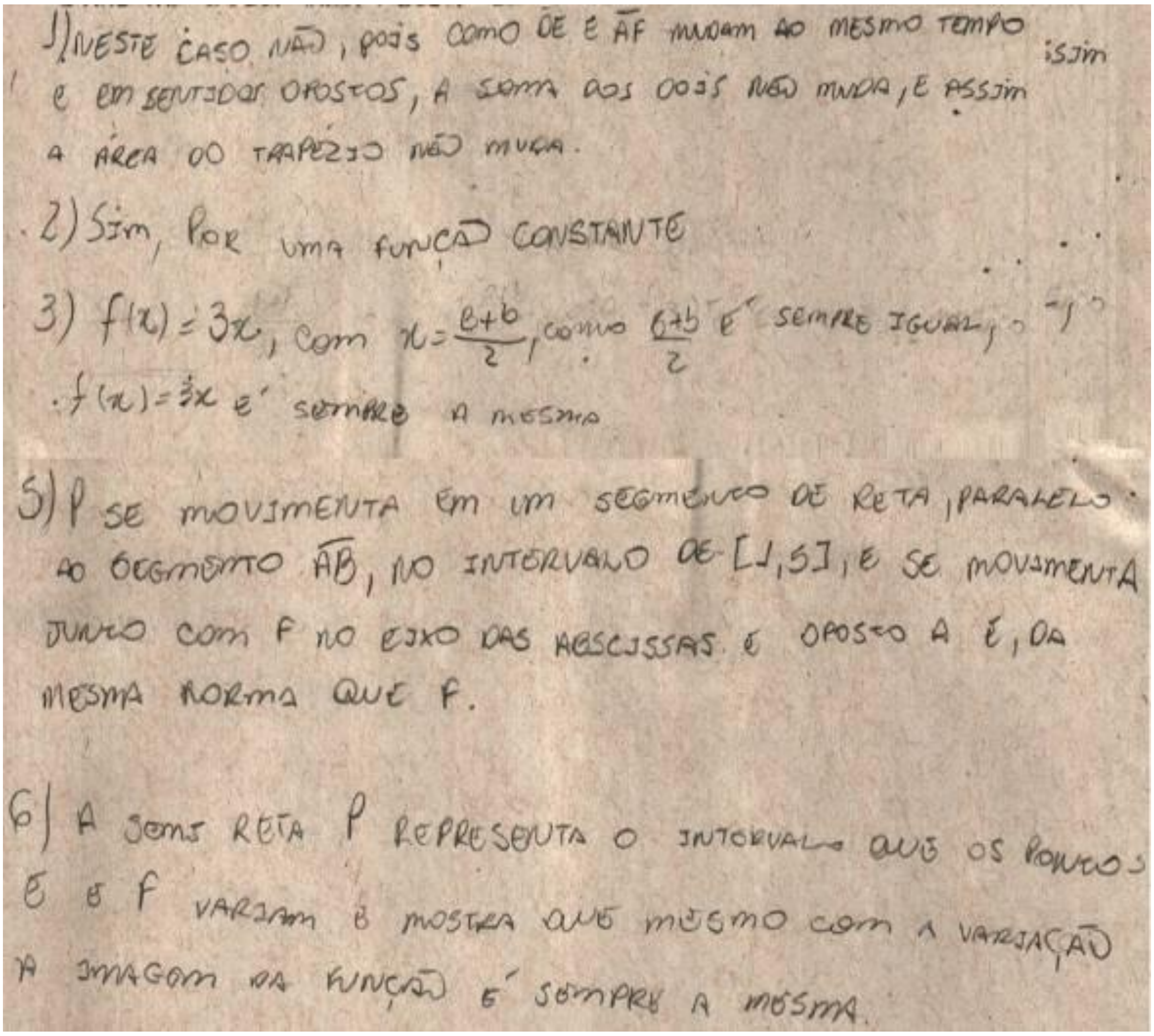
Construções feitas pelo aluno (B)



Protocolo 31 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 32 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



1) NESTE CASO NÃO, POIS COMO $\overline{DE}$ E $\overline{AF}$ MUDAM AO MESMO TEMPO SIM
E EM SENTIDOS OPOSTOS, A SOMA DOS DOIS NÃO MUDA, E ASSIM
A ÁREA DO TRAPÉZIO NÃO MUDA.

2) SIM, POR UMA FUNÇÃO CONSTANTE

3) $f(x) = 3x$, com $x = \frac{B+b}{2}$, como $\frac{B+b}{2}$ é sempre igual, o
$\therefore f(x) = 3x$ é sempre a mesma

5) P SE MOVIMENTA EM UM SEGMENTO DE RETA, PARALELO
AO SEGMENTO $\overline{AB}$, NO INTERVALO DE [1,5], E SE MOVIMENTA
JUNTO COM F NO EIXO DAS ABSCISSAS E OPOSTO A E, DA
MESMA FORMA QUE F.

6) A SEMIRRETA P REPRESENTA O INTERVALO QUE OS PONTOS
E E F VARIAM E MOSTRA QUE MESMO COM A VARIAÇÃO
A IMAGEM DA FUNÇÃO É SEMPRE A MESMA.

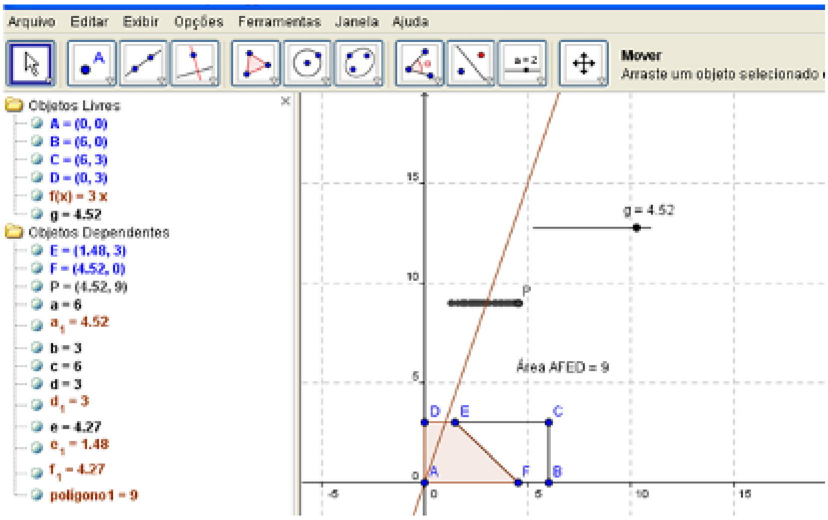
Protocolo 33- Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

1) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu, por meio da Janela de Visualização, que à medida que o seletor g se movimenta, as bases do polígono mudam em sentido opostos, mas conservando a mesma medida da área. E observou que a medida da área do polígono não depende dos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{DE}$.

2) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do trapézio como uma função e conceituou-a corretamente como uma função afim constante.

3) No decorrer da análise da questão, percebemos que o aluno não conseguiu expressar a medida da área do trapézio algebricamente como uma função afim constante. Percebemos, também, que o aluno não conseguiu diferenciar uma função afim linear de uma função afim constante. Durante a tentativa de dedução da fórmula para a função afim constante, usando como referência a fórmula da medida da área do trapézio, o aluno considerou como média aritmética as bases do mesmo, chamando-a como uma variável x. O que interferiu de maneira errônea no resultado final.

5) Na análise da questão, observamos que o aluno reconheceu por meio da Janela de Visualização que, ao investigar o ponto P, concluiu que este descreve um segmento de reta paralelo ao eixo x no intervalo de [1,5]. Observamos, também, que o aluno relacionou o movimento do ponto P, com os pontos F e E e concluiu que apesar dos referidos pontos se movimentarem em sentidos opostos, o ponto P descreve sempre um segmento de reta. Percebemos ainda, que o aluno conseguiu fazer uma associação entre a parte geométrica do problema e a parte gráfica representada no sistema cartesiano, ou seja, reconheceu uma conversão propiciada pelo *software*.



Protocolo 34– Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

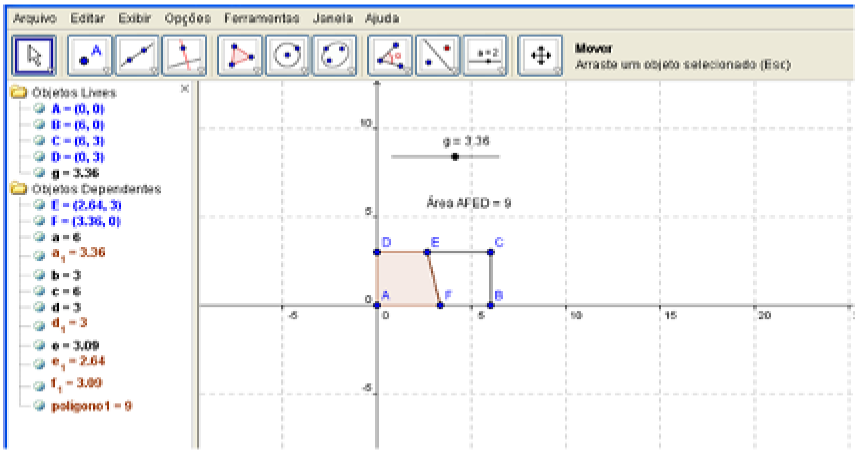
6) Observamos que o aluno não interpretou corretamente a questão.

Conclusão sobre o aluno (B)

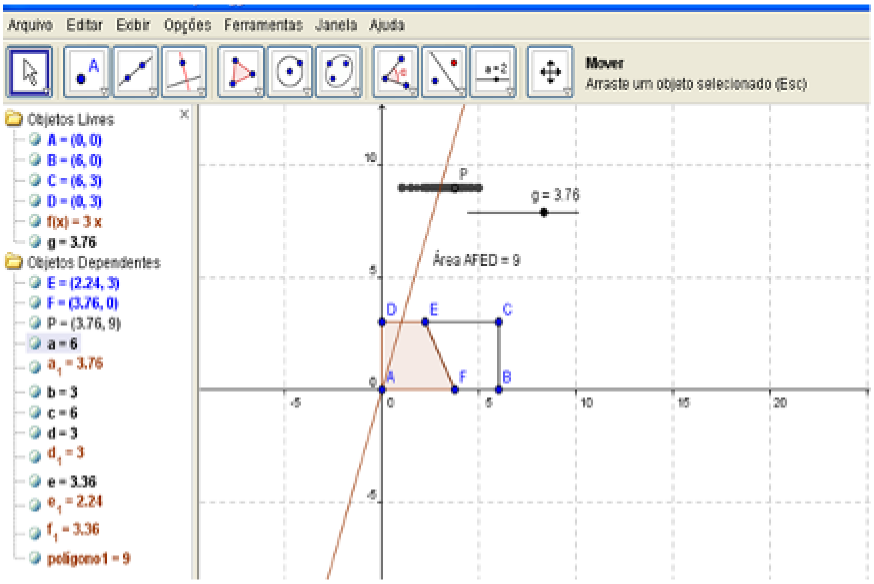
O aluno reconheceu que a variação das bases não interfere no valor da medida da área mantendo-a sempre constante. Também que a medida da área do trapézio pode ser interpretada como uma função constante. Porém, não conseguiu dar um tratamento algébrico para determinar, a partir da utilização da medida da área do trapézio, uma lei de formação para a função afim constante. Percebemos que o aluno não soube diferenciar uma função afim constante de uma função afim linear, o que pode ter contribuído para que ele não obtivesse a lei de formação para a função constante.

Aluno (C)

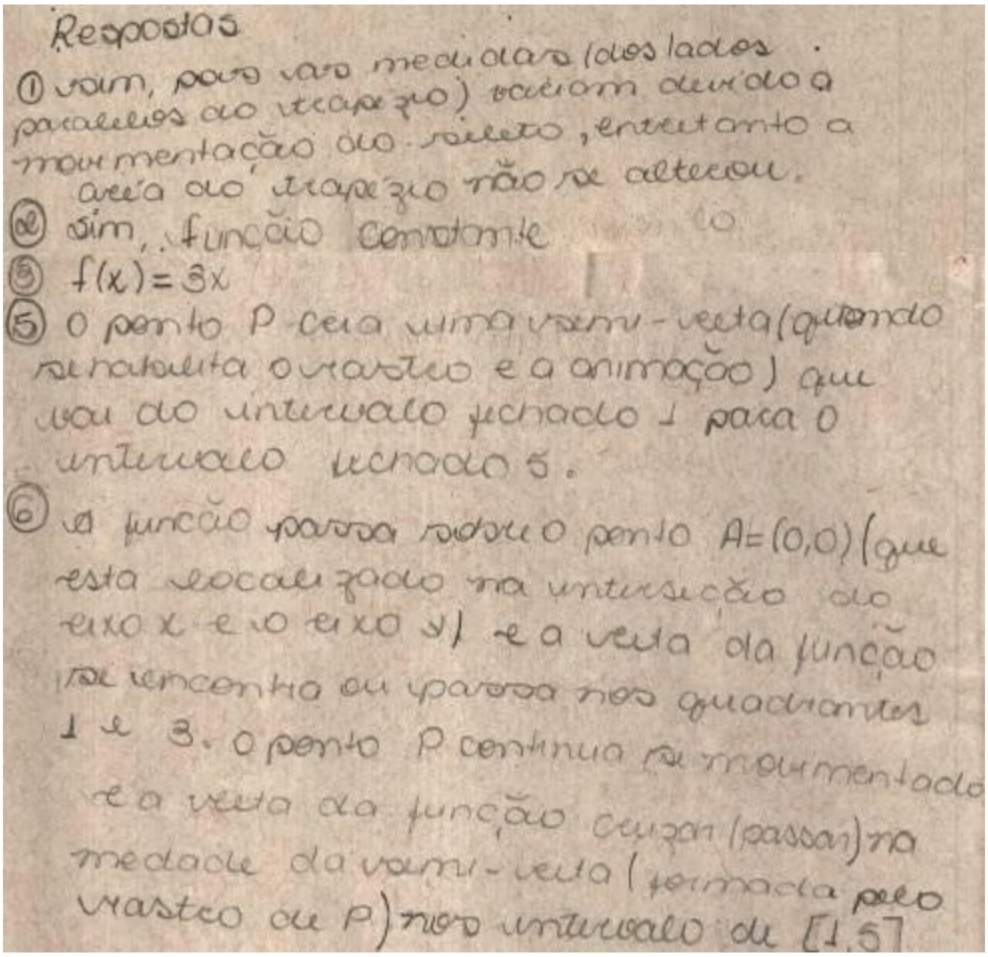
Construção feita pelo aluno (C)



Protocolo 35 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 36 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)


Respostas

① sim, pois as medidas (dos lados paralelos do trapézio) variam devido a movimentação do seletor, entretanto a área do trapézio não se alterou.

② sim, função constante

③ f(x) = 3x

⑤ o ponto P cria uma semi-reta (quando se habilita o rastro e a animação) que vai do intervalo fechado 1 para o intervalo fechado 5.

⑥ a função passa sobre o ponto A=(0,0) (que esta localizado na intersecção do eixo x e o eixo y) e a reta da função se encontra ou passa nos quadrantes 1 e 3. o ponto P continua se movimentado e a reta da função cruzou (passou) na medade da semi-reta (formada pelo rastro de P) no intervalo de [1,5]

Protocolo 37- Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (C)

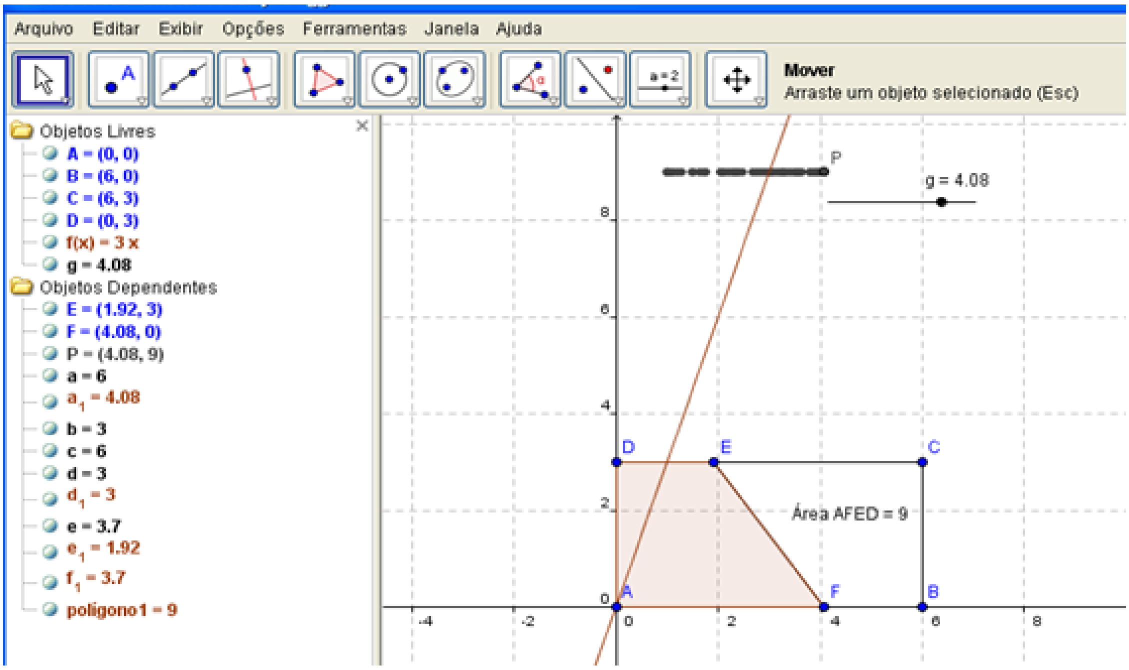
Fonte: O Autor (2012)

1) No decorrer da análise da questão, observamos que o aluno não percebeu, ao investigar a medida da área do trapézio, que a movimentação dos lados paralelos $\overline{AF}$ e $\overline{DE}$, proporcionada pelo dinamismo do *software,* não afeta a medida da área que se mantém constante.

2) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do polígono como uma função e a conceituou como uma função constante, tal função f definida pela lei de formação $f(x) = 3x$. Algebricamente o mesmo enunciou uma função afim linear como uma função afim constante. Percebemos que o aluno teve dificuldades de diferenciar as funções afim constante e linear.

3) No decorrer da análise da questão, verificamos que o aluno não conseguiu expressar por meio de um tratamento algébrico uma lei de formação para a função afim constante a partir do uso da medida da área do trapézio.

4) Durante a análise da questão, vimos que o aluno reconheceu que o ponto descreve um segmento de reta no intervalo de [1,5]. Porém, não descreveu a posição do mesmo em relação ao eixo das abscissas.



Protocolo 38 – Atividade 4 Função Afim Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

5) Na análise da questão, observamos que o aluno não conseguiu expressar algebricamente a função afim constante. Então, tornou-se inviável o reconhecimento do segmento de reta descrito pelo ponto P no [1,5] que era um subconjunto da função constante em R. Assim, não correspondeu à nossa expectativa.

Conclusão sobre o aluno (C)

O aluno reconheceu a medida da área do trapézio como uma função afim constante. Mas não soube deduzir a lei de formação para a referida função, com o uso do que seria um tratamento segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Percebemos, desse modo, que o aluno não conseguiu diferenciar as funções afim constante e linear.

5.3. 3º Encontro: descrição e análise das atividades 5 e 6

Neste encontro, tínhamos o objetivo de desenvolver por meio de construção de medida da área a definição de função linear afim do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$.

5.3.1 Atividade 5 – Função Afim Linear

Questão adaptada do livro Matemática, volume 1, versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola (p.80).

Construção de uma função afim linear, por meio de medida da área, com a utilização do GeoGebra.

Objetivos

- Construir o conceito de função afim linear $y = ax$, com $a \neq 0$, por meio de medida da área, com o uso do *software* GeoGebra.
- Interpretar a medida da área do polígono como uma função f.
- Deduzir uma fórmula para a função afim linear.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.
Laboratório de informática.
Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade5_seunome".
Deixe as Janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.
Utilize o Campo de Entrada.
Ative os eixos e malhas.

Processo de construção

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado AB, marcar um ponto E a x cm de A. Por M traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. Obtendo, dessa forma, dois retângulos ABCD e AECD. Mostrar com o auxílio do GeoGebra que podemos enunciar uma fórmula para uma função afim linear.

1) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.

2) Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.

3) Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.

4) Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.

5) Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) e clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.

6) Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o lado AB para obter o ponto E.

7) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obtenha por E uma perpendicular.

8) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC para obter F.

9) Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), Clique sobre os pontos E e F, para obter o segmento $\overline{EF}$.

10) O segmento $\overline{AE}$ mede x cm, o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.

11) Na Janela Algébrica, clique sobre a bolinha da reta f: $x = 4$ desabilitando-a.

12) Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A,E,F,D,A, para obter, assim, dois retângulos ABCD e AEFD.

13) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

14) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da Janela de Visualização afim de obter o seletor g. Com o botão direito, clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.

15) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.

16) Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter. Clique com o botão direito sobre P, clique sobre a opção “Habilitar Rastro”. Na Janela Algébrica, clique sobre a bolinha ao lado do ponto P desabilitando-o.

Abordagem teórica

1) Qual a medida da área do retângulo AEFD?

2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. A medida da área do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{EF}$?

3) A medida da área do retângulo AEFD pode ser interpretada como uma função? Se sim, defina-a.

4) Deduza a fórmula da medida da área do retângulo AEFD e nomeie-a como uma função f .

5) Ative a ferramenta Reflexão com Relação a uma Reta (9ª janela), clique sobre o retângulo AEFD. Na Janela Algébrica, clique na bolinha ao lado do ponto E,F, H e desabilite pol1=8.

Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P habilite-o. Logo em seguida, com o botão direito, clique sobre o seletor g, clique opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

6) No campo de entrada, digite a função que você deduziu, tecle enter, verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor.

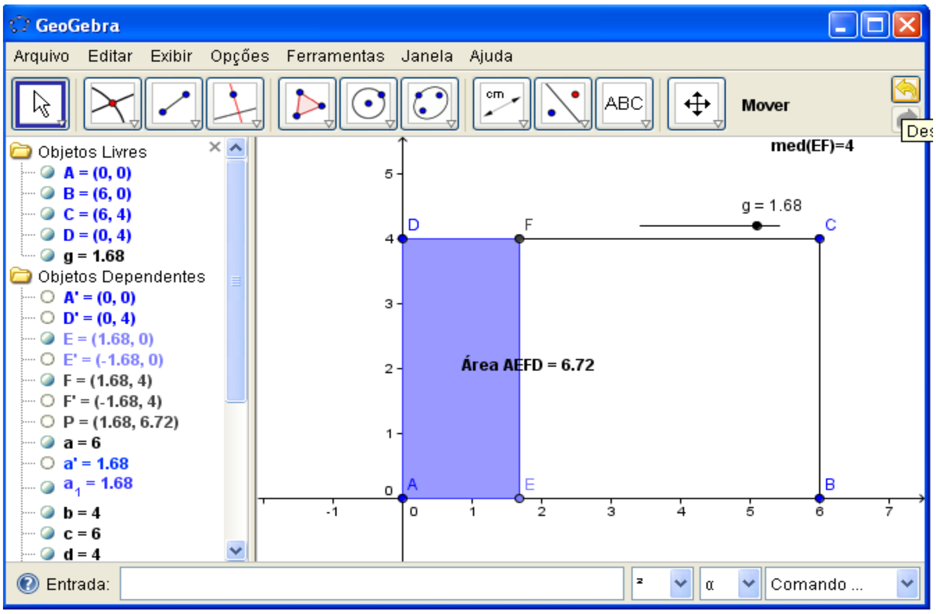


Figura 46 - Atividade 5 – Função Afim Linear
Fonte: O Autor (2012)

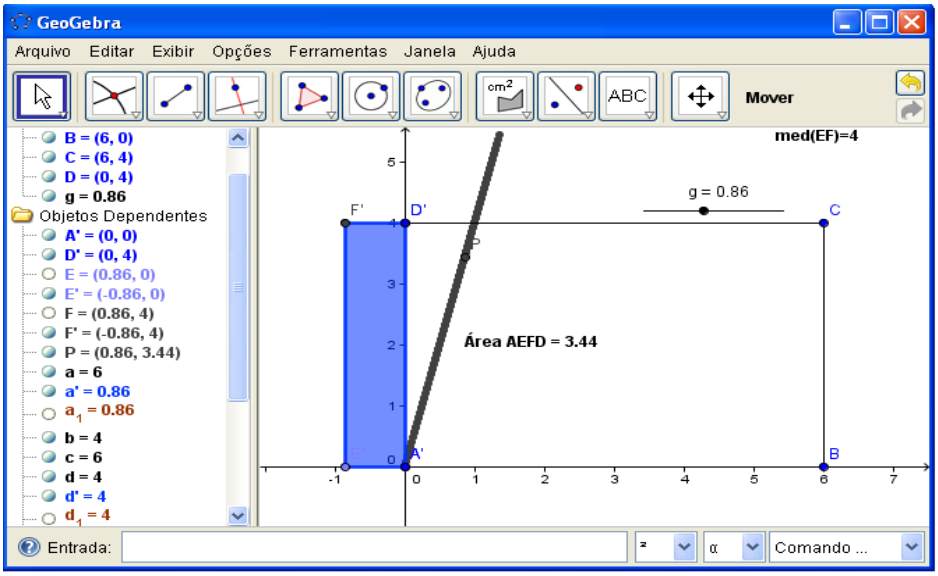


Figura 47 – Atividade 5 – Função Afim Linear
Fonte: O Autor (2012)

Com a construção estruturada, o aluno poderá movimentar o seletor g que aparece na medida da área de visualização e observar as variações do comprimento AE e da medida da área do retângulo AEFD que, neste caso, está representado pelo retângulo.

1) Qual a medida da área do retângulo AEFD?

Esperávamos que o aluno, após a construção, observasse na medida da área de visualização que a medida da área referente ao retângulo AEFD era igual a $4cm^2$. As unidades referentes à medida da área são dadas em unidades quadradas e, se especificadas, podem ser polegadas, centímetros, metros, pés, etc.

A medida da área envolve o produto da medida de dois comprimentos e as unidades são pés quadrados, centímetros quadrados e, assim, sucessivamente (GOLDSTEIN, 2000 p.45).

2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. A medida da área do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{EF}$?

Esperávamos que o aluno percebesse que à medida que o seletor g é deslocado tanto o comprimento $\overline{AE}$ quanto a medida da área do retângulo AEFD sofrem variação e que a medida $\overline{EF}$ se mantém constante.

Também esperávamos que, após deslocar o seletor, que o aluno percebesse que a medida da área do retângulo AEFD não depende do segmento $\overline{EF}$ e sim do segmento $\overline{AE}$.

3) A medida da área do retângulo AEFD pode ser interpretada como uma função? Se sim, defina esta função.

Esperávamos que o aluno reconhecesse que à medida que o segmento $\overline{AE}$ sofre acréscimos iguais em seu comprimento isto acarreta acréscimos iguais na medida da área do retângulo. Como a medida da área do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{AE}$, então a medida da área do polígono pode ser interpretada como uma função.

Segundo Iezzi (1990, p.38), *se duas grandezas x e y estão relacionadas de tal forma que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor associado a y, então dizemos que y é uma função de x.*

Esperávamos que o aluno reconhecesse que à medida que se movimentasse o seletor g, a medida x e o lado $\overline{AE}$, sofreriam variação, isto é, acarretaria mudança na medida da área do retângulo AEFD. Porém, mantendo o lado $\overline{EF}$ constante. Isso significa que quando multiplicamos x por uma constante a medida da área do retângulo AEFD também é multiplicada por esta mesma constante. Logo poderia concluir que se tratava de uma função afim linear.

Ou em outra alternativa: esperávamos que o aluno reconhecesse que a medida da medida da área de um retângulo é dada pelo produto das medidas do comprimento pela altura e, intuitivamente, associasse a altura 4 cm pela comprimento x cm e anunciasse como uma função linear, devido à característica da lei de formação de uma função linear que é dada pelo produto de uma constante por uma variável, sendo esta constante diferente de zero.

4) Deduza a fórmula da medida da área do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função f.

Duas maneiras que os alunos poderiam resolver esta questão:

1ª) Esperávamos que o aluno reconhecesse que, à medida que movimentasse o seletor g, observando na Janela de Visualização do GeoGebra, a altura do retângulo permaneceria constante, enquanto que o lado $\overline{AE}$ e a medida da área sofreriam variação. Logo, poderia usar a fórmula da medida da área do retângulo e enunciar a função como $f(x) = 4x$.

2ª) Esperávamos que o aluno reconhecesse que a medida da área do retângulo AEFD é dada pela fórmula

$A = bh$. Onde:

$b = comprimento$
$h = altura$

Então, o lado $\overline{AE} = 8-(8-x)$ e o lado $\overline{EF} = 4$.

Logo, a medida da área do retângulo é dada por $A = [8-(8-x)]4$.

Que resulta em $A = 4x$ e, fazendo $A = f(x)$ temos que: $f(x) = 4x$.

Tanto a 1ª quanto a 2ª alternativa caracteriza, de acordo com Duval (2003), uma conversão. A nossa expectativa é que os alunos consigam transitar na mesma.

5) Ativar a 9ª janela, opção "Reflexão com relação a uma Reta", clicar sobre o retângulo AEFD. Na Janela Algébrica, desativar com um clique na bolinha ao lado dos pontos E,F,H e o pol1=8.

Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P de modo a habilitá-lo. Logo em seguida, com o botão direito, clique sobre o seletor g, clique na opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

Esperávamos que o aluno reconhecesse que o ponto P descreve o gráfico da medida da área do retângulo no intervalo de [0,2], com uma das extremidades na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

6) No campo de entrada, digite a função que você deduziu, tecle enter, verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor.

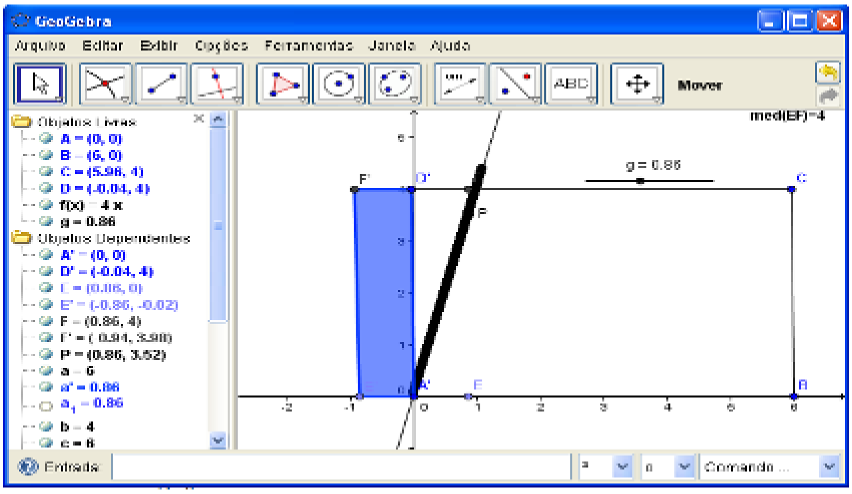


Figura 48 – Atividade 5 Função Afim Linear
Fonte: O Autor (2012)

Esperávamos que o aluno reconhecesse e observasse na Janela de Visualização do GeoGebra, que a função deduzida, $f(x)=4x$, sobrepõe o segmento de reta $f(x)=4x$ no intervalo [0,2] e concluísse que o segmento de reta é um subconjunto da reta definida pela função afim linear $f(x)=4x$ em $\Re$.

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES 5 E 6 DO 3º. ENCONTRO

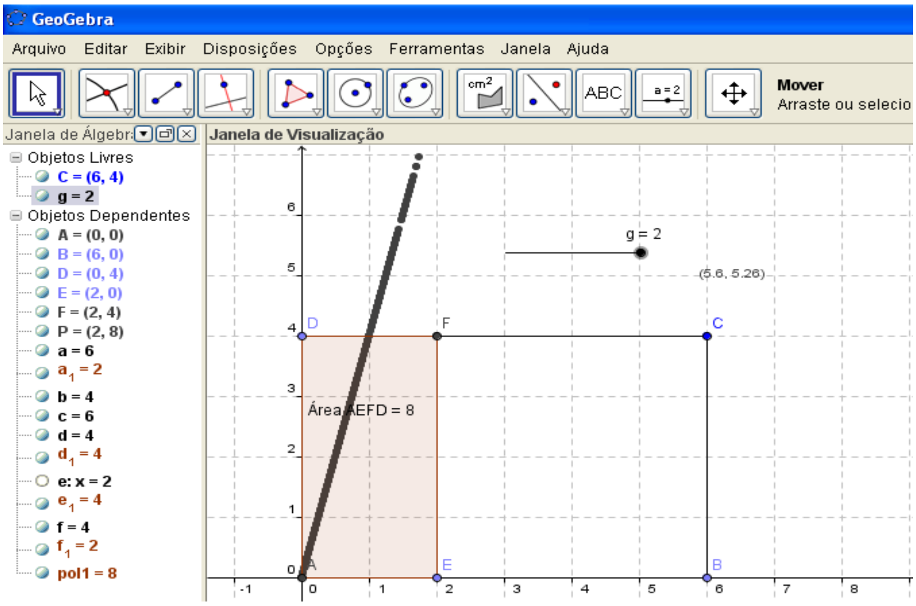
Observamos maior independência dos alunos na construção geométrica a partir da utilização do processo de construção e do uso do *software* e que eles sempre se mostravam mais motivados em desempenhar cada vez melhor as construções. As atividades programadas para serem desenvolvidas neste encontro se tratavam das funções afim dos tipos $f(x)=ax$ e $f(x)=ax+b$, respectivamente. Após a construção geométrica, os alunos trabalharam a abordagem teórica referente à atividade desenvolvida.

Observamos que os alunos apresentavam dificuldades em relacionar as construções geométricas com a parte algébrica, o que dificultou a transposição entre diferentes representações, que seria da gráfica para a algébrica e na teoria de Duval (2003) corresponde a uma conversão. Terminada a construção de cada atividade, esta era salva na medida da área de trabalho para que no final da aula pudesse ser salva em um HD externo e ser analisada posteriormente. Para melhor aproveitamento do tempo, a construção geométrica da atividade sobre função afim linear do tipo $f(x) = ax$ foi aproveitada para definir a função afim $f(x) = ax + b$. Para definir a função afim linear, fizemos o uso da medida da área do retângulo e para a definição da função afim fizemos uso do conceito de perímetro.

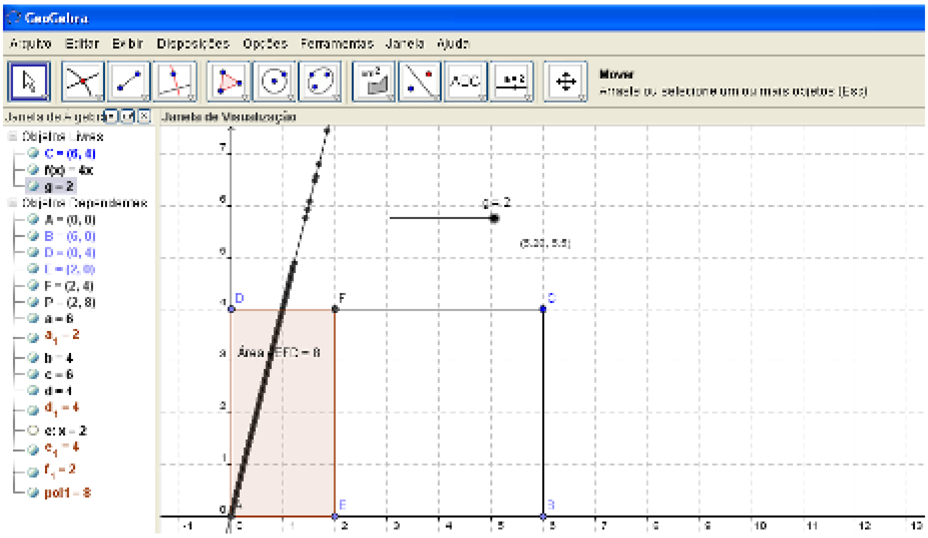
Ao término das atividades, fizemos uma socialização do conteúdo sobre função afim linear e sanamos eventuais dúvidas surgidas durante a realização das atividades. Fizemos sempre a interação dos resultados do *software* com os resultados algébricos, de modo a despertar o senso crítico dos alunos. Com relação à função afim, $f(x) = ax + b$, a socialização ficou para o 4º encontro.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

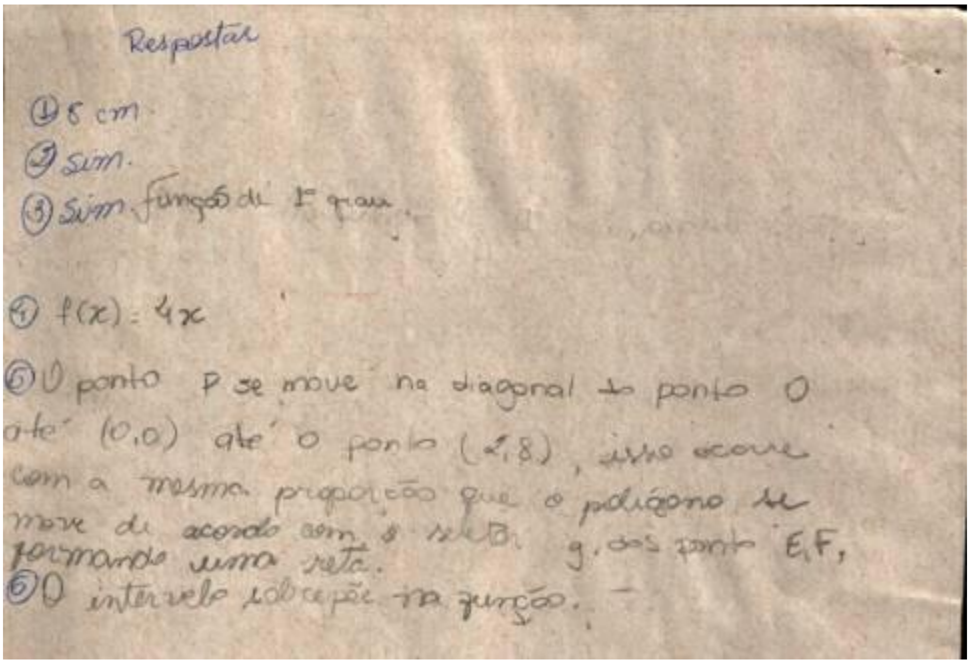
Aluno (A)



Protocolo 39 - Atividade 5 Função Afim Linear - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 40 - Atividade 5 Função Afim Linear - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)


Respostas
① 8 cm
② sim.
③ sim função de 1º grau.
④ f(x) = 4x
⑤ O ponto P se move na diagonal do ponto O
até (0,0) até o ponto (2,8), isso ocorre
com a mesma proporção que o polígono se
move de acordo com o seletor g. dos ponto E,F,
formando uma reta.
⑥ O intervalo sobrepõe na função.

Protocolo 41- Atividade 5 Função Afim Linear- aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

1) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do polígono como 8. Porém, observamos que, talvez, por falta de rigor ou conhecimento, o aluno se referiu à medida da área como uma medida linear, ou seja, 8 cm e não como 8 cm^2.

2) Na análise da questão, verificamos que o aluno reconheceu que a medida da área do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{EF}$, propiciado pelo dinamismo do GeoGebra.

3) Percebemos durante a análise da questão, que o aluno reconheceu a medida da área do retângulo como uma função. Entretanto, não soube reconhecê-la na sua particularidade como uma função afim linear e sim como uma função polinomial do 1º grau.

4) Verificamos, durante a análise da questão, que o aluno enunciou diretamente a lei de formação da função afim linear como $f(x) = 4x$. Para a dedução da lei de formação da mesma, observamos que o aluno não deu um tratamento algébrico conforme esperávamos.

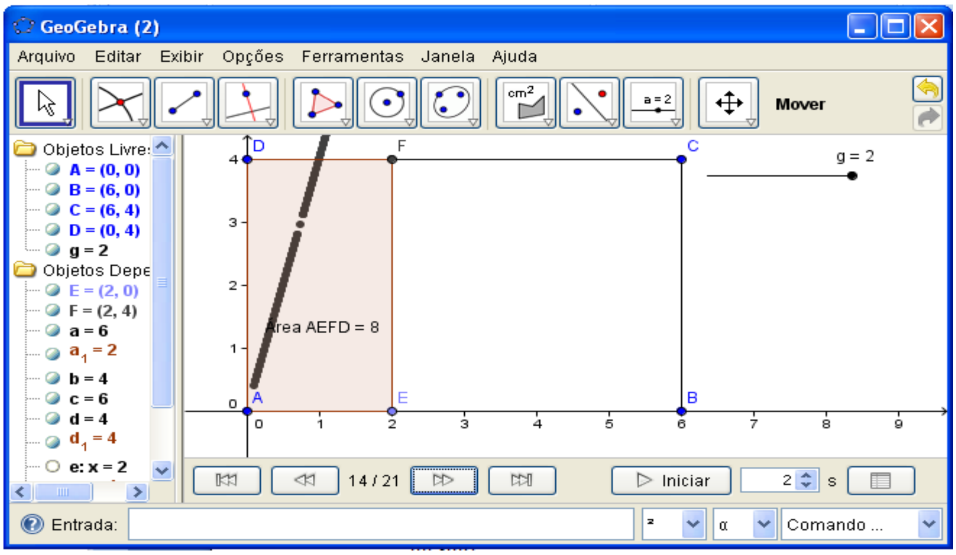
5) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu que o ponto P descreve uma semirreta inclinada no intervalo [0,2].

6) Durante a análise da questão, vimos que o aluno reconheceu que o gráfico da função $f(x) = 4x$ sobrepõe o segmento descrito pelo ponto P. Percebemos, ainda, que o aluno fez uma conversão de acordo com os Registros de Representação Semiótica.

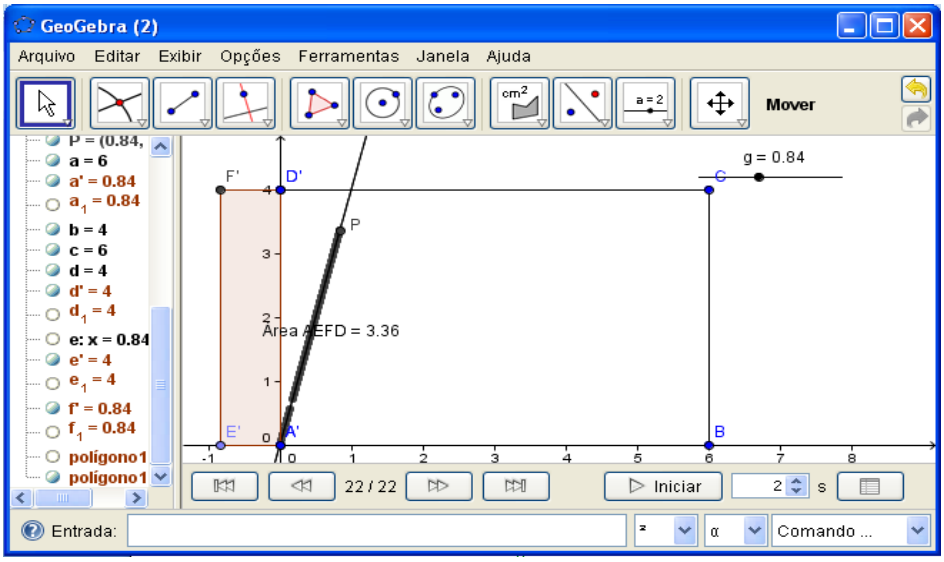
Conclusão sobre o aluno (A)

Observamos durante a análise das questões que o aluno conseguiu enunciar a lei de formação da função afim linear. Entretanto, não deu um tratamento algébrico para a lei de formação da função e a tratou de uma maneira mais genérica como função polinomial do 1° grau.

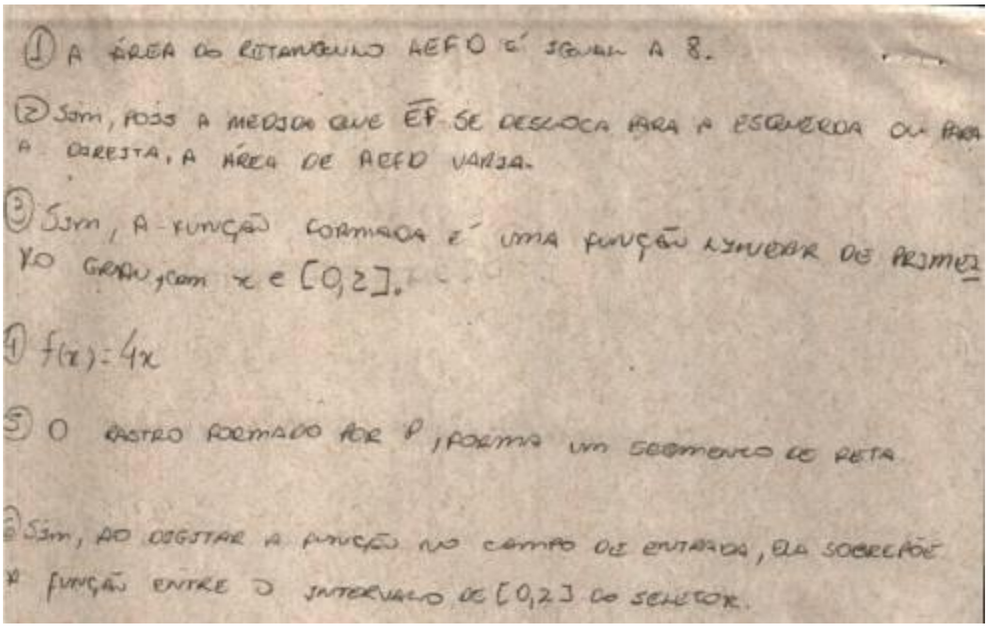
Aluno (B)



Protocolo 42 – Atividade 5 Função Afim Linear - Aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 43 - Atividade 5 Função Afim Linear - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)


1) A ÁREA DO RETANGULO AEFD É IGUAL A 8.

2) SIM, POIS A MEDIDA QUE $\overline{EF}$ SE DESLOCA PARA A ESQUERDA OU PARA A DIREITA, A ÁREA DE AEFD VARIA.

3) SIM, A FUNÇÃO FORMADA É UMA FUNÇÃO LINEAR DE PRIMEIRO GRAU, com $x \in [0,2]$.

4) $f(x)=4x$

5) O RASTRO FORMADO POR P, FORMA UM SEGMENTO DE RETA.

6) SIM, AO DIGITAR A FUNÇÃO NO CAMPO DE ENTRADA, ELA SOBREPÕE A FUNÇÃO ENTRE O INTERVALO DE [0,2] DO SELETOR.

Protocolo 44- Atividade 5 Função Afim Linear - Aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

1) Verificamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do polígono AEFD como sendo 8. Observamos que o aluno não fez nenhuma referência à unidade de medida da área, não correspondendo à nossa expectativa neste quesito.

2) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu que a medida da área do polígono depende do segmento $\overline{EF}$, pois à medida que o segmento desloca para a direita ou para a esquerda a medida da área varia. Consequentemente, a medida da área do polígono depende do lado $\overline{EF}$.

3) Vimos durante a análise da questão que o aluno reconheceu a medida da área do retângulo AEFD como uma função e a conceituou como uma função linear.

4) Na análise da questão percebemos que o aluno expressou diretamente a lei de formação, $f(x) = 4x$, da função sem tecer nenhuma conjectura algébrica, ou seja, não deu um tratamento algébrico para concretizar a sua resposta, o que havíamos previsto anteriormente. Ainda observamos que o aluno conseguiu fazer uma transcrição da forma geométrica para a algébrica, que seria uma conversão, de acordo com a teoria de Duval (2003).

5) Durante a análise da questão, percebemos que o aluno reconheceu que o ponto P descreve um segmento de reta, mas não comentou sobre a inclinação do segmento de reta.

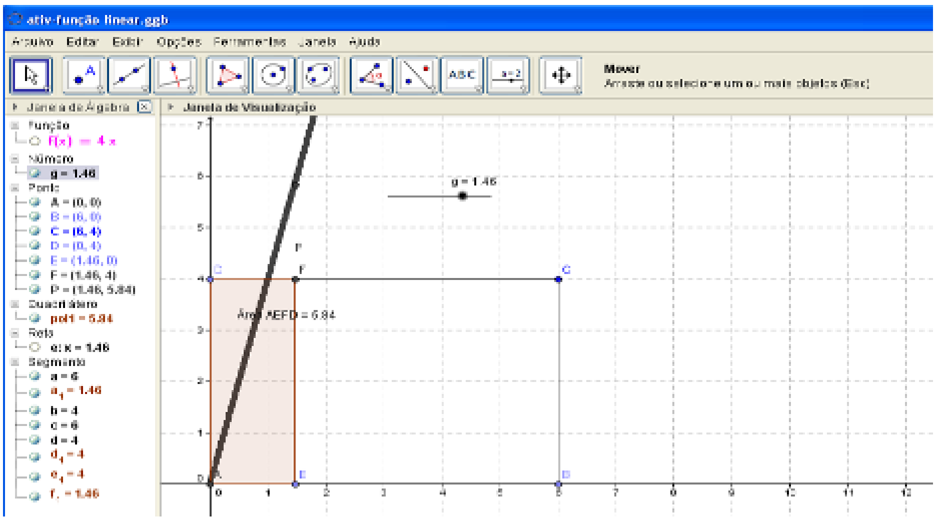
6) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu que a função definida por $f(x) = 4x$ sobrepõe o segmento de reta no intervalo [0,2]. No entanto, não reconheceu o segmento de reta no intervalo [0,2] como um subconjunto da reta definida pela função $f(x) = 4x$ em $\Re$.

Conclusão sobre o aluno (B)

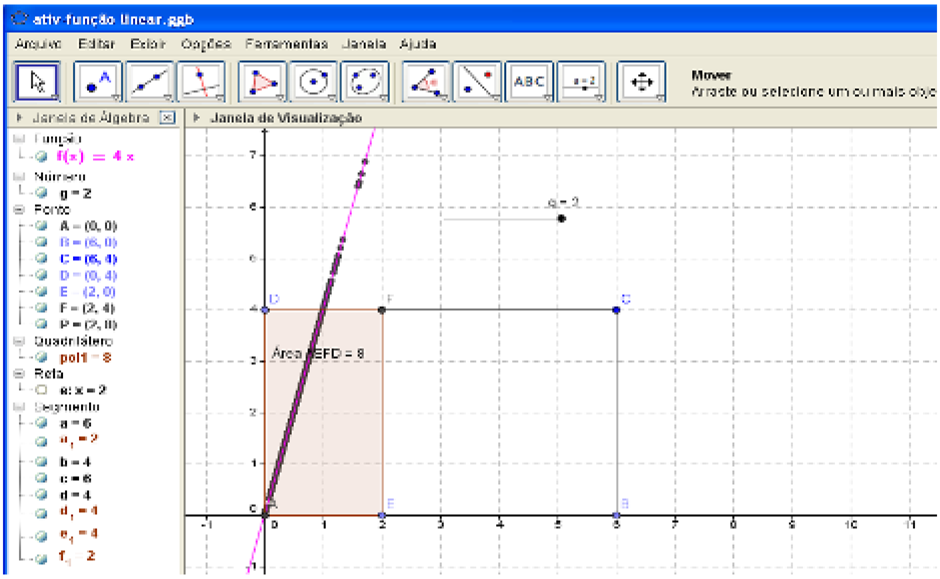
Percebemos durante a análise das questões que o aluno não conseguiu dar um tratamento algébrico para a função afim linear e utilizou como referência a medida da área do polígono AEFD. Sendo assim, não correspondeu à a nossa expectativa que era formalizar a lei de formação da função $f(x) = 4x$, a partir da medida da área do retângulo.

Aluno (C)

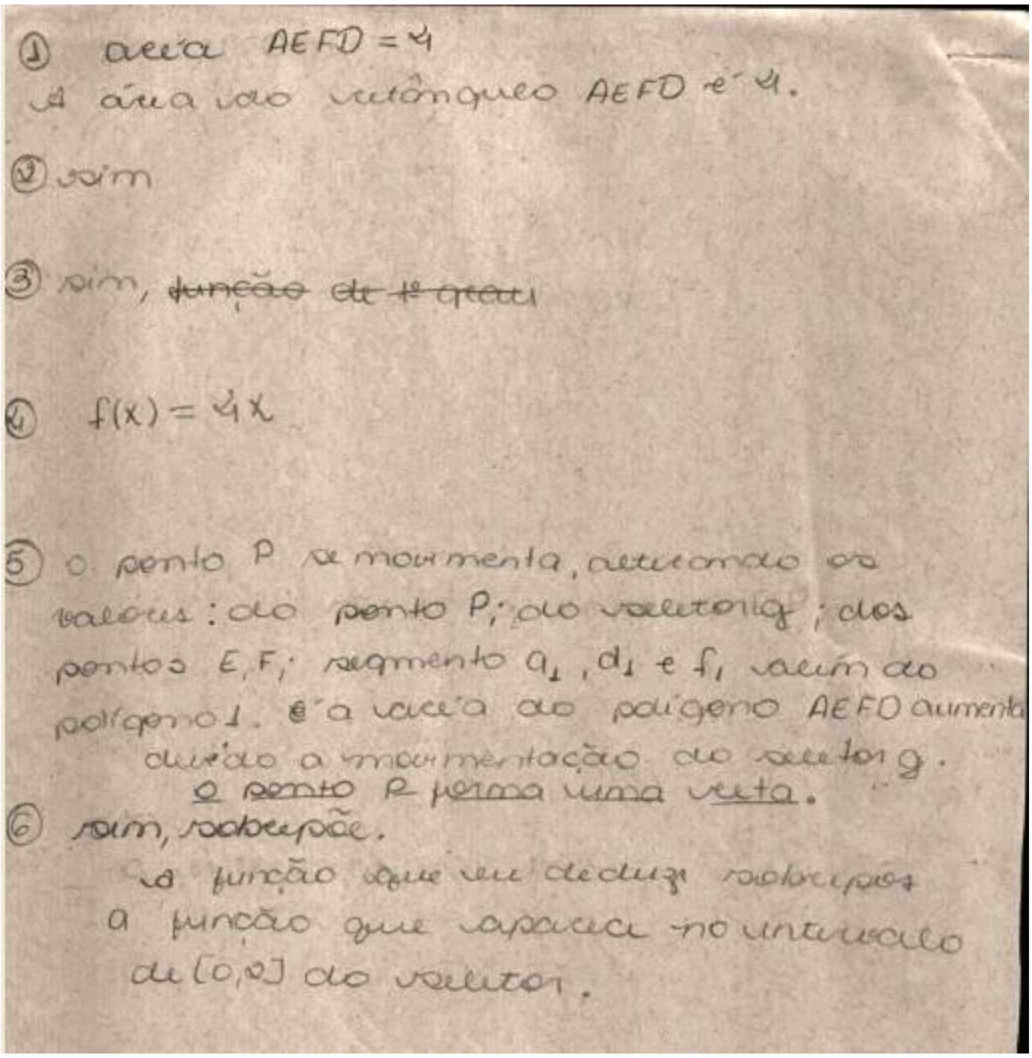
Atividade feita pelo aluno (C)



Protocolo 45 - Atividade 5 Função Afim Linear – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 46 - Atividade 5 Função Afim Linear – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



① area AEFD = 4
A área do retângulo AEFD é 4.

② sim

③ sim, ~~função de 1º grau~~

④ f(x) = 4x

⑤ o ponto P se movimenta, alterando os valores: do ponto P; do seletor g; dos pontos E, F; segmento a_1, d_1 e f_1 além do polígono1. e a área do polígono AEFD aumenta devido a movimentação do seletor g.
o ponto P forma uma reta.

⑥ sim, sobrepõe.
a função que eu deduzi sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor.

Protocolo 47 - Atividade 5 Função Afim Linear – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

1) Durante a análise da questão, observamos que o aluno não reconheceu a medida da área do polígono como $8\,cm^2$.

2) Durante a análise da questão verificamos que o aluno reconheceu que a medida da área do polígono depende do segmento $\overline{EF}$, por meio da observação na Janela de Visualização do GeoGebra protocolo 45 e 46.

3) Durante a análise da questão percebemos que o aluno apenas reconheceu a medida da área do polígono como uma função, entretanto, não a indicou. Conforme protocolo 47.

4) Verificamos que o aluno não deu um tratamento algébrico para a lei de formação da função, enunciando-a diretamente.

5) Na análise da questão, observamos que o aluno reconheceu que o ponto P descreve um segmento de reta no intervalo de [0,2], ver protocolo 47, mas não mencionou nada em relação à declividade do segmento em relação ao eixo das abscissas.

6) Durante a análise da questão, percebemos que o aluno reconheceu que a função f dada por $f(x) = 4x$, quando plotada, sobrepõe ao segmento de reta no intervalo [0,2], ver protocolos 46 e 47. Observamos que o aluno não mencionou nada sobre o o segmento de reta ser um subconjunto da reta definida em R pela função $f(x) = 4x$.

Conclusão do aluno (C)

Observamos que o aluno não reconheceu a medida da área do polígono como $8cm^2$. Mas, conseguiu associar a medida da área do retângulo como uma função linear $f(x) = 4x$, enunciando-a diretamente sem usar a medida da área do retângulo para deduzi-la, conforme esperávamos. Reconheceu o caminho descrito pelo ponto P no intervalo [0,2]. No entanto, não reconheceu este caminho como um segmento de reta e sim como uma reta e concluiu que o gráfico descrito pela função $f(x) = 4x$ sobrepôs o segmento ou caminho descrito por P no referido intervalo.

5.3.2 Atividade 6 - Função Afim

Questão adaptada do livro Matemática - volume 1 versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola (p.80)

Construção de uma função afim, por meio de medida da área, utilizando o GeoGebra.

Objetivos

- Mostrar com o auxílio do GeoGebra que podemos enunciar uma lei de formação para uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \Re$.
- Investigar com o auxílio do GeoGebra e interpretar o perímetro de um polígono como uma função afim.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo “Atividade6_seunome”.

Deixe as Janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Situação problema

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado $\overline{AB}$ marcar um ponto E a x cm de A. Por E traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. De modo que obtenha dois retângulos ABCD e MBCF.

Processo de construção

1) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.

2) Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.

3) Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.

4) Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.

5) Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.

6) Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o lado $\overline{AB}$, para obter o ponto E a x cm de A (por exemplo x = 2 cm.)

7) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obtenha por E uma perpendicular.

8) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC e obtenha F.

9) Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre os pontos E e F, para obter o segmento $\overline{EF}$.

10) O segmento $\overline{AE}$ mede x cm o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.

11) Na Janela Algébrica, clique sobre a bolinha da reta e a desabilite.

12) Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A, E, F, D, A, e obtenha, assim, dois retângulos ABCD e AEFD.

13) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

14) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da Janela de Visualização para obter o seletor g. Com o botão direito, clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.

15) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.

16) Ative a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro (8ª janela), clique sobre a medida da área do polígono.

17) Na Janela Algébrica desative o polígono AEFD.

Abordagem teórica

1) Qual o perímetro do retângulo AEFD no intervalo [0,2]?

2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. O perímetro do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{AE}$?

3) O perímetro do retângulo AEFD pode ser interpretado como uma função? Se sim defina esta função.

4) Deduza a fórmula do perímetro do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função f .

5) Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P e habilite-o. Logo em seguida, com o botão direito, clique sobre o seletor g, clique opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

6) Dê uma interpretação para o gráfico da função do perímetro no plano cartesiano.

7) No campo de entrada digite a função que você deduziu e verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor. Existe alguma relação entre a reta e o segmento de reta?

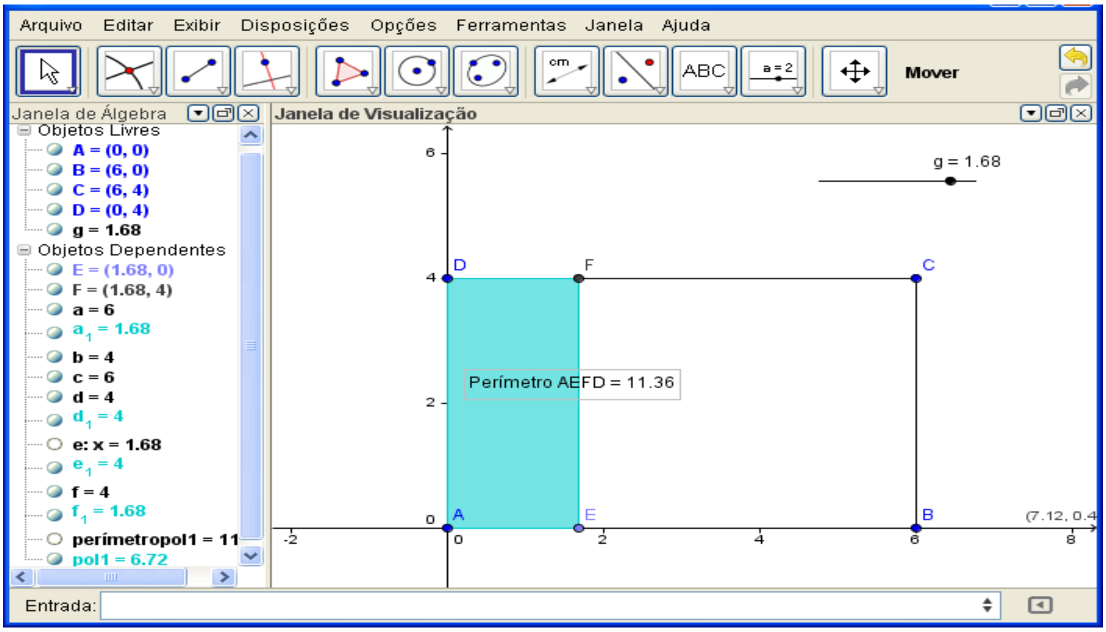


Figura 49 – Atividade 6 Função Afim
Fonte: O Autor (2012)

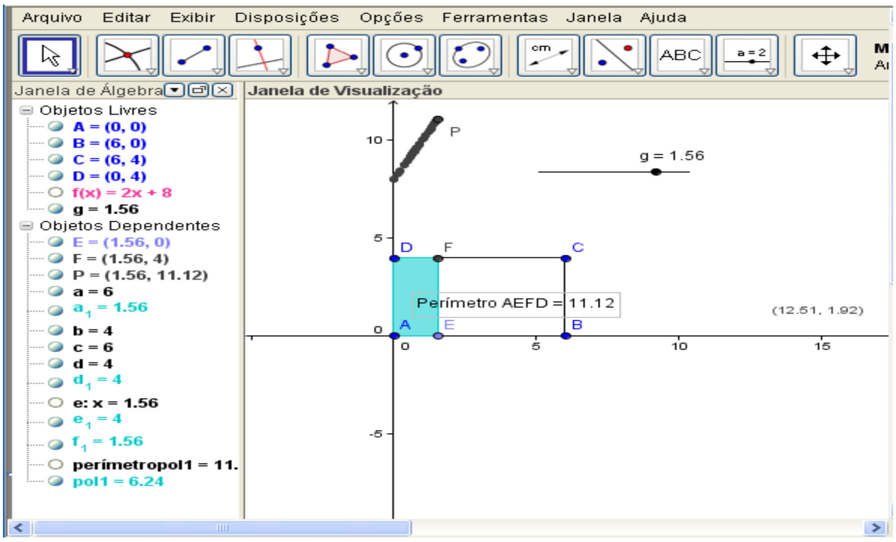


Figura 50 – Atividade 6 Função Afim
Fonte: O Autor (2012)

1) Qual o perímetro do retângulo AEFD no intervalo [0,2]?

O aluno teria três possibilidades de resposta na observação das janelas do *software*:

1ª) Esperávamos que o aluno observasse a Janela de Visualização do GeoGebra e respondesse de acordo com a informação da mesma que o perímetro no intervalo [0,2] é igual a 12 cm.

2ª) Esperávamos que o aluno observasse a Janela Algébrica e respondesse que o perímetro do polígono no intervalo [0,2] é igual a 12 cm.

3ª) Esperávamos que o aluno observasse tanto a Janela de Visualização, quanto a janela Algébrica, respondesse que o perímetro no intervalo[0,2] é igual a 12 cm e realizasse, assim, uma conversão.

Para trabalhar questões envolvendo perímetro é necessário ter uma compreensão do significado do termo. Para Goldstein (2000, p. 45) *o perímetro de uma figura ou a distância em torno dela é um comprimento ou a soma de comprimentos. Unidades típicas, se especificadas, são: polegadas, pés, centímetros, metros e assim sucessivamente.*

Nossa expectativa é que o aluno reconheça o perímetro de uma figura retangular como soma das medidas dos seus lados e que essa medida seja linear.

2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. O perímetro do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{AE}$?

Esperávamos que o aluno ao movimentar o seletor g percebesse que, quando os lados $\overline{DF}$ e $\overline{AE}$ variam, o perímetro também varia e que acréscimos iguais nos lados $\overline{DF}$ e $\overline{AE}$ acarretam acréscimos iguais no perímetro.

3) O perímetro do retângulo AEFD pode ser interpretado como uma função? Se sim, definir esta função.

Esperávamos duas alternativas como resposta:

1ª) Esperávamos que o aluno ao movimentar o seletor g percebesse que à medida que os segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{AE}$ sofressem variações, interfereria na variação da medida do perímetro. E concluísse que como há uma dependência do perímetro em relação aos lados, logo o mesmo pode ser interpretado como uma função.

2ª) Esperávamos também que o aluno enunciasse o perímetro como função.

4) Deduza a fórmula do perímetro do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função f.

Esperávamos duas alternativas como resposta:

1ª) Esperávamos que, pelo fato de conhecer a lei de formação de uma função afim, a enunciasse como $f(x) = 2x + 8$.

2ª) Esperávamos que o aluno reconhecesse que o perímetro é a soma das medidas dos lados de uma figura e atribuísse um tratamento algébrico, reconhecendo-o como uma função afim.

Sendo os lados da figura $\overline{DF} = \overline{AE} = x$ e $\overline{EF} = \overline{AD} = 4$

Temos que a fórmula do perímetro é dada por $2p = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{DA}$

Logo $2p = x + 4 + x + 4$

$2p = 2x + 8$ e concluísse que $2p = f(x)$ então $f(x) = 2x + 8$.

5) Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P habilitando-o. Logo em seguida, com o botão direito clique sobre o seletor g, clique na opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

Esperávamos que o aluno observasse e reconhecesse por meio da Janela de Visualização que o ponto P descreve um segmento de reta crescente com uma das extremidades no ponto (0,8) e outra no ponto (2,12).

6) Dê uma interpretação para o gráfico da função do perímetro descrito por P no intervalo [0,2].

Esperávamos que o aluno percebesse que, ao movimentar o seletor g na Janela de Visualização, o ponto P varia os seus valores, à medida que o perímetro varia também os seus valores, ou seja, que os acréscimos iguais sofridos pelo perímetro influenciam diretamente no gráfico descrito por P, e concluísse que o segmento de reta descrito por P descreve o perímetro do polígono no plano cartesiano.

7) No campo de entrada digite a função que você deduziu e verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor (Figura 51). Existe alguma relação entre a reta e o segmento de reta?

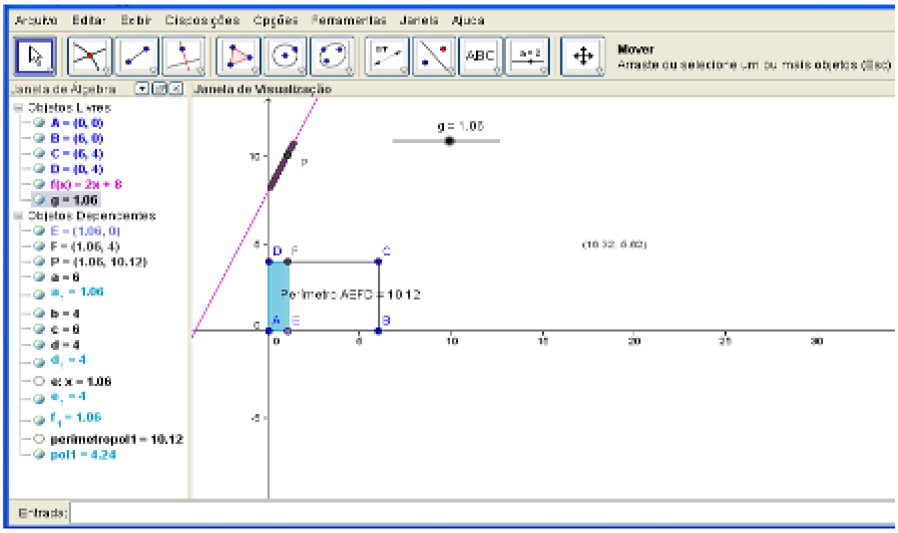


Figura 51– Atividade 6 Função Afim
Fonte: O Autor (2012)

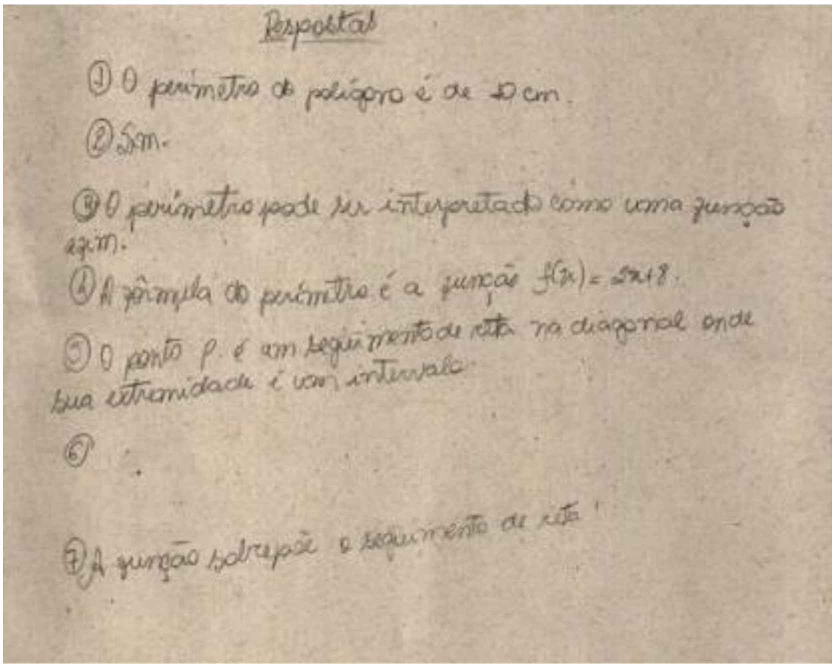
Para esta questão poderia haver duas respostas:

1ª) Esperávamos que o aluno observasse na Janela de Visualização que a reta, $f(x) = 2x + 8$, sobrepôs o segmento de reta. E que o segmento de reta é um subconjunto da reta definida pela $f(x) = 2x + 8$.

2ª) Esperávamos que o aluno enunciasse, simplesmente, que a reta $f(x) = 2x + 8$, sobrepôs o segmento de reta no intervalo [0,2].

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

Aluno (A)


Resposta

① O perímetro do polígono é de 20 cm.

② 5cm.

③ O perímetro pode ser interpretado como uma função afim.

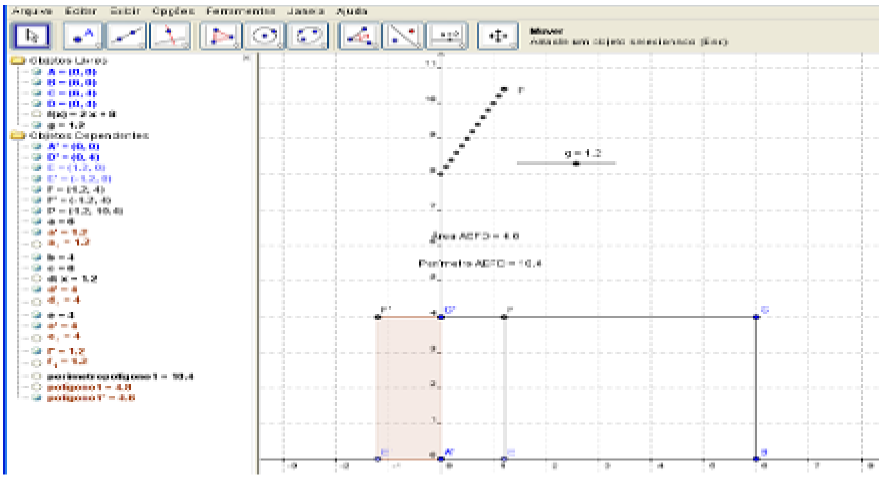
④ A fórmula do perímetro é a função f(x)= 2x+8.

⑤ O ponto P é um seguimento de reta na diagonal onde sua extremidade é um intervalo.

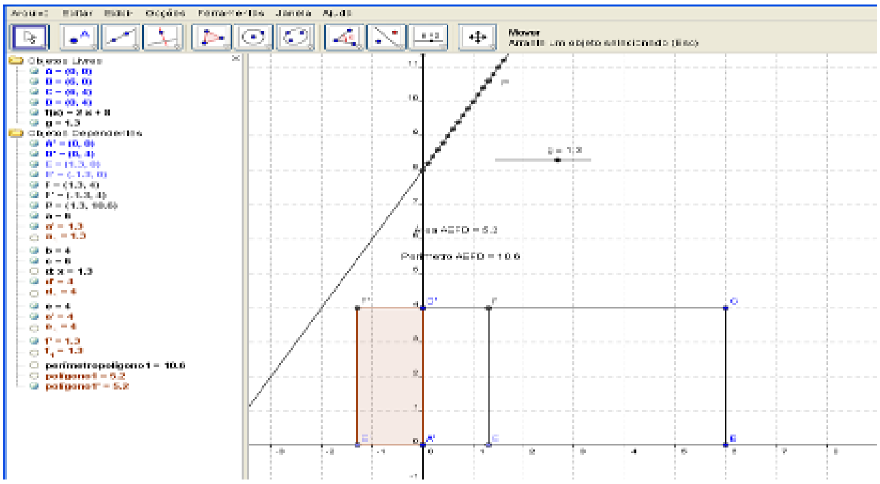
⑥

⑦ A função sobrepõe o seguimento de reta.

Protocolo 45 - Atividade Função Afim – aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 46 - Atividade Função Afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 47 – Atividade Função Afim - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

1) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu o perímetro como sendo 10 cm. Porém, o que esperávamos era que o aluno observasse o valor do perímetro que seria de 12 cm, no intervalo [0,2].

2) Também verificamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu que, ao movimentar o seletor g na medida da área de visualização, o perímetro depende do lado $\overline{AE}$, mas não teceu nenhuma conjectura.

3) Na análise da questão percebemos que o aluno reconheceu que o perímetro poderia ser interpretado como uma função, classificando-o corretamente como uma função afim. Ainda observamos que as respostas foram diretas sem tecer nenhuma conjectura, conforme havíamos previsto anteriormente.

4) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu e classificou a função como $f(x) = 2x + 8$ sem tecer nenhuma conjectura como previsto.

5) Ao analisarmos essa questão, vimos que o aluno reconheceu que o ponto P descreve um segmento de reta na diagonal do intervalo.

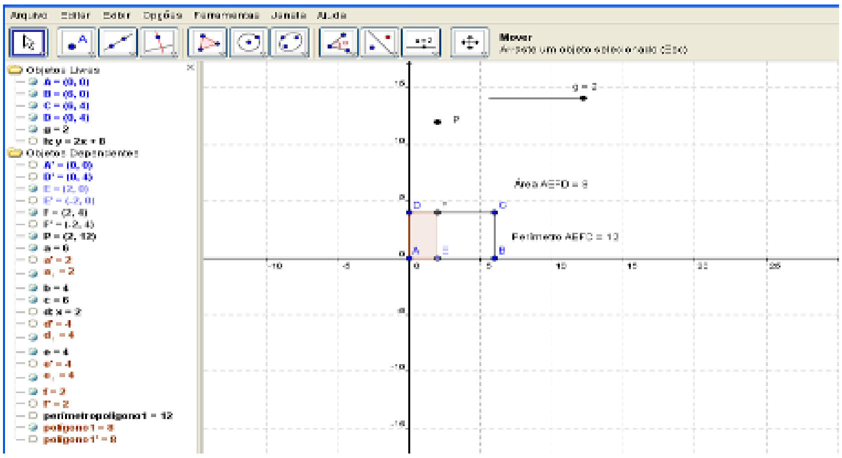
6) Também verificamos que o aluno não reconheceu que o segmento de reta descrito na Janela de Visualização representasse o perímetro da figura.

7) Percebemos que o aluno não reconheceu que o segmento de reta é um subconjunto da reta descrita por $f(x) = 2x + 8$. No entanto, reconheceu que a reta sobrepôs o segmento de reta.

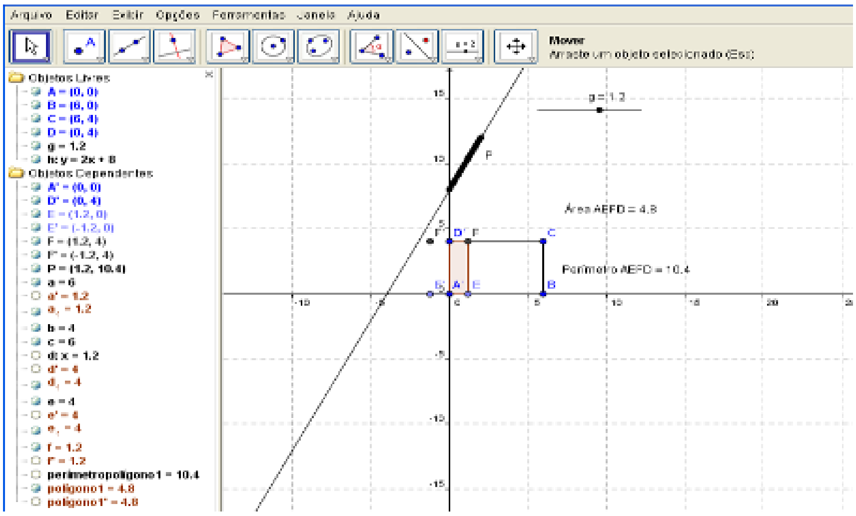
Conclusão sobre o aluno (A)

Observamos durante a análise das questões que o aluno, devido ao dinamismo do *software*, respondeu corretamente às questões propostas. Para determinar a lei de formação da função afim, ele não fez uso do perímetro do retângulo, dessa forma não atendeu ao que esperávamos. Percebemos, também, que o aluno não reconheceu que o segmento de reta no intervalo [0,2] é um subconjunto da função $f(x) = 2x + 8$ em $\Re$. Ao investigar o caminho descrito por P, faltou ao aluno fazer uma articulação entre o perímetro do retângulo AEFD e o segmento ou "caminho" descrito por P no intervalo [0,2] e concluir que o referido segmento representa o perímetro do retângulo citado. Entretanto, o aluno reconheceu que o perímetro poderia ser entendido como uma função afim. Assim, ele reconheceu o mesmo objeto por duas representações diferentes, que seria uma conversão de acordo com os Registros de Representações Semióticas, *que consiste em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados* (DUVAL 2003, p.16).

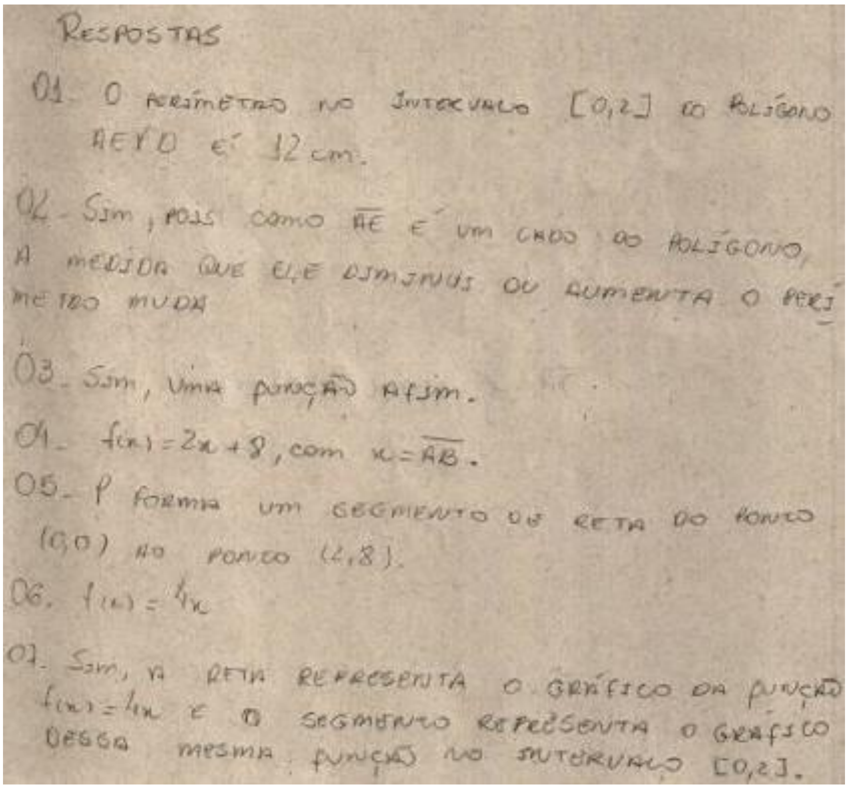
Aluno (B)



Protocolo 48 – Atividade Função Afim - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 49– Atividade Função Afim - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



RESPOSTAS

01. O PERÍMETRO NO INTERVALO [0,2] DO POLÍGONO AEFD É 12 cm.

02. SIM, POIS COMO $\overline{AE}$ É UM LADO DO POLÍGONO A MEDIDA QUE ELE DIMINUI OU AUMENTA O PERÍMETRO MUDA

03. SIM, UMA FUNÇÃO AFIM.

04. $f(x) = 2x + 8$, com $x = \overline{AB}$.

05. P FORMA UM SEGMENTO DE RETA DO PONTO (0,0) AO PONTO (4,8).

06. $f(x) = 4x$

07. SIM, A RETA REPRESENTA O GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = 4x$ E O SEGMENTO REPRESENTA O GRÁFICO DESSA MESMA FUNÇÃO NO INTERVALO [0,2].

Protocolo 50 - Atividade Função Afim – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

1) Observamos durante a análise da questão que o aluno reconheceu que o perímetro do polígono é igual a 10, mas não fez nenhuma referência à unidade de medida. Correspondendo, parcialmente, à nossa expectativa, pelo fato de não citar a unidade de medida referente ao perímetro, uma vez que esta não foi considerada no intervalo [0,2].

2) Durante a análise da questão, ainda verificamos que o aluno ao investigar que quando $\overline{AE}$ varia, o perímetro também varia e concluiu que o mesmo depende do lado $\overline{AE}$.

3) Na análise dessa questão, percebemos que o aluno reconheceu que o perímetro pode ser interpretado como uma função e a classificou como uma função afim.

4) Para essa questão o aluno enunciou diretamente a lei de formação sem tecer nenhuma conjectura algébrica, ou dar um tratamento algébrico conforme havíamos previsto anteriormente.

5) Percebemos durante a análise da questão que o aluno reconheceu ao investigar que o ponto P, descreve um segmento de reta inclinado no intervalo [0,2].

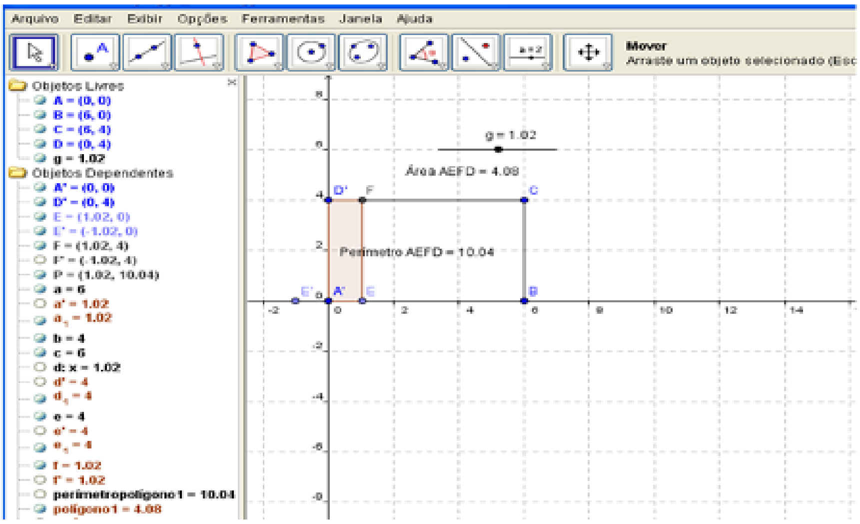
6) Durante a análise da questão, observamos que o aluno reconheceu, analisou e interpretou corretamente o gráfico no plano cartesiano no intervalo [0,2] como o perímetro do polígono.

7) Na análise da questão, também percebemos que o aluno reconheceu que a reta no intervalo de [0,2] sobrepõe o segmento de reta. No entanto, não reconheceu o segmento de reta no intervalo considerado como um subconjunto de reta definida pela função f dada por $f(x) = 2x + 8$ conforme protocolos 52 e 53.

Conclusão sobre o aluno (B)

Observamos durante a análise das questões que o *software* GeoGebra, pelo seu dinamismo, propiciou que o aluno interpretasse e respondesse às questões de forma correta, mesmo aquelas que exigiam tratamento algébrico. Também percebemos que o aluno conseguiu reconhecer o mesmo objeto de duas representações diferentes, o que caracteriza uma conversão. Isto pode ser observado quando o aluno faz a articulação do perímetro com o segmento descrito pelo ponto P por meio do GeoGebra.

Aluno (C)



Protocolo 51– Atividade Função Afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

1) Qual perímetro do retângulo AEFD? Perímetro AEFD = 10
2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. O perímetro do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{AE}$?
3) A o perímetro do retângulo AEFD pode ser interpretado como uma função? Se sim conceitue esta função. sim, função afim. f(x) ax + b
4) Deduza, informalmente, a fórmula do perímetro do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função $f(x)$. $f(x) = 2x + 8$
5) Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P habilitando-o. Logo em seguida com o botão direito clique sobre o seletor g, clique opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2]
6) Dê uma interpretação para o gráfico da função do perímetro
7) No campo de entrada digite a função que você deduziu e verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor. Faça um comentário.

(2) sim, o perímetro do retângulo varia para mais ou para menos, dependendo do tamanho do segmento $\overline{AE}$.

Protocolo 52 - Atividade Função Afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

(5) na janela algébrica os valores do ponto P variam de 8 ao 12 no eixo das ordenadas (lenta) no intervalo de [0,2].
na janela gráfica o ponto P se movimenta do 8 ao 12 e do 12 ao 8 no eixo das ordenadas, de forma inclinada.

(6) Ronaldo, eu não sei como interpretar o gráfico em função do perímetro. + não possuo conhecimento ~~e o certo~~ teórico ~~para isto~~ para resolver esta questão.

(7) a função deduzida por mim sobrepõe a função que se desloca no intervalo de [0,2] do seletor, de forma inclinada.

Protocolo 53 - Atividade Função Afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

1) Observamos durante a análise da questão que o aluno não reconheceu o perímetro do polígono como sendo 12 cm. Além disso, não se referiu à unidade de medida.

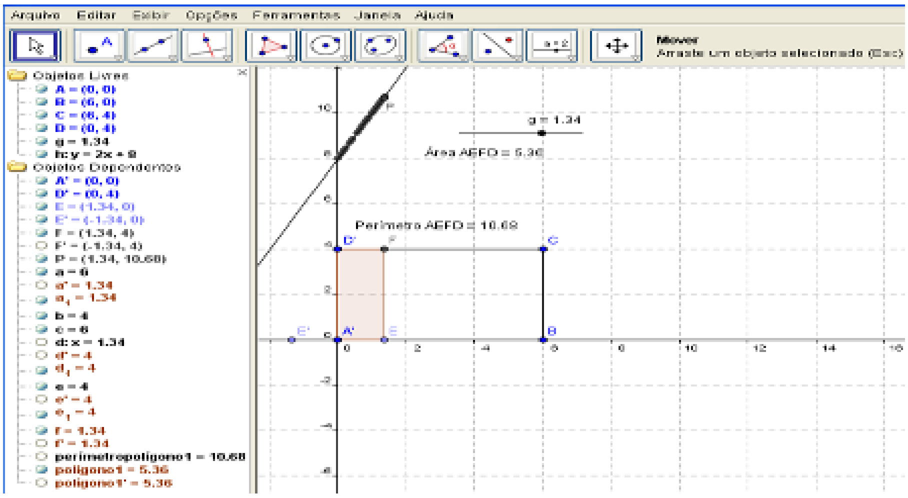
2) No decorrer da análise da questão, percebemos que o aluno investigou e concluiu ao deslocar o seletor g, protocolo 54, que o perímetro do retângulo sofre variação dependendo do tamanho do segmento $\overline{AE}$ e, consequentemente, o polígono AEFD depende do segmento $\overline{AE}$.

3) Ainda observamos que o aluno reconheceu o perímetro como uma função e a classificou como uma função afim, contudo, faltou rigor matemático ao enunciá-la.

Perguntamos para o aluno: “Como você identificou e classificou a função afim como $f(x) = ax + b$?”

Obtivemos como resposta: “*Eu já conhecia a fórmula da função afim e aí eu associei com os dados da construção e defini a lei*”.

4) Na análise da questão, também percebemos que o aluno enunciou diretamente a lei de formação da função como $f(x) = 2x + 8$, como havíamos previsto. Mas não conseguiu dar um tratamento algébrico ao perímetro, deduzindo-o e o reconhecendo como uma função afim.



Protocolo 54 – Atividade Função Afim - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

5) Observamos durante a análise da questão que o aluno analisou o comportamento do ponto P tanto pela Janela Algébrica quanto pela Janela de Visualização do GeoGebra. Reconheceu que na janela gráfica o ponto P se movimenta de forma inclinada em relação ao eixo das ordenadas, analisando também as extremidades dos pontos corretamente.

6) Durante a análise da questão percebemos que o aluno não conseguiu associar o “caminho” percorrido pelo ponto P como representante do perímetro do polígono AEFD.

7) Ainda nessa questão, vimos que o aluno reconheceu que a função $f(x) = 2x + 8$ sobrepôs o segmento de reta no intervalo [0,2] e observou que a mesma tem inclinação igual ao segmento de reta.

No final da atividade perguntamos: “Qual foi a dificuldade encontrada para a realização da atividade?”

Obtivemos como resposta: “*A minha dificuldade é de interpretar o que a questão esta pedindo para fazer*”.

Conclusão sobre o aluno (C)

O aluno não deu um tratamento algébrico para deduzir a lei de formação para a função afim e demonstrou dificuldades de interpretar as questões. No entanto, conseguiu com a ajuda do *software* investigar e responder algumas questões propostas.

5.4. 4º Encontro: descrição e análise das atividades 7 e 8

Neste encontro, estava previsto para serem desenvolvidas duas atividades: o *redesign* da atividade 6 - explorando o plano cartesiano - e desenvolver a atividade 7 com função quadrática.

5.4.1 Atividade 7 – plano cartesiano.

Nessa atividade de *redesign*, não exploramos a simetria, o que será abordada na atividade de *redesign* apresentada no final do trabalho.

Objetivos:

- Identificar pontos no plano cartesiano
- Construir uma tabela a partir do plano cartesiano.
- Determinar lei de formação a partir de um dado problema.
- Representar pares ordenados no plano cartesiano.

Recursos didáticos e tecnológicos

- Fotocópia da Atividade 7
- Lápis e papel

1) Com base no plano cartesiano representado, pela figura a seguir, com os respectivos pontos preencha a tabela dada.

Esperávamos que o aluno fizesse a transposição dos dados do gráfico para uma tabela, identificasse as abscissas e ordenadas de cada ponto. Neste caso, de acordo com a teoria de Duval (2003) ele deveria fazer uma conversão tomando como ponto de partida o gráfico e como ponto de chegada a tabela.

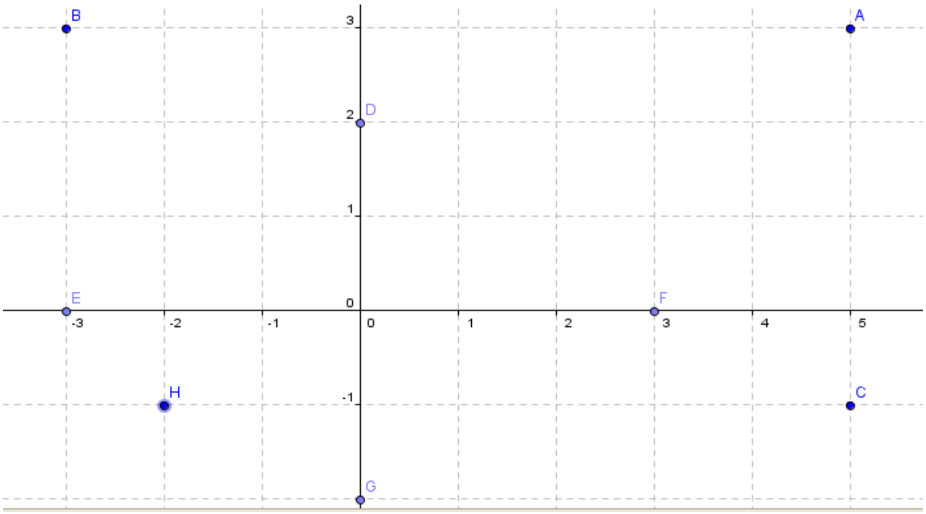


Figura 52 – Atividade 7 plano cartesiano
Fonte: O Autor (2012)

2) Situação problema

Relação do número de carros com o número de pneus: considerar a variável x para carros populares e a variável y para pneus. Deve ser levado em conta que são carros com 4 pneus, mais o pneu reserva (estepe), num total de 5 pneus. Se:

2.a) se em uma garagem tiver zero carro, terá quantas pneus?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que, se não houvesse nenhum carro na garagem, teríamos: $0x5=0$ pneus

2.b) em uma garagem tem 1 carro, têm quantas pneus?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que se tivesse 1 carro na garagem, teríamos:

$1x5=5$ pneus.

2.c) em uma garagem tem 2 carros, têm quantos pneus?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que se tivéssemos 2 carros na garagem teríamos:

$2x5=10$ pneus.

2.d) em uma garagem onde tiver 3 carros, terão quantas pneus?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que, se tivessem 3 carros, teríamos:

$3x5=15$ pneus.

2.e) em uma garagem onde tiver 4,5,6... carros, terão quantas pneus?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que a quantidade de pneus era dada pelo número de carros vezes o número de pneus, ou seja:

Para quatro carros: 4 x 5 = 20 pneus.

Para cinco carros: 5 x 5 = 25 pneus.

Para seis pneus: 6x 5 = 30 pneus e, assim sucessivamente.

2.f) Nas questões de 1 a 5, é possível um par ordenado estar no 4º quadrante? Justifique.

Esperávamos que o aluno reconhecesse que não era possível ter um par ordenado no 4º quadrante pelo motivo de se tratar de quantidades e, sendo assim, não existe quantidade negativa.

2.g) É possível obter uma fórmula ou uma lei de formação para relação entre o número de carros e o número de pneus? Se sim, qual é esta lei?

Esperávamos que o aluno reconhecesse que era possível existir uma maneira mais fácil de descobrir a quantidade de pneus relacionada com a quantidade de carros por meio de uma lei de formação. Sendo esta descoberta por meio de conjecturas entre as questões anteriormente resolvidas.

2.h) A partir da lei de formação, da questão 7, construa uma tabela para a quantidade de pneus para os 7 primeiros carros populares de números pares consecutivos, a começar pelo 4º carro.

Esperávamos que o aluno representasse os valores destinados às abscissas e ordenadas corretamente numa tabela.

2.i) Represente estes pares ordenados no sistema de coordenadas cartesianas.

Esperávamos que o aluno representasse corretamente os pares ordenados no gráfico usando como ponto de saída a tabela e como ponto de chegada o gráfico, para, assim, obter uma conversão.

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 4º. ENCONTRO

Neste encontro o nosso objetivo era fazer a socialização da atividade de função afim, fazer um *redesign* da atividade desenvolvida no 1º encontro sobre plano cartesiano, usando somente a mídia lápis-papel, e desenvolver a atividade com **função quadrática** abordando a maximização de medida da área e o conceito de reta tangente.

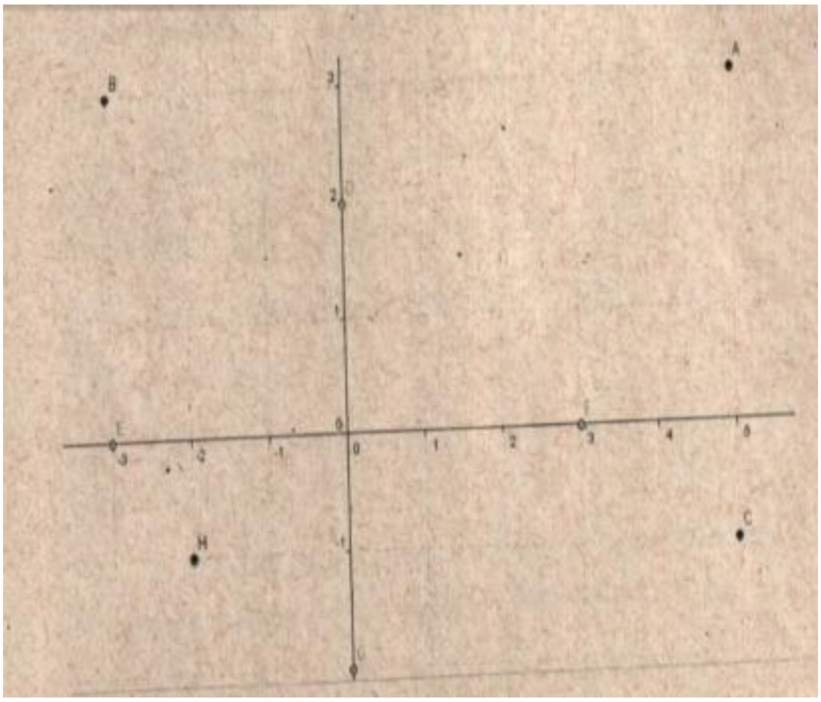
Apresentamos a atividade referente à aula anterior sobre função afim para que pudéssemos fazer uma retomada do conteúdo. Neste momento, abordamos o conteúdo sobre perímetro que era o ponto-chave, naquela atividade, para definição de função afim. Discutimos sobre a relação do gráfico com o segmento de reta descrito pelo ponto P no intervalo [0,2], que naquele caso era um subconjunto da reta em R e que representava, também, o perímetro do polígono AEFD no referido intervalo. Percebemos que buscamos sempre fazer a interação entre o significado geométrico descrito pelo *software* na Janela de Visualização e o significado mostrado pelo mesmo na Janela Algébrica. Comentamos também sobre a declividade da reta e, por fim, levamos os alunos a verem a diferença entre uma função linear afim e uma função afim.

Dando prosseguimento aos nossos trabalhos, distribuímos uma atividade fotocopiada para todos os alunos, envolvendo aplicações sobre o plano cartesiano. Queríamos saber o que os alunos haviam absorvido até então. Para realização desta atividade, os alunos usariam somente lápis e papel. Percebemos no decorrer das atividades que os alunos apresentaram uma desenvoltura muito boa quanto ao desenvolvimento das questões propostas. Terminada a atividade, a mesma foi recolhida para ser analisada. Logo em seguida, começamos a desenvolver a atividade sobre função quadrática. Observamos muita rapidez dos alunos para a construção geométrica apresentada e que haviam minimizado as dificuldades em desenvolvê-la, isto é, mostravam familiaridade com o *software* e com as orientações para o desenvolvimento da atividade. Terminada a atividade, a mesma foi salva na medida da área de trabalho para, no final da aula, ser gravada em um HD externo e analisada.

Depois, fizemos a socialização da atividade envolvendo plano cartesiano. Neste momento, procuramos dar uma ênfase maior nos pontos que estavam situados sobre os eixos do plano cartesiano, que foi uma das questões que os alunos mais tiveram dúvidas na realização da primeira atividade "explorando o plano cartesiano". Em seguida, abordamos a atividade envolvendo função quadrática, os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função na qual percebemos algumas dúvidas relacionadas com reflexão de uma figura com relação a uma reta, reta tangente a uma curva, a relação de ponto de máximo e a reta tangente. Procuramos adiantar, intuitivamente, alguns conceitos que os alunos iriam precisar no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática. Observamos que eles já estavam mais críticos com relação a associar a parte gráfica com a parte algébrica e procuravam tecer conjecturas entre as mesmas na busca de solução para as perguntas relacionadas às atividades. Não poderíamos deixar de registrar que, a cada construção os alunos, estavam cada vez mais deslumbrados com o dinamismo das figuras propiciado pelo *software* GeoGebra. Passamos agora à análise das atividades desenvolvidas pelos alunos.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

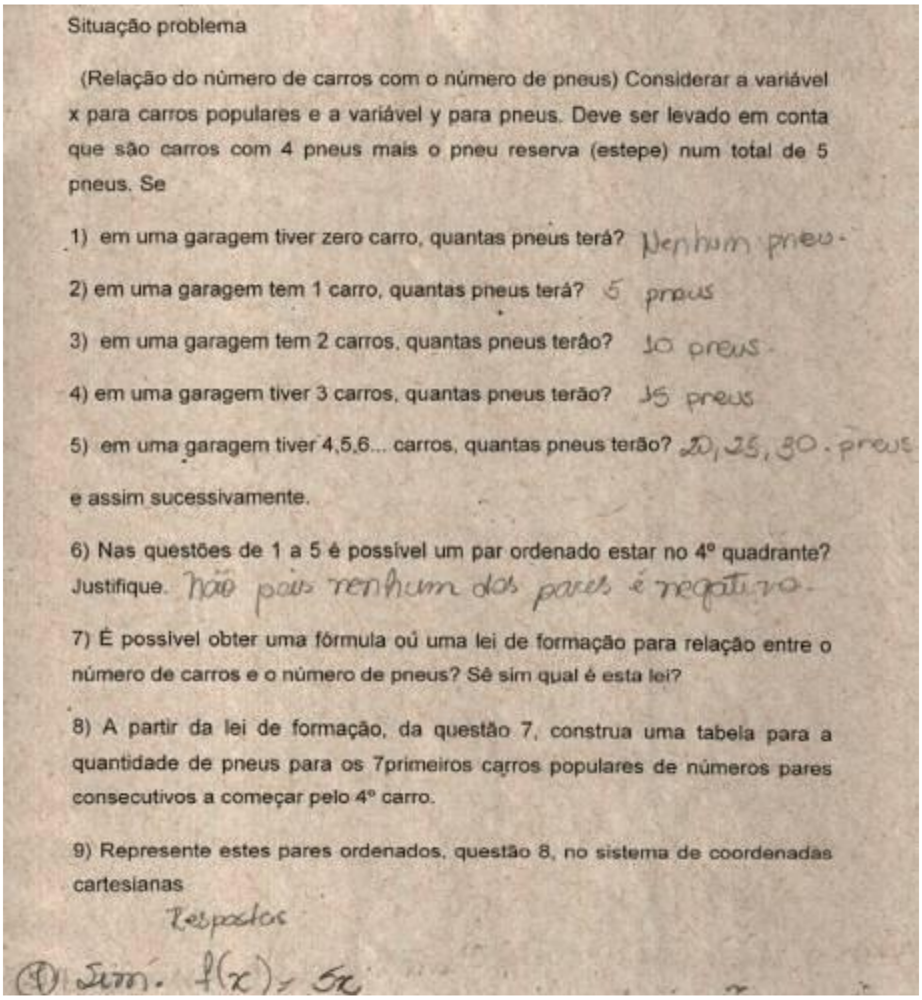
Aluno (A)



Protocolo 55- Atividade plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

	X	Y
A	5	3
B	-3	3
C	5	-1
D	0	2
E	-3	0
F	3	0
G	0	-2
H	-2	-1

Protocolo 56- Atividade plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Situação problema

(Relação do número de carros com o número de pneus) Considerar a variável x para carros populares e a variável y para pneus. Deve ser levado em conta que são carros com 4 pneus mais o pneu reserva (estepe) num total de 5 pneus. Se

1) em uma garagem tiver zero carro, quantas pneus terá? Nenhum pneu.

2) em uma garagem tem 1 carro, quantas pneus terá? 5 pneus

3) em uma garagem tem 2 carros, quantas pneus terão? 10 pneus.

4) em uma garagem tiver 3 carros, quantas pneus terão? 15 pneus

5) em uma garagem tiver 4,5,6... carros, quantas pneus terão? 20, 25, 30. pneus

e assim sucessivamente.

6) Nas questões de 1 a 5 é possível um par ordenado estar no 4º quadrante? Justifique. não pois nenhum dos pares é negativo.

7) É possivel obter uma fórmula oú uma lei de formação para relação entre o número de carros e o número de pneus? Sê sim qual é esta lei?

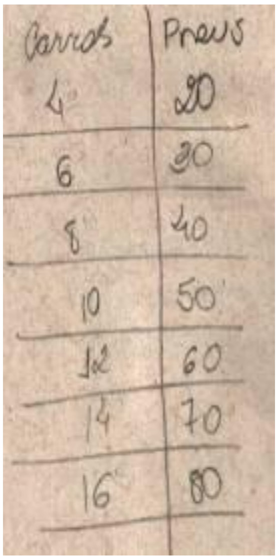
8) A partir da lei de formação, da questão 7, construa uma tabela para a quantidade de pneus para os 7primeiros carros populares de números pares consecutivos a começar pelo 4º carro.

9) Represente estes pares ordenados, questão 8, no sistema de coordenadas cartesianas

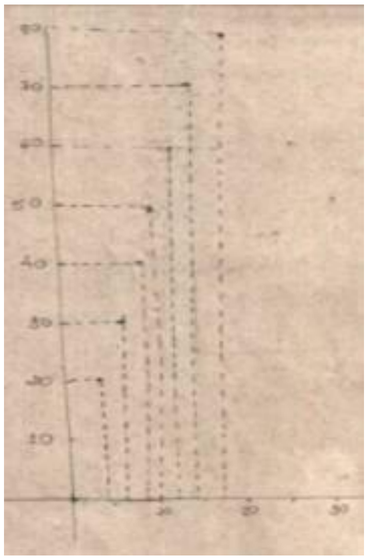
Respostas

(7) Sim. $f(x) = 5x$

Protocolo 57 - Atividade plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Carros	Pneus
4	20
6	30
8	40
10	50
12	60
14	70
16	80

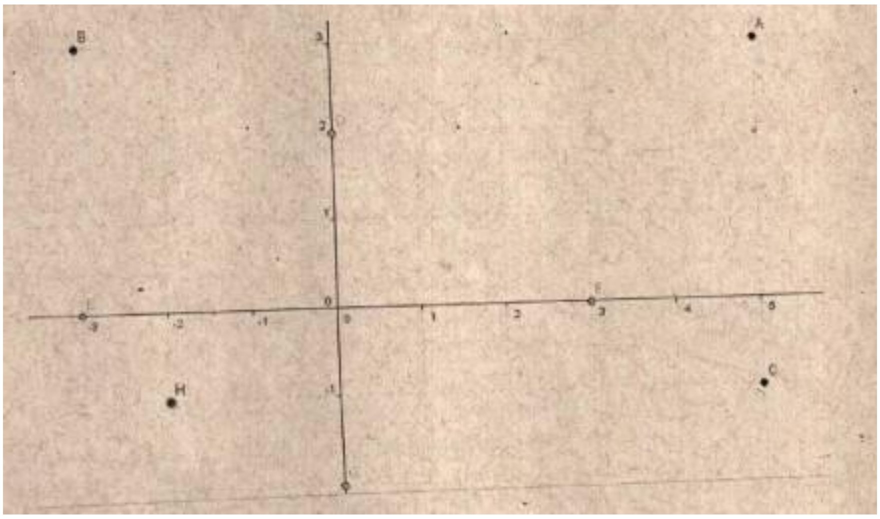


Protocolo 58- Atividade plano cartesiano aluno (A) **Protocolo 59**- Atividade plano cartesiano - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

Conclusão sobre o aluno (A)

Ao analisarmos a atividade desenvolvida pelo aluno, percebemos que ele conseguiu transcrever valores de um gráfico (ponto de partida) para uma tabela (ponto de chegada). Assim como construir partindo de uma tabela (ponto de saída), um gráfico (ponto de chegada). Também não apresentou dificuldades em localizar pontos sobre os eixos coordenados. Resolveu as questões propostas pelo problema, porém não deu tratamento algébrico para resolver as questões propostas como havíamos previsto. Entretanto, conseguiu resolver de forma lógica e correta as questões. Ainda, definiu corretamente a lei de formação da função afim linear. Além disso, verificamos que, o aluno conseguiu fazer corretamente as conversões propostas pela atividade, reconhecendo o mesmo objeto por mais de uma notação.

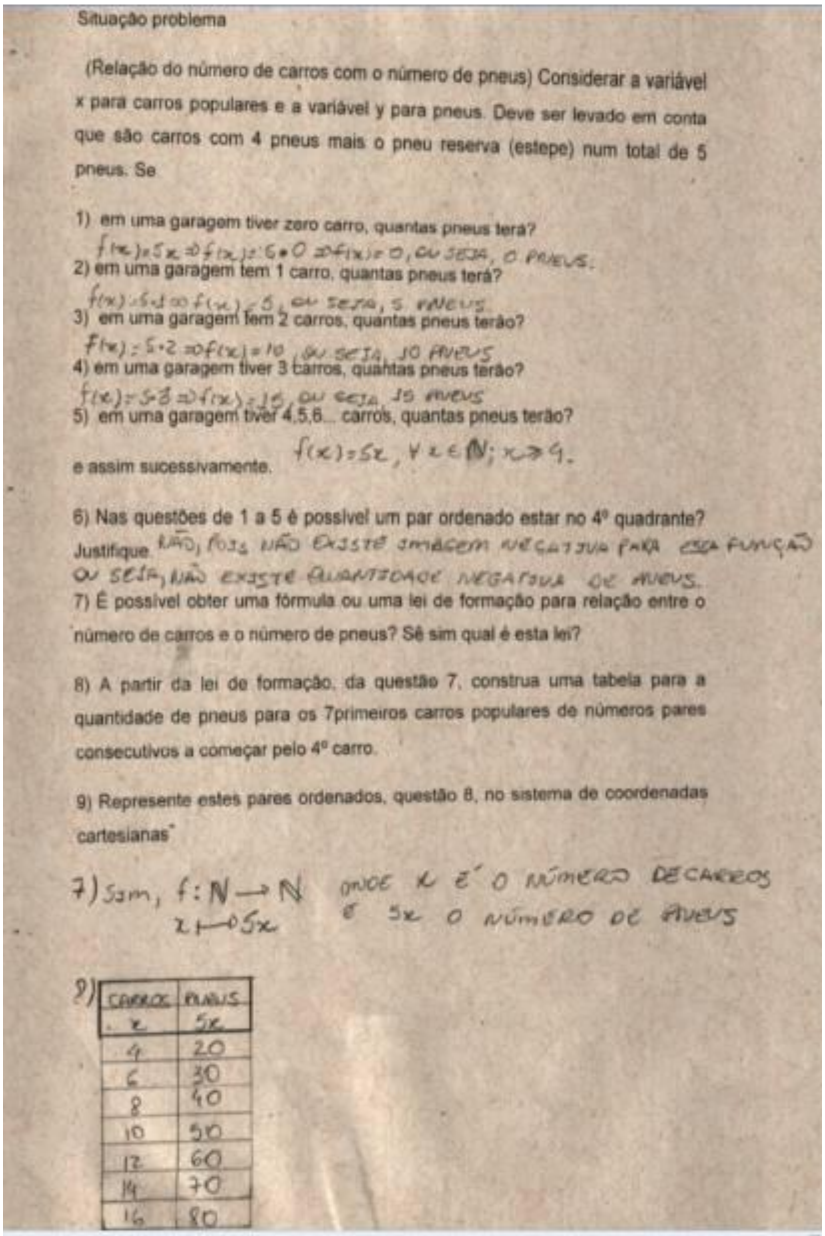
Aluno (B)



Protocolo 60- Atividade Plano Cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

	X	Y
A	5	3
B	-3	3
C	5	-1
D	0	2
E	-3	0
F	3	0
G	0	-2
H	-1	-2

Protocolo 61- Atividade Plano Cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Situação problema

(Relação do número de carros com o número de pneus) Considerar a variável x para carros populares e a variável y para pneus. Deve ser levado em conta que são carros com 4 pneus mais o pneu reserva (estepe) num total de 5 pneus. Se

1) em uma garagem tiver zero carro, quantas pneus terá?

$f(x) = 5x \Rightarrow f(x) = 5 \cdot 0 \Rightarrow f(x) = 0$, OU SEJA, 0 PNEUS.

2) em uma garagem tem 1 carro, quantas pneus terá?

$f(x) = 5 \cdot 1 \Rightarrow f(x) = 5$, OU SEJA, 5 PNEUS

3) em uma garagem tem 2 carros, quantas pneus terão?

$f(x) = 5 \cdot 2 \Rightarrow f(x) = 10$, OU SEJA, 10 PNEUS

4) em uma garagem tiver 3 carros, quantas pneus terão?

$f(x) = 5 \cdot 3 \Rightarrow f(x) = 15$, OU SEJA, 15 PNEUS

5) em uma garagem tiver 4,5,6... carros, quantas pneus terão?

e assim sucessivamente. $f(x) = 5x,\ \forall x \in \mathbb{N};\ x \geq 4.$

6) Nas questões de 1 a 5 é possível um par ordenado estar no 4º quadrante?

Justifique. NÃO, POIS NÃO EXISTE IMAGEM NEGATIVA PARA ESSA FUNÇÃO OU SEJA, NÃO EXISTE QUANTIDADE NEGATIVA DE PNEUS.

7) É possível obter uma fórmula ou uma lei de formação para relação entre o número de carros e o número de pneus? Sê sim qual é esta lei?

8) A partir da lei de formação, da questão 7, construa uma tabela para a quantidade de pneus para os 7primeiros carros populares de números pares consecutivos a começar pelo 4º carro.

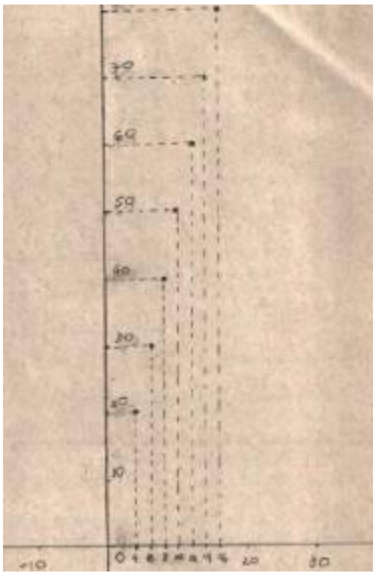
9) Represente estes pares ordenados, questão 8, no sistema de coordenadas cartesianas"

7) SIM, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto 5x$ ONDE x É O NÚMERO DE CARROS E $5x$ O NÚMERO DE PNEUS

8)

CARROS	PNEUS
x	$5x$
4	20
6	30
8	40
10	50
12	60
14	70
16	80

Protocolo 62 - Atividade Plano Cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

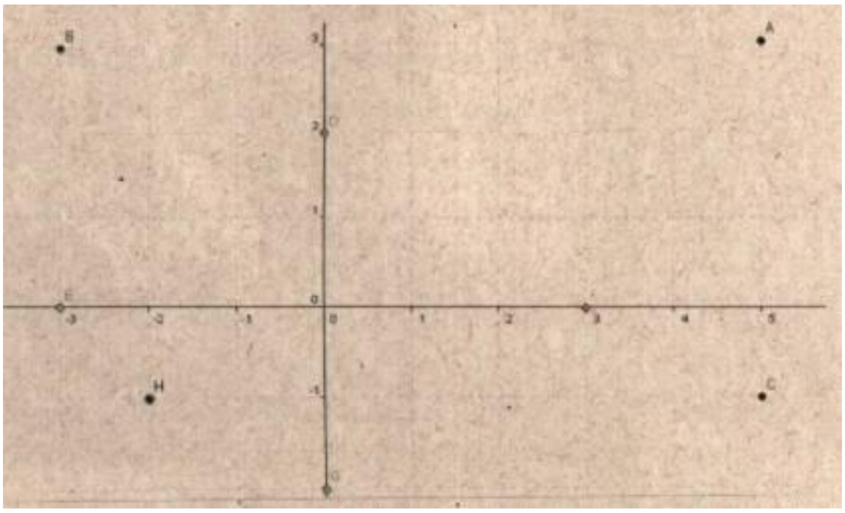


Protocolo 63 - Atividade Plano Cartesiano - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

Conclusão do aluno B

Observamos durante análise das questões que o aluno não apresentou dificuldades em mudar o sentido de conversão, ou seja, transcrever pares ordenados de uma tabela (protocolo 61) para uma representação gráfica (protocolo 60), ter como ponto de partida a tabela e como ponto de chegada o gráfico e vice-versa. Definiu com rigor matemático a lei de formação da função (protocolo 62). Percebemos também que o aluno deu um tratamento algébrico para as questões 1-5 e não apresentou dificuldades para resolvê-las.

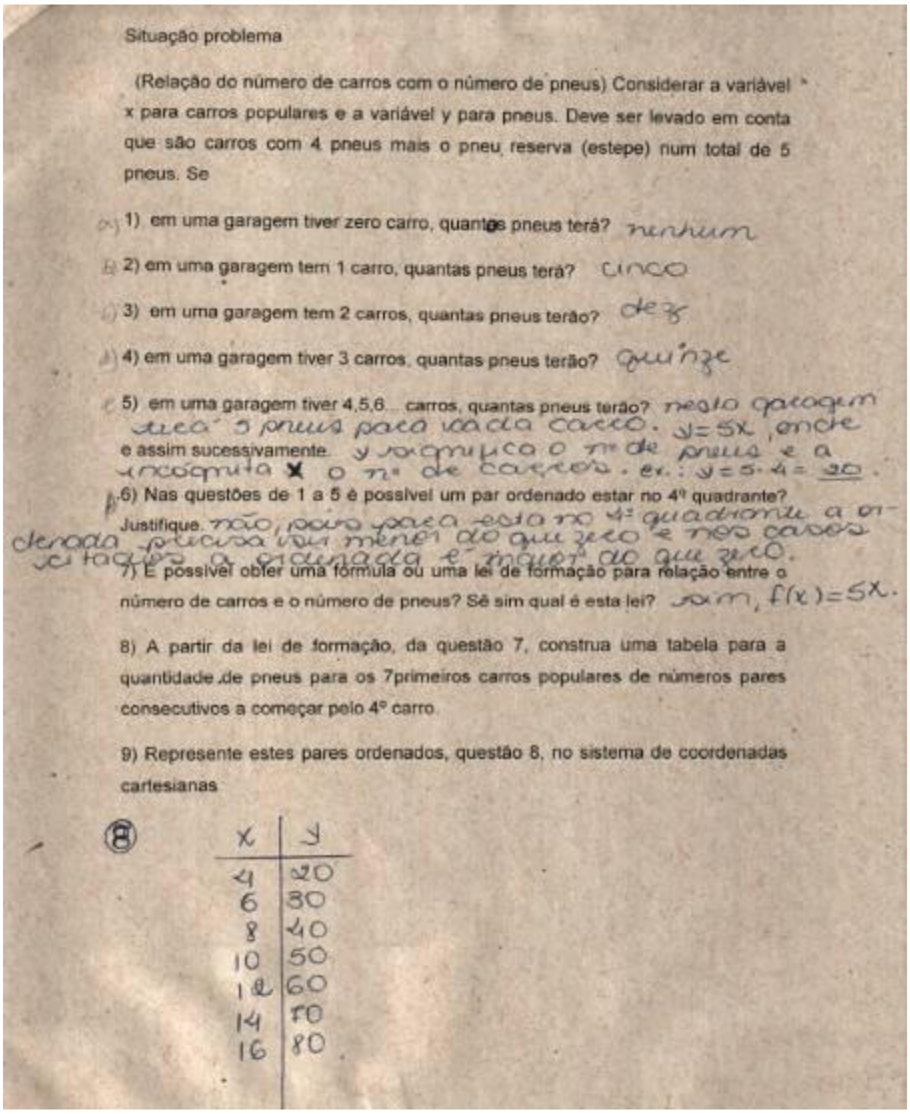
Aluno (C)



Protocolo 64– Atividade Plano Cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

	X	Y
A	5	3
B	-3	3
C	5	-1
D	0	2
E	-3	0
F	3	0
G	0	-2
H	-2	-1

Protocolo 65 – Atividade Plano Cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Situação problema

(Relação do número de carros com o número de pneus) Considerar a variável x para carros populares e a variável y para pneus. Deve ser levado em conta que são carros com 4 pneus mais o pneu reserva (estepe) num total de 5 pneus. Se

1) em uma garagem tiver zero carro, quantos pneus terá? nenhum

2) em uma garagem tem 1 carro, quantas pneus terá? cinco

3) em uma garagem tem 2 carros, quantas pneus terão? dez

4) em uma garagem tiver 3 carros, quantas pneus terão? quinze

5) em uma garagem tiver 4,5,6... carros, quantas pneus terão? nesta garagem fica 5 pneus para cada carro. y=5x, onde e assim sucessivamente. y significa o nº de pneus e a incógnita x o nº de carros. ex.: y=5·4=20.

6) Nas questões de 1 a 5 é possível um par ordenado estar no 4º quadrante? Justifique. não, pois para esta no 4º quadrante a ordenada precisa ser menor do que zero e nos casos citados a ordenada é maior do que zero.

7) É possível obter uma fórmula ou uma lei de formação para relação entre o número de carros e o número de pneus? Sê sim qual é esta lei? sim, f(x)=5x.

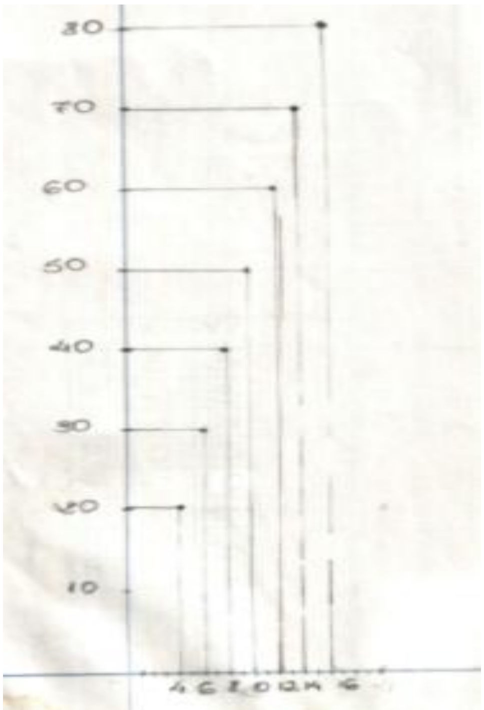
8) A partir da lei de formação, da questão 7, construa uma tabela para a quantidade de pneus para os 7primeiros carros populares de números pares consecutivos a começar pelo 4º carro

9) Represente estes pares ordenados, questão 8, no sistema de coordenadas cartesianas

8

x	y
4	20
6	30
8	40
10	50
12	60
14	70
16	80

Protocolo 66 - Atividade Plano Cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 67 – Atividade Plano Cartesiano - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Conclusão sobre o aluno (C)

Durante a análise das questões, observamos que o aluno transcreveu corretamente os dados de um gráfico para uma tabela e vice-versa (protocolos 64 a 67), o que caracteriza uma conversão de acordo com os Registros de Representação Semiótica. Com base nas conjecturas, analisou e classificou a função f como $f(x) = 5x$ a partir do problema proposto.

5.4.2 Atividade 8 - Função Quadrática

Objetivos

- Construir o conceito de máximo de uma função quadrática com o uso do GeoGebra.
- Investigar, interpretar e escrever a medida da área de um polígono como uma função f.
- Explorar reta tangente no conceito de máximo de uma função.

Recursos didáticos e tecnológicos

- Fotocópia da Atividade.
- Laboratório de informática.
- *Software* GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo “Atividade8_seunome”.

Deixe as Janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Situação Problema

Para cercar uma horta de forma retangular, no quintal de sua casa, uma pessoa dispõe de 8m de tela. Encontre as dimensões da maior horta que ele pode cercar usando 8m de tela.

Processo de Construção

1. Ative a ferramenta Novo Ponto (2° janela), clique sobre a origem do sistema cartesiano, obtenha A=(0,0) e clique sobre o eixo das abscissas para obter o ponto B = (2,0).

2. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4° janela), para obter uma perpendicular por B.

3. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), obtenha o ponto C = (0,4).

4. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obtenha uma perpendicular por C.

5. Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique na interseção das perpendiculares para obter o ponto D.

6. Clique com o botão direito sobre o ponto D, opção “renomear”; renomeie o ponto D para C. Clique com o botão direito sobre o ponto C, renomei para D, obtenha o polígono A,B,C,D.

7. Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre os pontos A,B,C,D e A.

8. Desabilite as retas perpendiculares na Janela Algébrica, para isso, clique sobre a bolinha ao lado a: x = 2 e b: y = 4.

9. Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique sobre a Janela de Visualização para criar o seletor e = 1, clique em aplicar.

10. Clique com o botão direito sobre o seletor, opção propriedade, intervalo min;0 e max ; 4. Clique em aplicar ou fechar.

11. No campo de entrada, digite B = (e,0), tecle enter.

12. Digite no campo de entrada D= (0,e), tecle enter.

13. Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique sobre o polígono ABCD.

14. Na Janela Algébrica desabilite pol 1

15. Digite no campo de entrada a função f dada por $f(x) = 4x - x^2$, tecle enter.

16. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre a curva no intervalo em que a mesma é crescente e obtenha ponto E.

17. No campo de entrada digite E = (e; f(e)), tecle enter.

18. Digite no campo de entrada tangente [E, f], tecle enter.

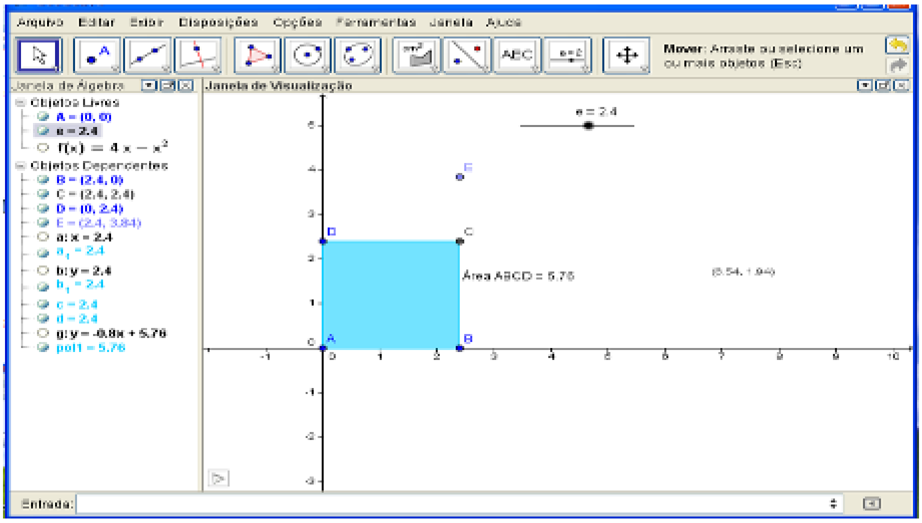


Figura 53– Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

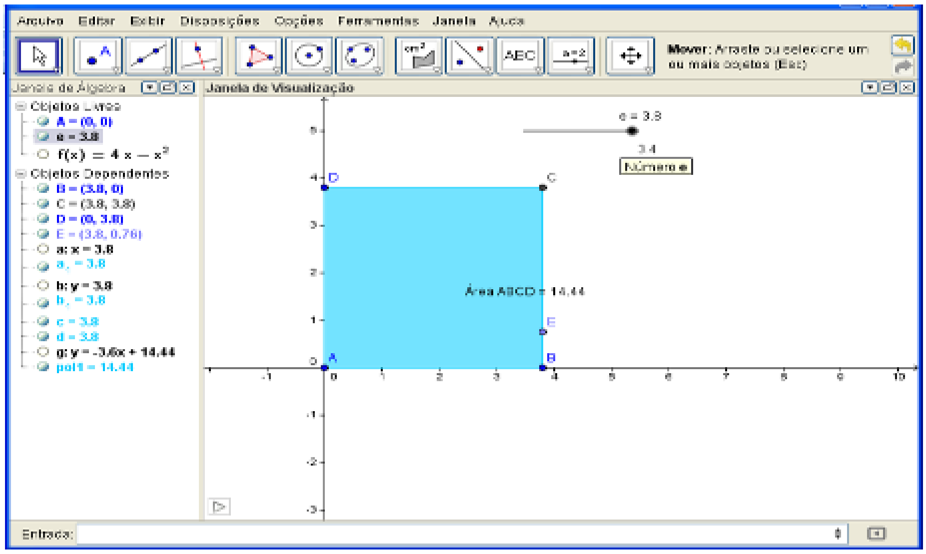


Figura 54 - Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

Análise *a priori*

1. Desabilite na Janela Algébrica a função $f(x) = 4x - x^2$ e a reta tangente g (figura 55). Clique sobre o seletor com o botão direito e ative animação, observe o comportamento da medida da área. Descreva o que você observou, em seguida desabilite a animação.

Esperávamos que o aluno percebesse, nas Janelas de Álgebra e Visualização, que à medida que o seletor desloca a medida da área sofre variação.

Esperávamos também que o aluno percebesse que, quando o seletor atinge o valor mínimo que é zero, não existe medida da área, e, quando o seletor atinge o seu valor máximo que é 4, a medida da área é 16 como mostra as Janelas de Visualização e de Álgebra.

Esperávamos ainda que o aluno reconhecesse por meio da Janela de Visualização que a medida da área do polígono sofre variação quando o seletor é deslocado.

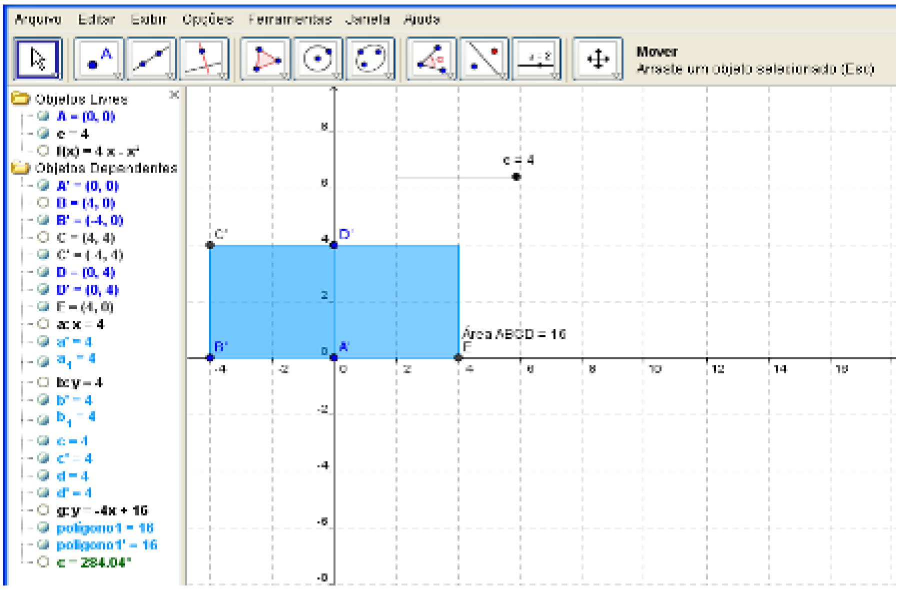


Figura 55 – Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

2) Ative a ferramenta Reflexão em Relação a Uma Reta (8ª janela), clique dentro do polígono e depois, na reta de reflexão, eixo y. O que você observa? Estas figuras são simétricas em relação ao eixo y? (figura 55)

Esperávamos que o aluno observasse e percebesse, na Janela de Visualização, que, após a reflexão, é formado outro polígono $A'B'C'D'$ do lado esquerdo do eixo y do sistema cartesiano conservando as mesmas propriedades do polígono ABCD. E concluísse que essas figuras são simétricas em relação ao eixo y.

3) Na Janela Algébrica, desabilite o pol1 e habilite a função $f(x) = 4x - x^2$ e a reta tangente. Qual a relação existente entre a função $f(x) = 4x - x^2$ e a medida da área do polígono?

Esperávamos que o aluno reconhecesse por meio da Janela de Visualização do GeoGebra que o gráfico da função $f(x) = 4x - x^2$ descreve a medida da área do polígono ABCD no intervalo de [0,4] (figura 55).

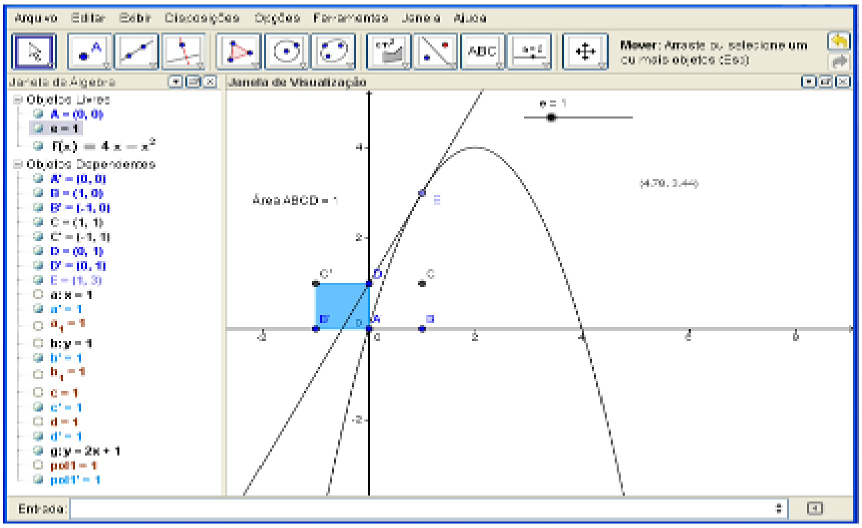


Figura 56 – Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

4) Quando o ponto E assume o valor (2,4) qual é a medida da área do polígono? (figura 57)

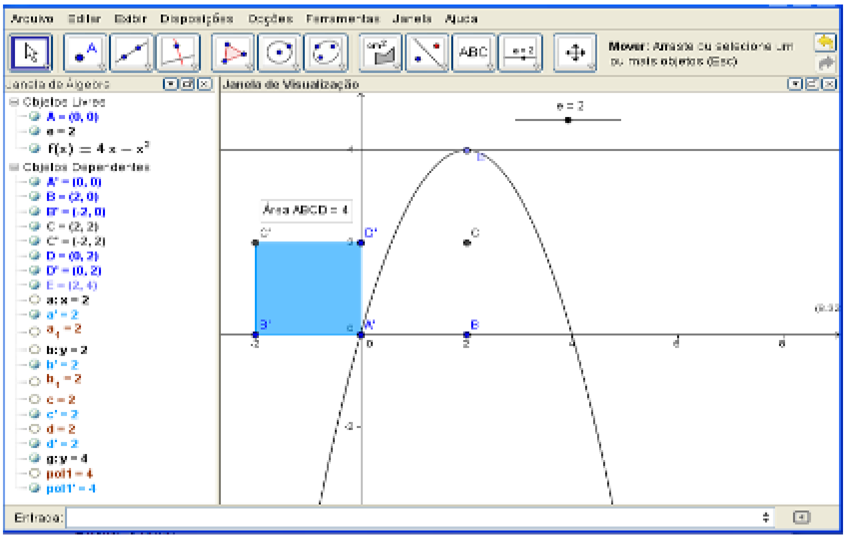


Figura 57– Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

Esperávamos que o aluno investigasse e reconhecesse, por meio da Janela de Visualização do GeoGebra, que ao movimentar o seletor E, tendo o ponto E assumido as coordenadas (2,4), a medida da área do polígono medisse $4m^2$.

Poderíamos esperar, também, que o aluno movimentasse o seletor E, e ao observar somente a atualização do ponto $E = (2,4)$ na Janela Algébrica, conseguisse verificar na Janela de Visualização o valor da medida da área, no caso, igual a 4, sem se referir à unidade de medida.

5) Ative a ferramenta Ângulo (8ª janela), clique sobre o eixo x e sobre a reta tangente no sentido horário de maneira a criar um ângulo α. Clique sobre o seletor e arraste-o lentamente

observando os valores que o ângulo assume. Quando o ângulo é igual a zero qual é a posição da reta tangente em relação à parábola? (figura 58)

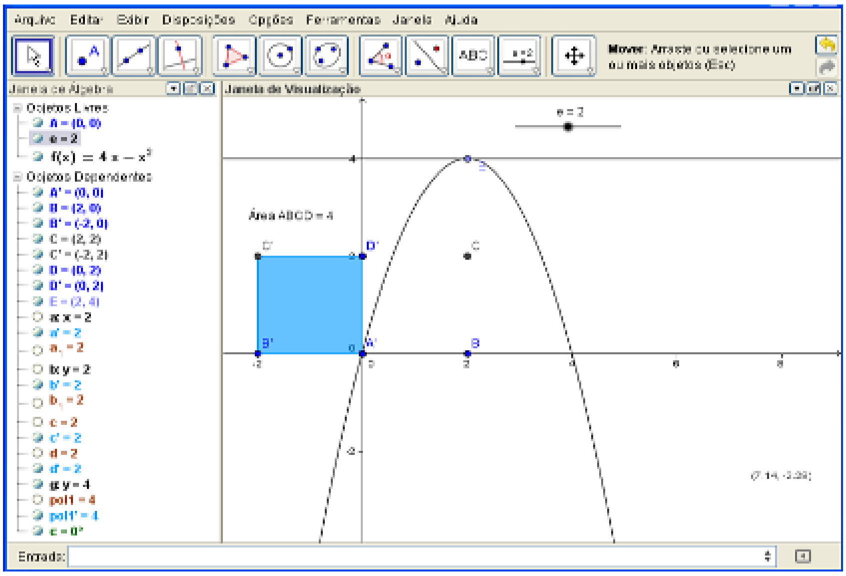


Figura 58– Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

Esperávamos que o aluno investigasse e reconhecesse, na Janela de Visualização, que ao movimentar o seletor E, quando o ângulo assumisse o valor zero grau na Janela Algébrica, a reta tangente tangenciasse a curva no ponto E e, consequentemente, ficasse paralela ao eixo das abscissas.

6) Qual é o significado da posição da reta tangente, conforme a resposta da questão anterior, e a parábola no ponto E?

Esperávamos que o aluno ao investigar a reta tangente no ponto (2,4) reconhecesse por meio da Janela de Visualização, que quando a reta for tangente à curva no ponto E, a mesma determina o valor de máximo da função $f(x) = 4x - x^2$.

7) O que determina a abscissa do vértice da função e o lado do polígono? (figura 59)

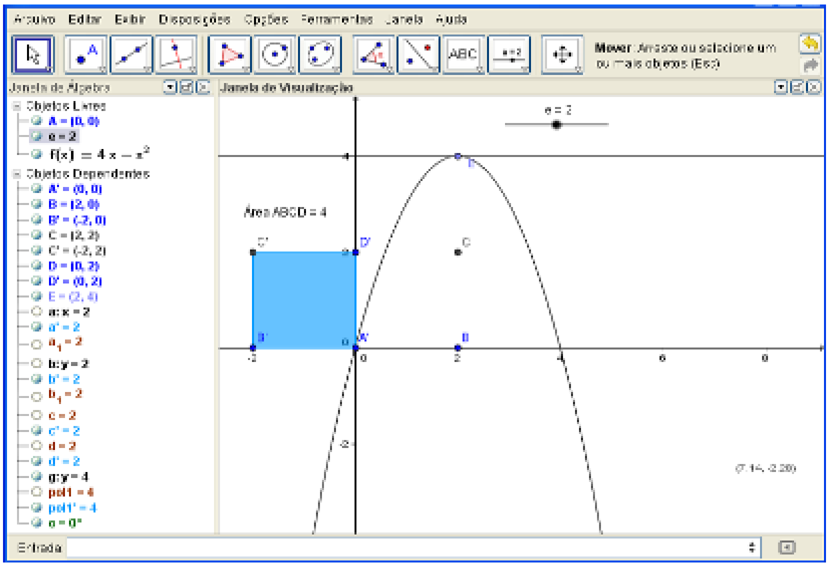


Figura 59 – Atividade 8 Função Quadrática
Fonte: O Autor (2012)

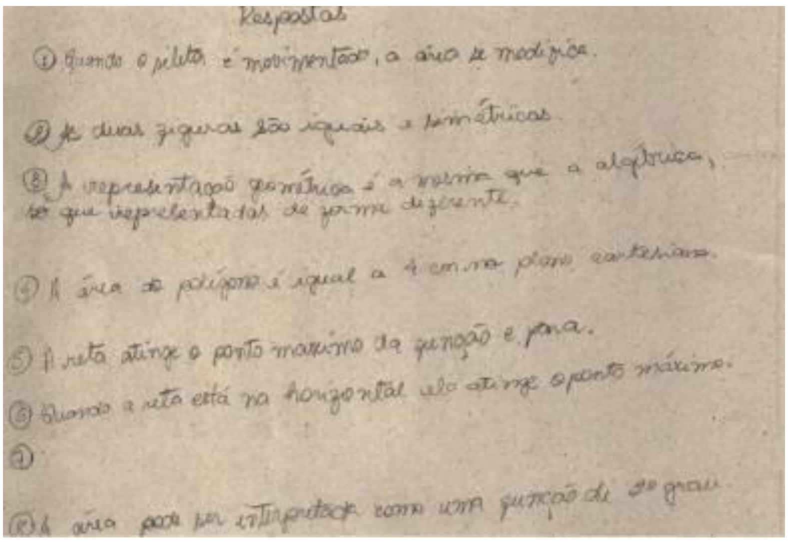
Esperávamos que o aluno reconhecesse por meio da Janela de Visualização que a abscissa do vértice representa o lado do polígono de maior medida da área.

8) A medida da área do polígono A`B`C`D` pode ser interpretada como uma função? E se possível indicar o tipo de função?

Esperávamos que o aluno reconhecesse por meio da Janela de Visualização que a medida da área do polígono pode ser interpretada como uma função quadrática com concavidade voltada para baixo.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

Aluno (A)


Respostas

① Quando o seletor é movimentado, a área se modifica.

② As duas figuras são iguais e simétricas.

③ A representação geométrica é a mesma que a algébrica, só que representadas de forma diferente.

④ A área do polígono é igual a 4 cm no plano cartesiano.

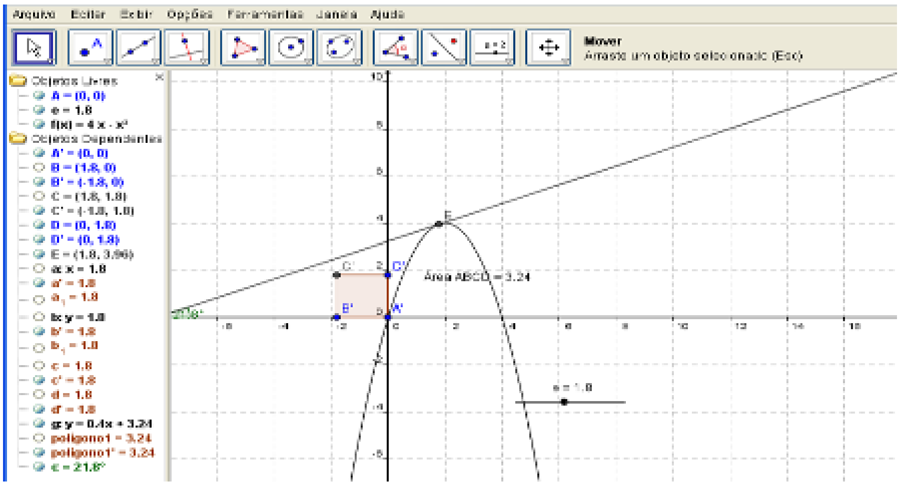
⑤ A reta atinge o ponto máximo da função e para.

⑥ Quando a reta está na horizontal ela atinge o ponto máximo.

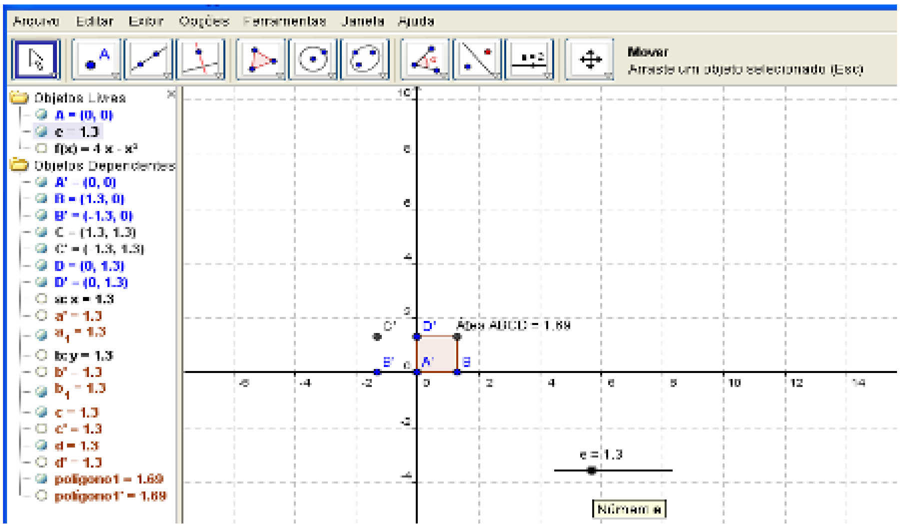
⑦

⑧ A área pode ser interpretada como uma função do 2º grau

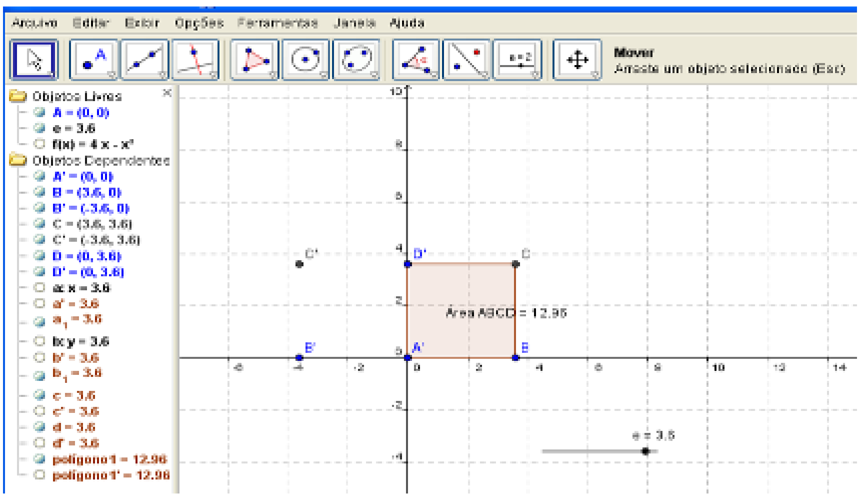
Protocolo 68 - Atividade Função Quadrática – aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



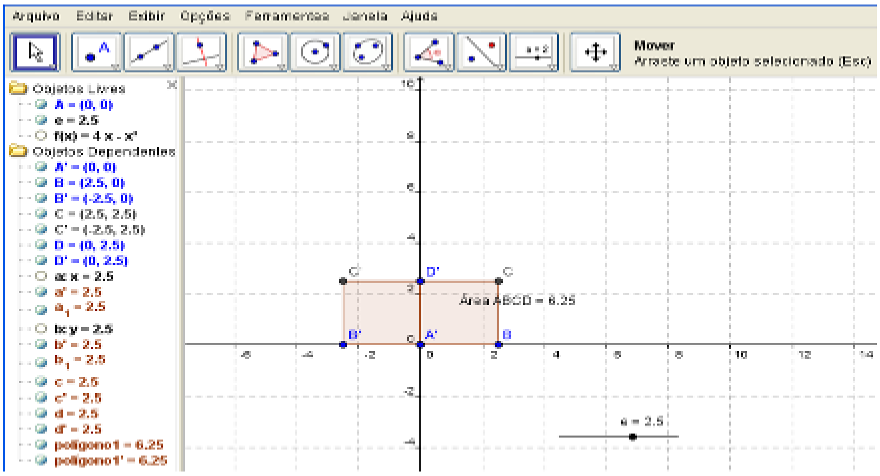
Protocolo 69 – Atividade Função Quadrática - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



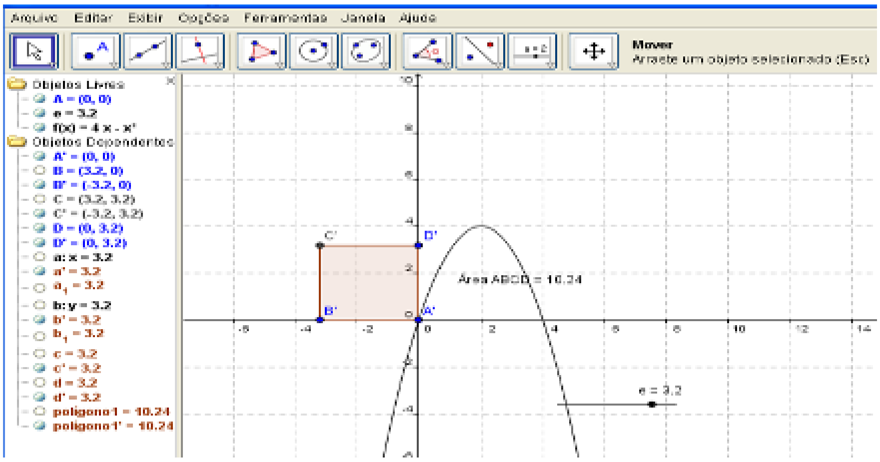
Protocolo 70 – Atividade Função Quadrática - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



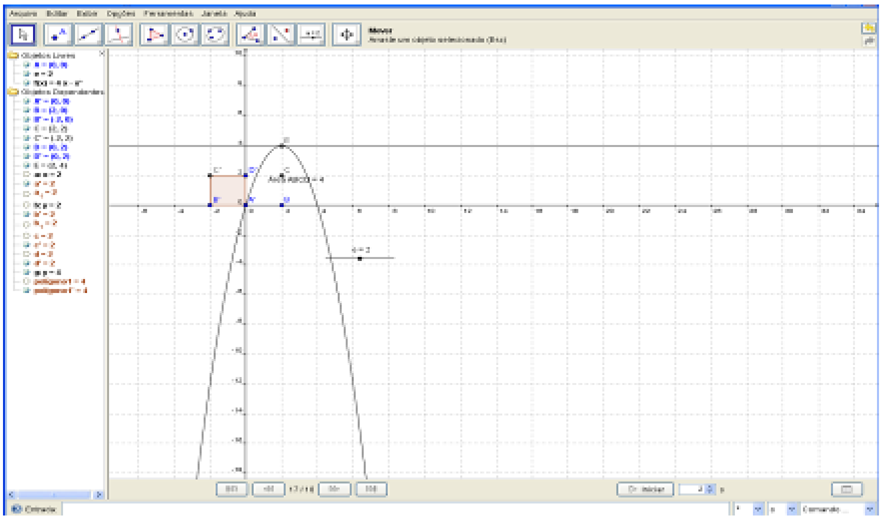
Protocolo 71- Atividade Função Quadrática- aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 72 - Atividade Função Quadrática - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 73- Atividade Função Quadrática - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

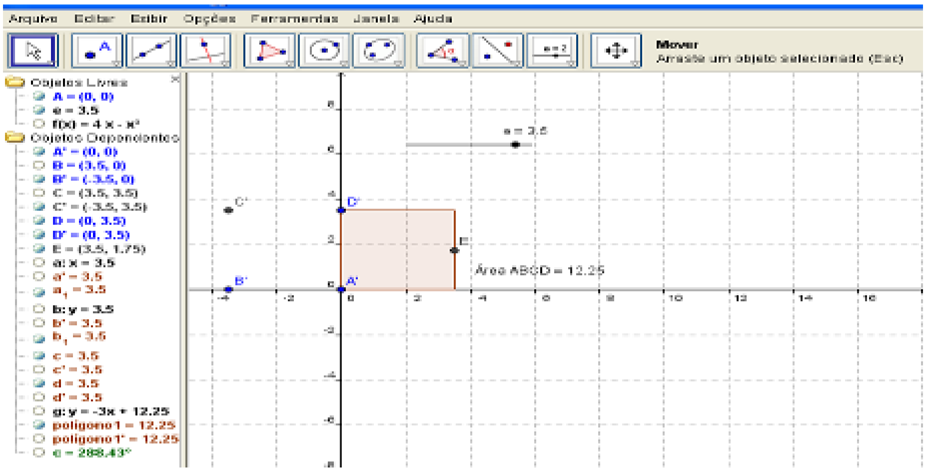


Protocolo 74- Atividade Função Quadrática - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

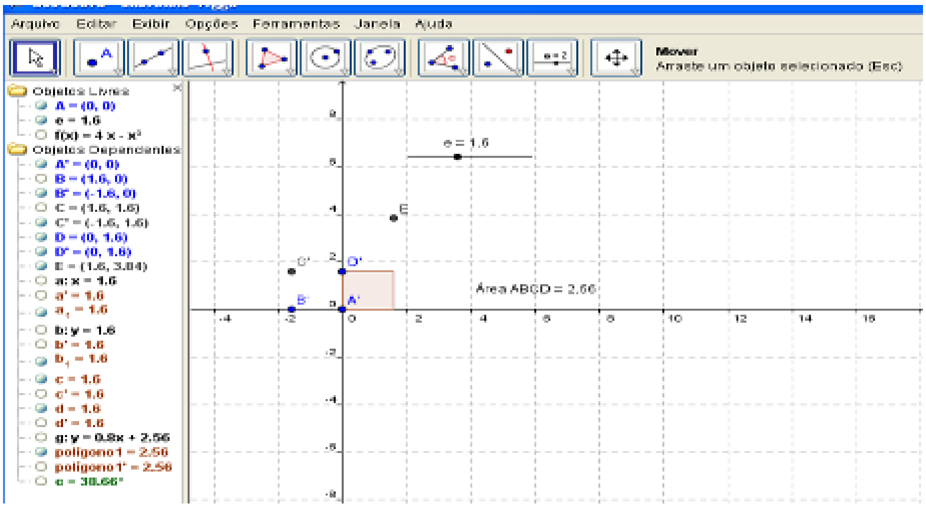
Conclusão sobre o aluno (A)

Durante a análise da atividade, percebemos que o aluno não conseguiu resolver o item 7 das questões propostas, não reconhecendo que a abscissa do vértice representava a medida do lado máximo do retângulo ABCD. Para os demais itens propostos, o aluno obteve êxito, conforme podemos verificar nas investigações com o uso do *software*. O aluno conseguiu reconhecer o mesmo objeto, a função do segundo grau, por meio de duas representações diferentes, e realizou uma conversão de uma representação figural para a gráfica (protocolos 68 a 74).

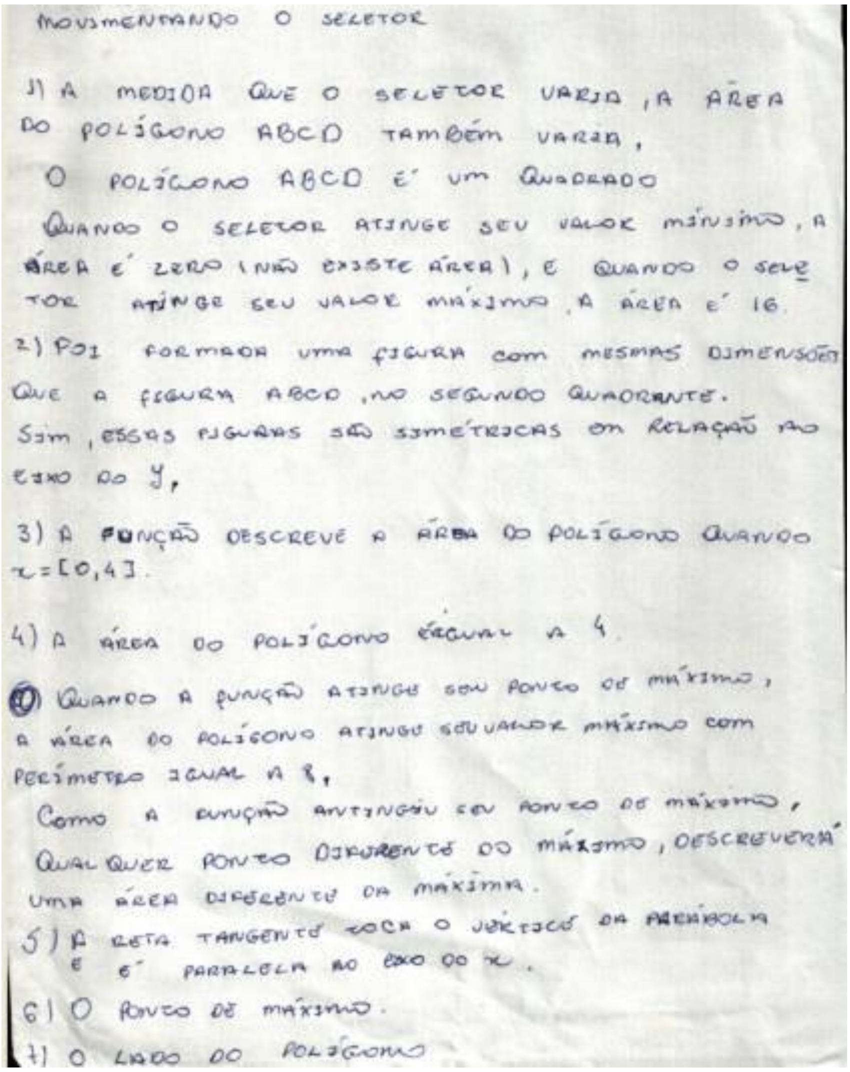
Aluno (B)



Protocolo 75 - Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 76 - Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



MOVIMENTANDO O SELETOR

1) A MEDIDA QUE O SELETOR VARIA, A ÁREA DO POLÍGONO ABCD TAMBÉM VARIA.

O POLÍGONO ABCD É UM QUADRADO

QUANDO O SELETOR ATINGE SEU VALOR MÍNIMO, A ÁREA É ZERO (NÃO EXISTE ÁREA), E QUANDO O SELETOR ATINGE SEU VALOR MÁXIMO A ÁREA É 16.

2) FOI FORMADA UMA FIGURA COM MESMAS DIMENSÕES QUE A FIGURA ABCD, NO SEGUNDO QUADRANTE.

SIM, ESSAS FIGURAS SÃO SIMÉTRICAS EM RELAÇÃO AO EIXO DO Y.

3) A FUNÇÃO DESCREVE A ÁREA DO POLÍGONO QUANDO x=[0,4].

4) A ÁREA DO POLÍGONO É IGUAL A 4

QUANDO A FUNÇÃO ATINGE SEU PONTO DE MÁXIMO, A ÁREA DO POLÍGONO ATINGE SEU VALOR MÁXIMO COM PERÍMETRO IGUAL A 8.

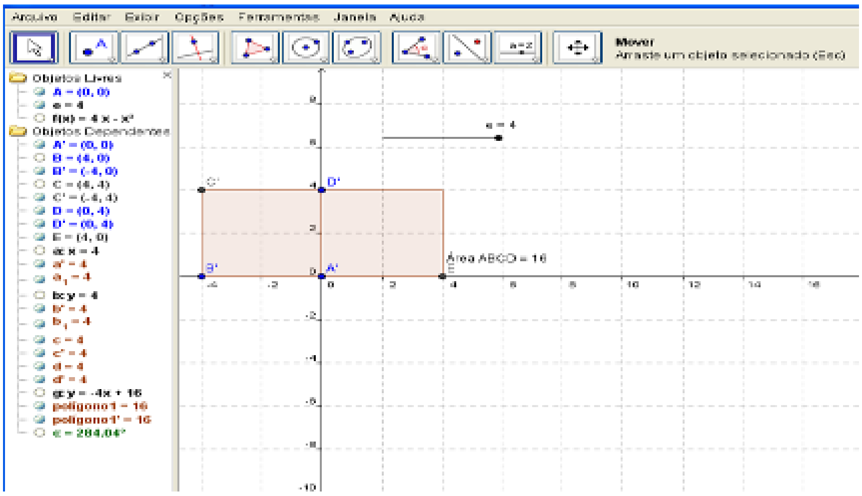
COMO A FUNÇÃO ANTINGIU SEU PONTO DE MÁXIMO, QUALQUER PONTO DIFERENTE DO MÁXIMO, DESCREVERÁ UMA ÁREA DIFERENTE DA MÁXIMA.

5) A RETA TANGENTE TOCA O VÉRTICE DA PARÁBOLA E É PARALELA AO EIXO DO x.

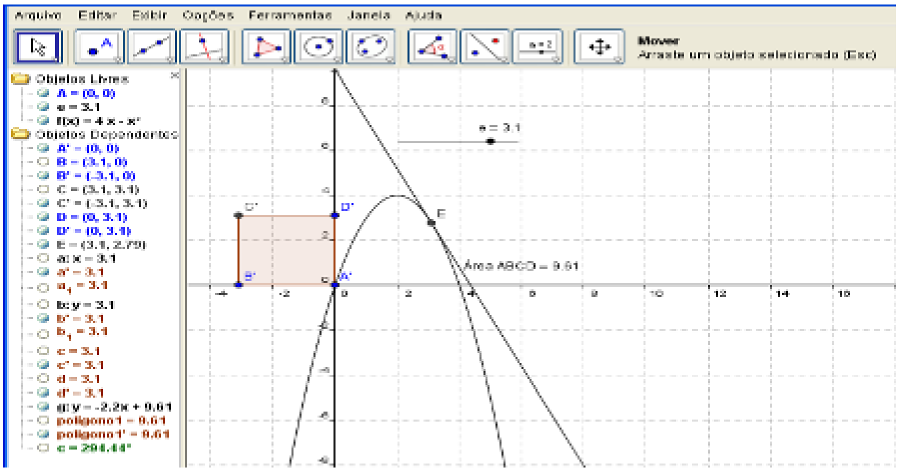
6) O PONTO DE MÁXIMO.

7) O LADO DO POLÍGONO

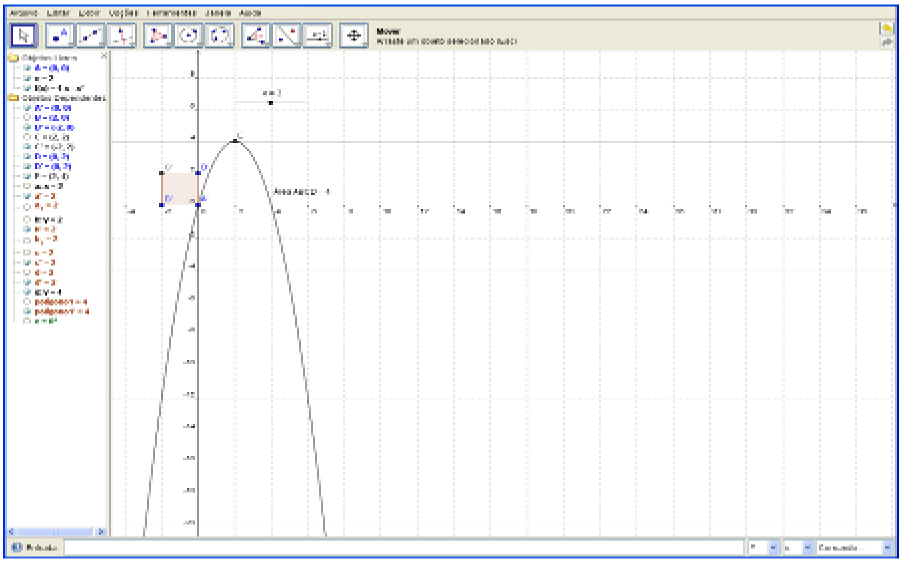
Protocolo 77– Atividade Função Quadrática – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



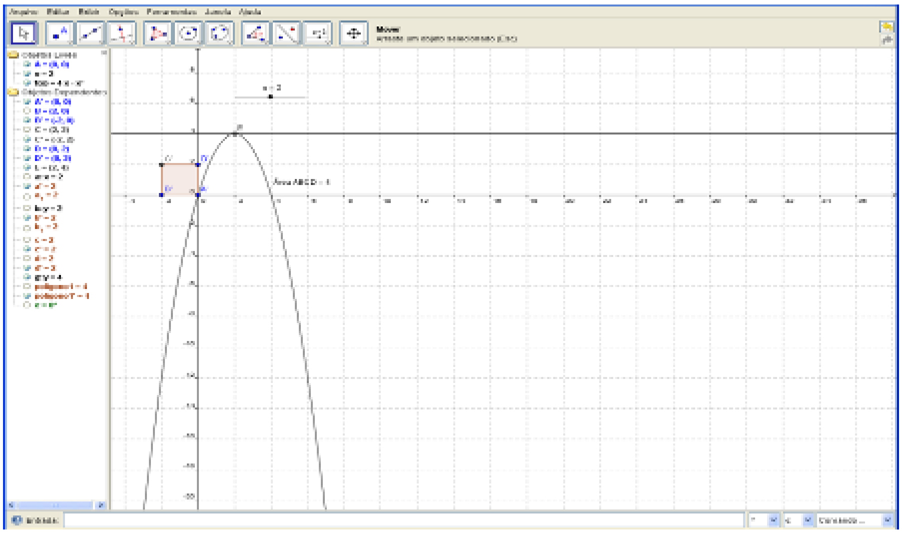
Protocolo 78 - Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 79- Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 80- Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 81- Atividade Função Quadrática - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

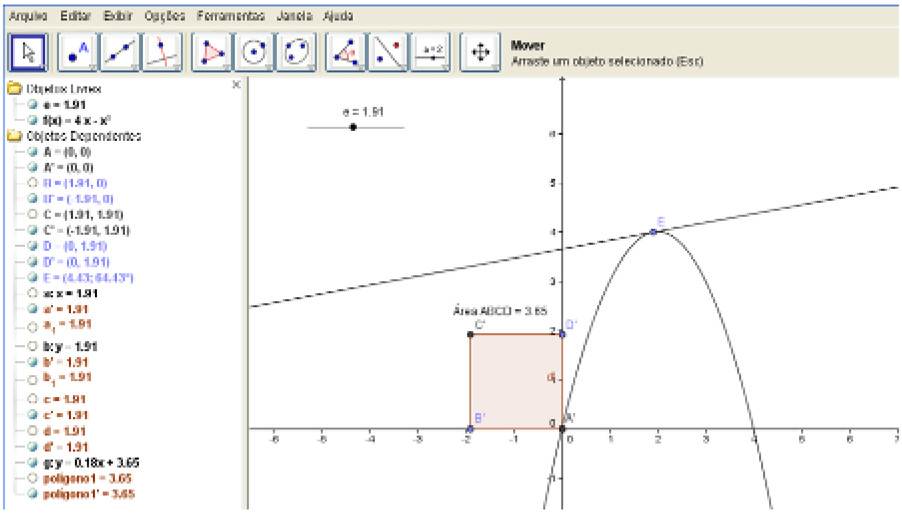
Conclusão do aluno (B)

Durante a análise das questões, percebemos que o aluno investigou, analisou e interpretou-as corretamente, associando a medida da área do polígono com a parte gráfica da função no intervalo [0,2], isto é conseguiu interpretar a conversão realizada pelo *software*. Percebemos ainda, que o aluno associou a reta tangente ao ponto de máximo da função quadrática, observando seu ângulo de inclinação, no caso nulo, caracterizando que a mesma é paralela ao eixo das abscissas e que esta, em relação à função, representa a medida da área máxima. Também ficou claro que a Janela de Visualização proporciona ao aluno uma melhor compreensão e entendimento (protocolos 75 a 81).

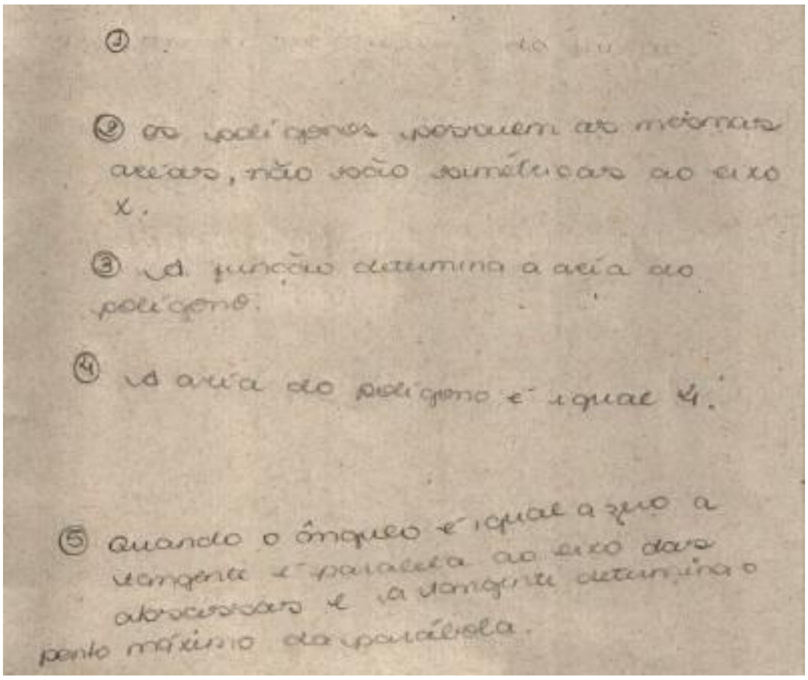
No final da atividade, perguntamos ao aluno : “Qual foi à contribuição do *software* para a realização da atividade?”

Resposta do aluno: “*Fica mais facil de “ver” o que está acontencendo, à medida que o seletor é movimentado. Assim posso associar a Janela Algébrica com a Janela de Visualização na interpretação da função. Se fosse usar lápis e papel, a atividade demoraria muito, pois teria que traçar vários gráficos. Já com o software, os mesmos gráficos podem ser feitos de maneira mais rápida e ajuda a entender o que está sendo feito.*”

Aluno (C)



Protocolo 82- Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



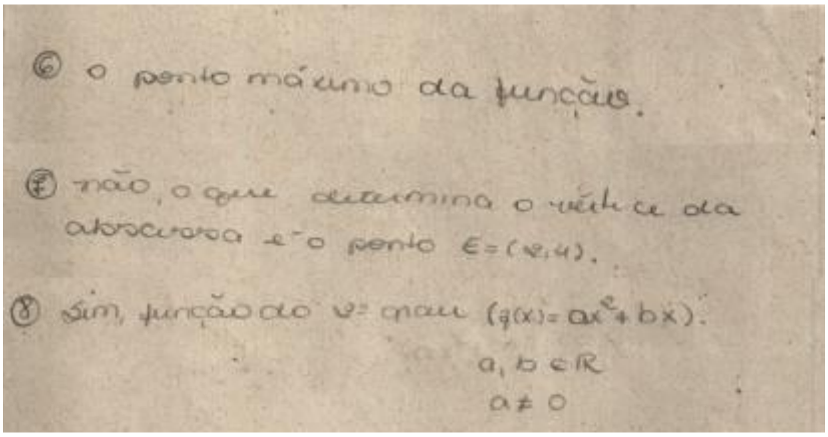
② os polígonos possuem as mesmas áreas, não são simétricas ao eixo x.

③ a função determina a área do polígono.

④ a área do polígono é igual 4.

⑤ Quando o ângulo é igual a zero a tangente é paralela ao eixo das abscissas e a tangente determina o ponto máximo da parábola.

Protocolo 83 - Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

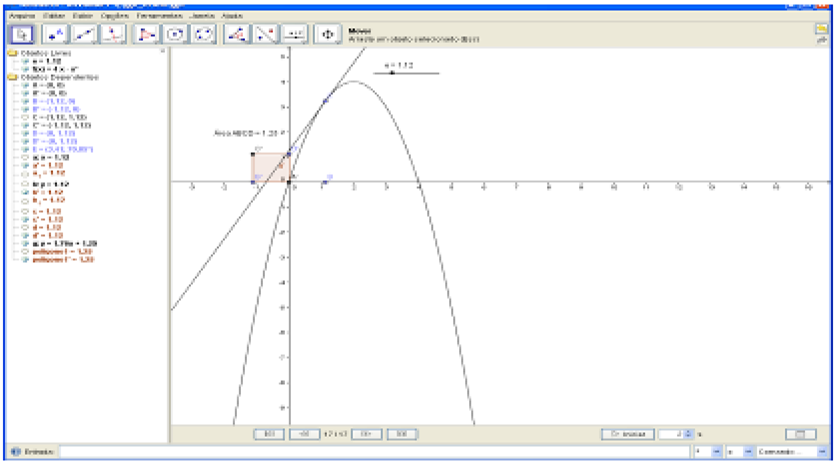


⑥ o ponto máximo da função.

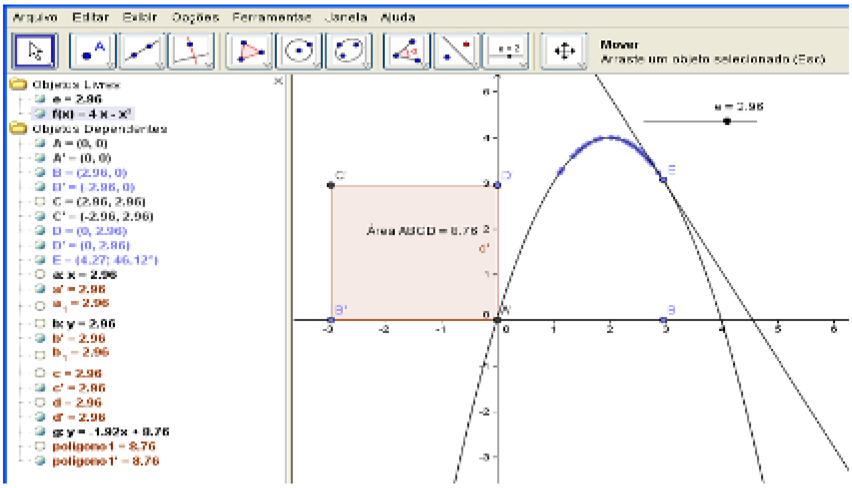
⑦ não, o que determina o vértice da abscissa é o ponto $E=(2,4)$.

⑧ sim, função do 2º grau $(g(x)=ax^2+bx)$.
$a, b \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$

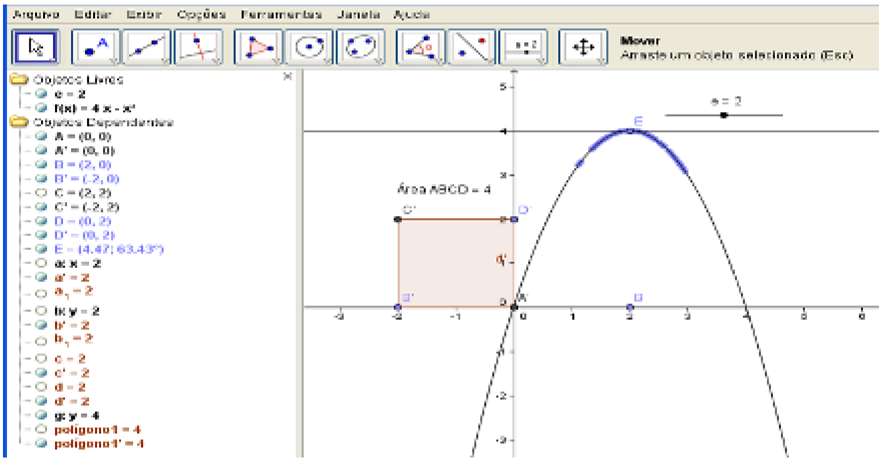
Protocolo 84 - Atividade Função Quadrática – aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



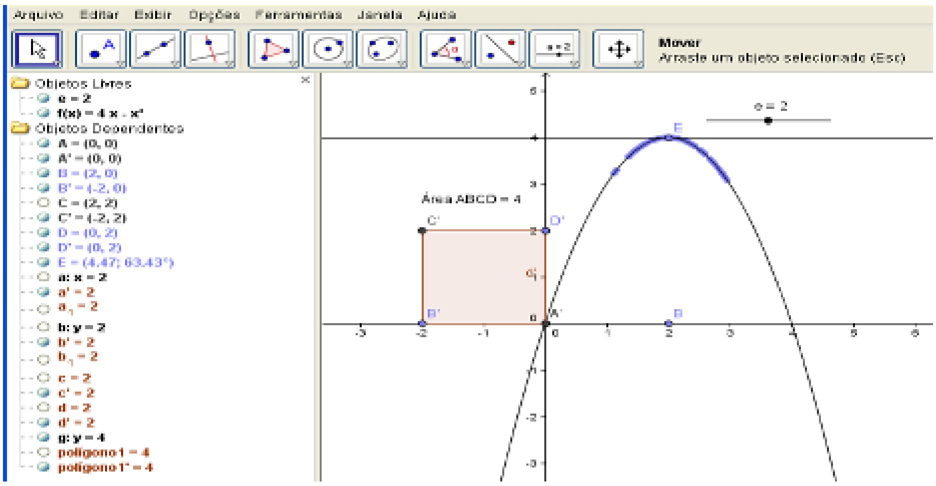
Protocolo 85- Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 86 - Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 87- Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 88 - Atividade Função Quadrática - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Conclusão sobre o aluno (C)

Durante a análise das questões da atividade proposta, verificamos que o aluno não respondeu a questão 1. Na questão 2 ele percebeu que os polígonos ABCD e A`B`C`D` possuem a mesma medida da área, porém não identificou o eixo de simetria. Também não conseguiu responder à questão 7. Entretanto, reconheceu corretamente a relação da reta tangente com o ponto de máximo da função, ainda reconheceu a medida da área de um retângulo que poderia ser descrita como uma função quadrática deixando-a bem definida. Observamos que o aluno fez todas as investigações e conseguiu resolver uma boa parte das questões. Levantamos a hipótese de que o aluno poderia apresentar dificuldade em interpretar as questões (protocolos 82 a 88). Perguntamos ao aluno quais as dificuldades que o mesmo encontrou para resolver a atividade. E obtivemos a seguinte resposta:

"*Tive dificuldades na interpretação das questões, não consegui relacionar com precisão os dados das construções gráficas proporcionadas pelo software.*"

O que veio confirmar nossa hipótese. Talvez isso explique o porquê de algumas questões serem respondidas sem tecer nenhuma conjectura.

5.5. 5º Encontro: descrição e análise da atividade 9

Neste encontro estava previsto o desenvolvimento de um *redesign* da função constante que foi desenvolvida no 2º encontro.

5.5.1 Atividade 9 - Função constante

Objetivos:

- Mostrar por meio do cálculo de medida da área, com auxílio do GeoGebra, uma função constante.
- Conceituar função constante.
- Deduzir uma lei de formação para uma função constante a partir da medida da área de um trapézio, quadrado ou triângulo.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade9_nome".

Deixe as Janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada digitando os dados diretamente.

Recursos didáticos e tecnológicos

Laboratório de informática.

Software GeoGebra

Processo de construção

1) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.

2) Digite no campo de entrada B=(8,0), tecle enter.

3) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4º janela), opção reta perpendicular, clique sobre B e, logo em seguida sobre o eixo x, obtenha uma perpendicular por B.

4) Digite no campo de entrada C=(0,4), tecle enter.

5) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4º janela), opção reta perpendicular, clique sobre C e, logo em seguida, sobre o eixo y, obtenha uma perpendicular por C.

6) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2º janela), obtendo D na interseção das retas perpendiculares.

7) Clique sobre o ponto C com o botão direito do mouse, opção renomear, renomeie C para D.

8) Clique sobre o ponto D com o botão direito do mouse, opção renomear, renomeie para C.

9) Ative a ferramenta Segmento Definido por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre A e B, depois sobre B e C, em seguida sobre C e D e, finalmente, sobre D e A. Formando, assim, o polígono ABCDA.

10) Sobre o segmento $\overline{AB}$, determine um ponto E qualquer.

11) Sobre o segmento $\overline{CD}$, determine um ponto F qualquer.

12) Ative o segmento definido por dois pontos 3ª janela, clique sobre E e F e determine o segmento EF.

13) Ative a ferramenta Polígono (5º janela), opção, clique sobre os pontos A,E,F,D e A.

14) Ativar a ferramenta Controle Deslizante 11ª janela, clique sobre qualquer lugar da Janela de Visualização, obtenha o seletor g.

15) Desative na Janela Algébrica os pontos C e D.

16) Digite no campo de entrada E=(h,0), tecle enter.

17) Digite no campo de entrada F=(8-h,4), tecle enter.

18) Clique com o seletor g com o botão direito do mouse, opção propriedades, em intervalo min:0 e Max=8 , incremento 0,001. Clique em fechar.

19) Ative a ferramenta Medida da área, clique sobre o polígono AEFD.

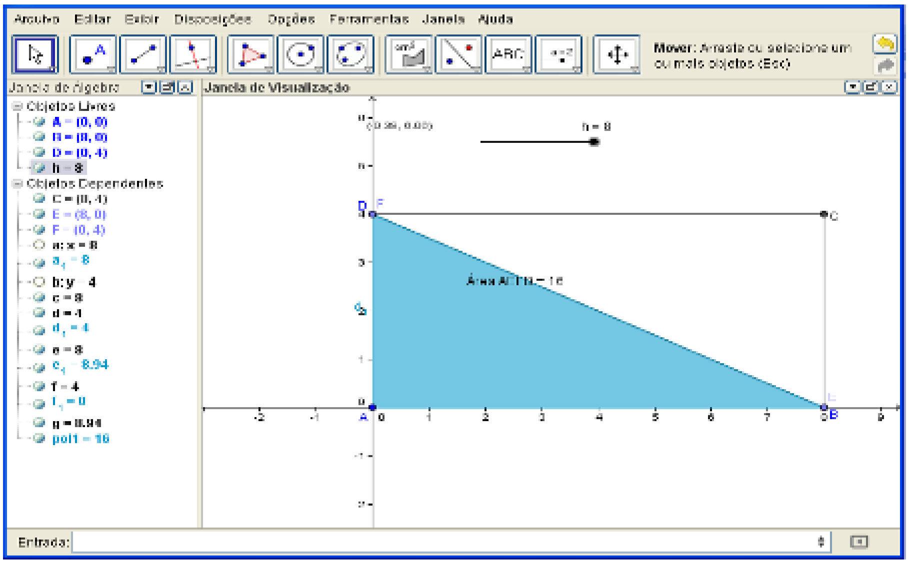


Figura 60- Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

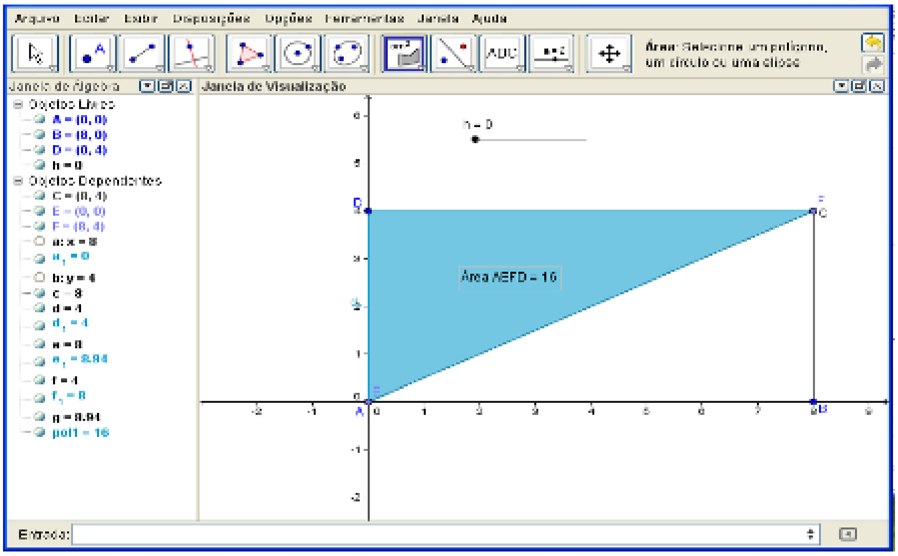


Figura 61- Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

1) Clique sobre o seletor h arraste-o até h = 8 (figura 60). O que determina o segmento $\overline{EF}$ no polígono?

Possíveis respostas:

1ª) Esperávamos que os alunos observassem, visualizassem e reconhecessem, por meio da Janela de Visualização, que quando o seletor h atingisse seu valor máximo 8 e as extremidades E e F do segmento $\overline{EF}$ coincidissem, respectivamente, com os vértices do polígono em B e D, que este representaria a diagonal $\overline{EF}$ do retângulo ABCD.

2ª) Esperávamos que o aluno, por meio da Janela de Visualização, enunciasse simplesmente que o segmento $\overline{EF}$ é a diagonal do polígono ABCD.

3ª) Esperávamos que o aluno reconhece o segmento $\overline{EF}$ como hipotenusa do triângulo ABD.

2) Clique sobre o seletor h, arraste-o até h= 0 (figura 61). O que determina o segmento $\overline{EF}$ no polígono?

Alternativas para resposta:

1ª) Esperávamos que os alunos observassem e reconhecessem, por meio da Janela de Visualização, que quando o seletor h atingir seu valor mínimo, 0, e as extremidades E e F do segmento $\overline{EF}$ coincidirem, respectivamente, com os vértices do polígono em A e C, que este representaria a diagonal $\overline{AC}$ do retângulo ABCD.

2ª) Esperávamos que os alunos reconhecessem que o segmento $\overline{EF}$ representasse a diagonal $\overline{AC}$ do retângulo ABCD.

3ª) Esperávamos que os alunos reconhecessem o segmento $\overline{EF}$ como hipotenusa do triângulo ADC.

3) Clique sobre o seletor h e arraste-o (figuras 60 e 61). Descreva o que acontece com os pontos E e F na Janelas de Visualização e Algébrica.

Esperávamos que os alunos reconhecessem, por meio da Janela de Visualização que à medida que E e F sofressem variação estes seriam imediatamente atualizados na Janela Algébrica.

4) Clique sobre o seletor h e arraste-o até h= 8 e depois até h= 0 e observe a medida da área (figuras 60 e 61). Esta medida da área pode ser interpretada como função no intervalo [0,8]? Se sim, classifique-a.

Esperávamos que os alunos reconhecessem, por meio da Janela de Visualização, que à medida que o seletor h variasse, a medida da área permaneceria a mesma e que no intervalo de [0,8] a mesma poderia ser interpretada como uma função. Neste caso, uma função constante.

5) Determine uma lei de formação para esta função no intervalo de [0,8].

Possíveis respostas:

1ª.) Esperávamos que os alunos ao deslocarem o seletor h pudessem formar diversas figuras planas e lançar mão delas para expressar a medida da área como uma função constante (figuras 62 a 64).

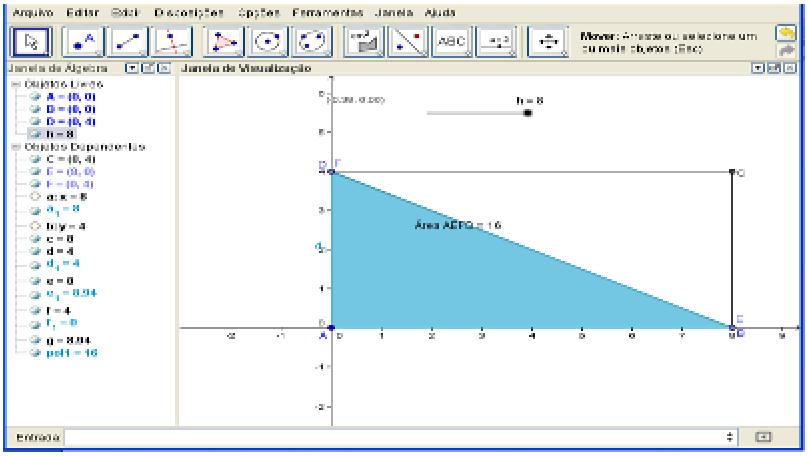


Figura 62- Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

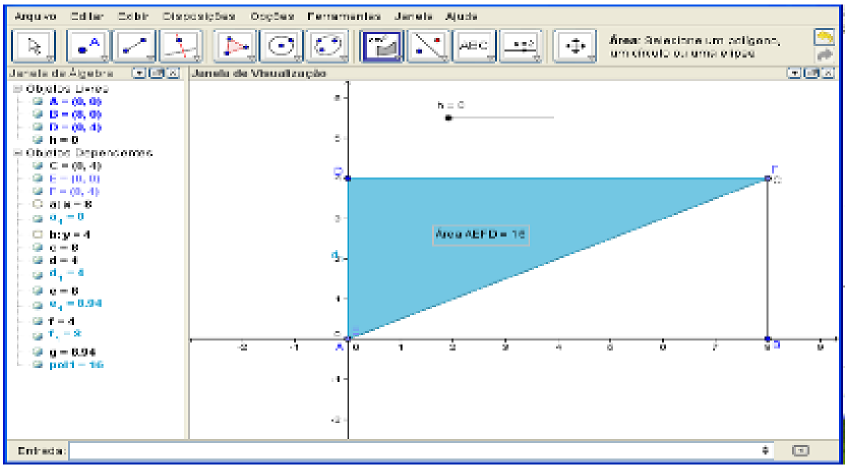


Figura 63 - Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

2ª.) Esperávamos que os alunos reconhecessem que a medida da área do triangulo é dada por $A = \frac{bh}{2}$ (figura 63).

Em que base $b = 8$ e a altura $h = 4$. Logo $A = \frac{8.4}{2} \Rightarrow A = 16$, então $f(x) = 16$

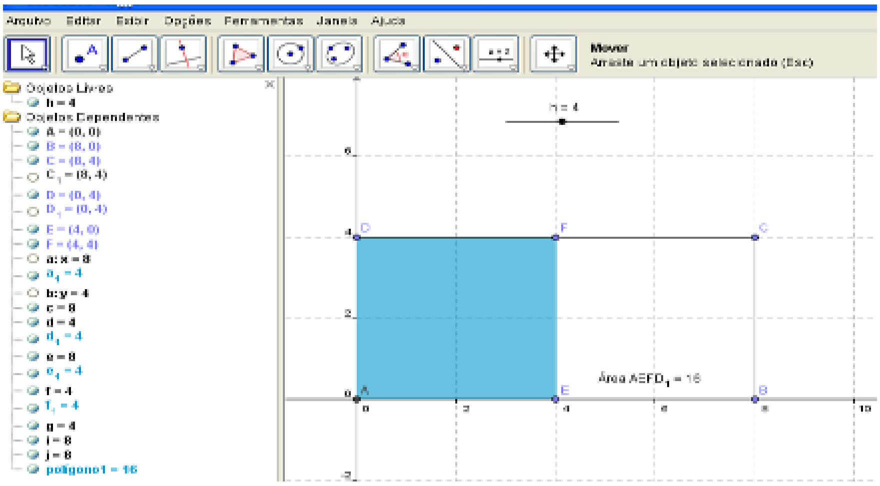


Figura 64 - Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

3ª) Esperávamos que os alunos reconhecessem que poderiam também usar a fórmula do quadrado dada por $A = b.h$ (figura 64).

Em que: a base $b = 4$ e altura $h = 4$

Logo temos que $A = 4.4$ e $A = 16$

Então : $A = f(x) = 16$

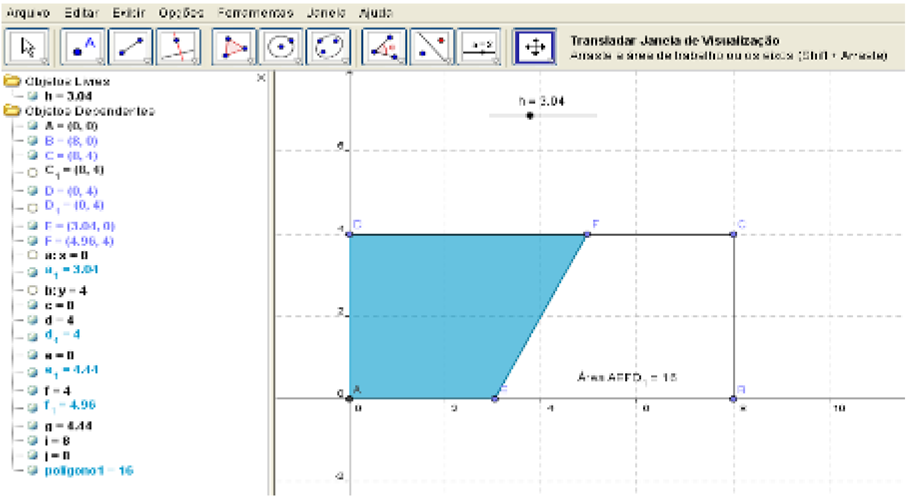


Figura 65- Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

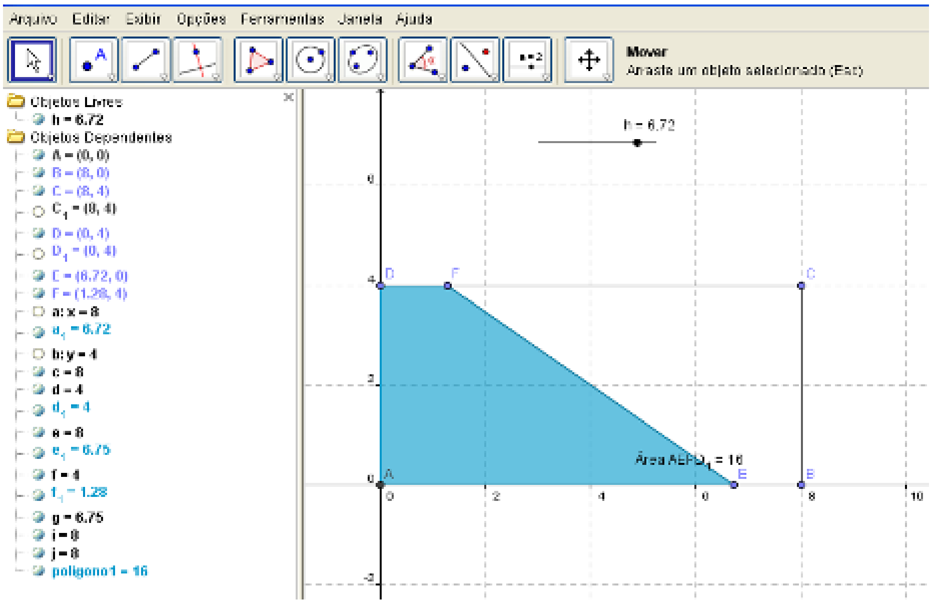


Figura 66- Atividade 9 Função Constante
Fonte: O Autor (2012)

4ª) Esperávamos que os alunos reconhecessem que poderiam usar também a fórmula do trapézio que é dada por $A = \frac{(B+b).h}{2}$ (figura 65 e 66).

Em que: Base menor $b = x$ e Base maior $B = 8 - x$ e Altura $h = 4$

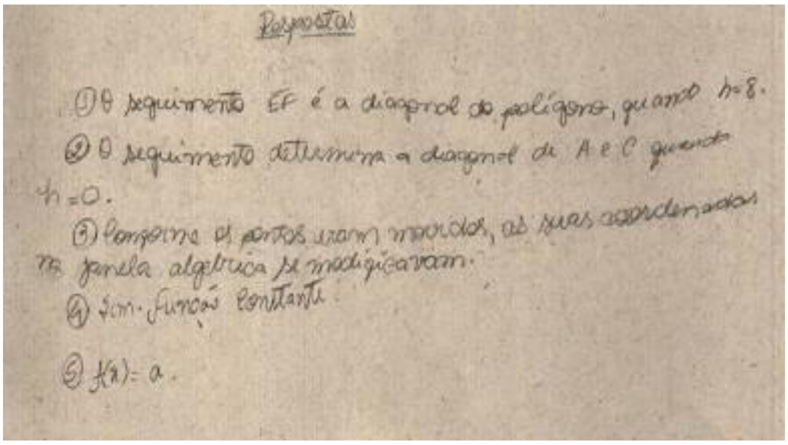
Logo: $A = \frac{[(8-x)+x]4}{2}$ $\qquad A = \frac{8.4}{2}$ $A = 16$

Então como A pode ser igual a $f(x)$ temos que $f(x) = 16$

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 5º. ENCONTRO

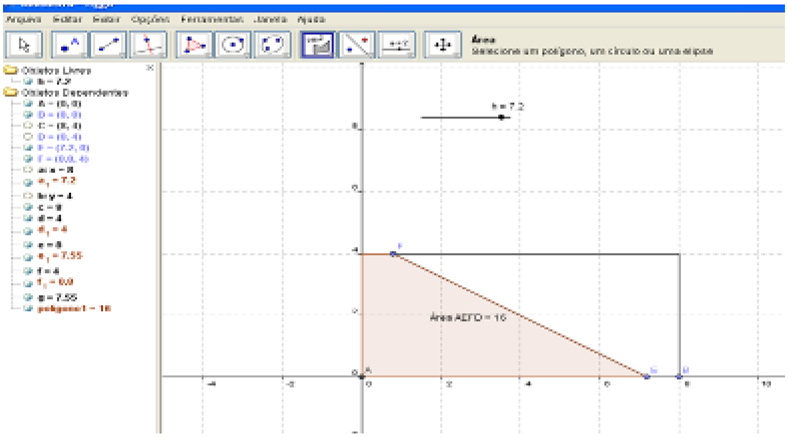
Neste encontro, tínhamos como objetivo fazer o fechamento do curso com a aplicação do *redesign* e a construção de uma função constante. É importante ressaltarmos que nossa pesquisa foi fundamentada no trabalho apresentado por Reis (2011), que apresentou em seus estudos, uma proposta dinâmica para o ensino de Função Afim a partir de erros dos alunos, a qual adaptamos para uma função constante com base nos erros cometidos pelos alunos durante a na realização da atividade 4 no 2º encontro. Nesta atividade, observamos uma rapidez da construção geométrica por parte dos alunos, já na abordagem teórica não demonstraram dificuldades em responder às questões propostas, identificando e fazendo conjecturas sobre a representação geométrica com representação algébrica, definindo, assim, a representação da medida da medida da área como uma função constante. Nesta atividade, também trabalhamos com a conversão e o tratamento dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS
Aluno (A)

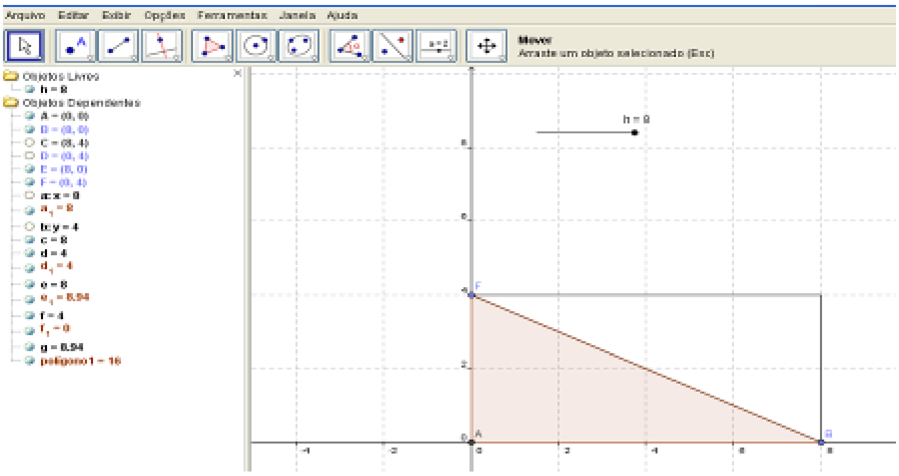

Respostas

① O seguimento EF é a diagonal do polígono, quando h=8.
② O seguimento determina a diagonal de A e C quando h=0.
③ Conforme os pontos eram movidos, as suas coordenadas na janela algébrica se modificavam.
④ Sim. Função constante
⑤ f(x)= a.

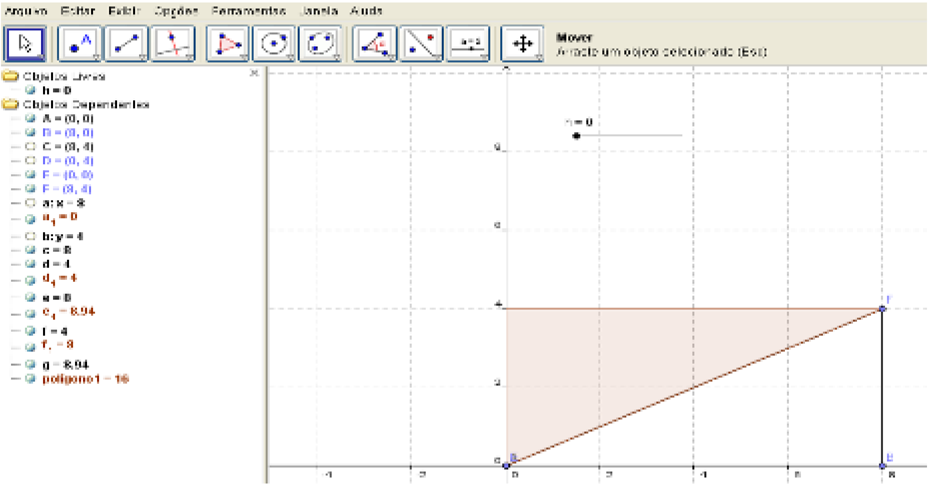
Protocolo 89 - Atividade Função Constante – aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 90 – Atividade Função Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 91 – Atividade Função Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

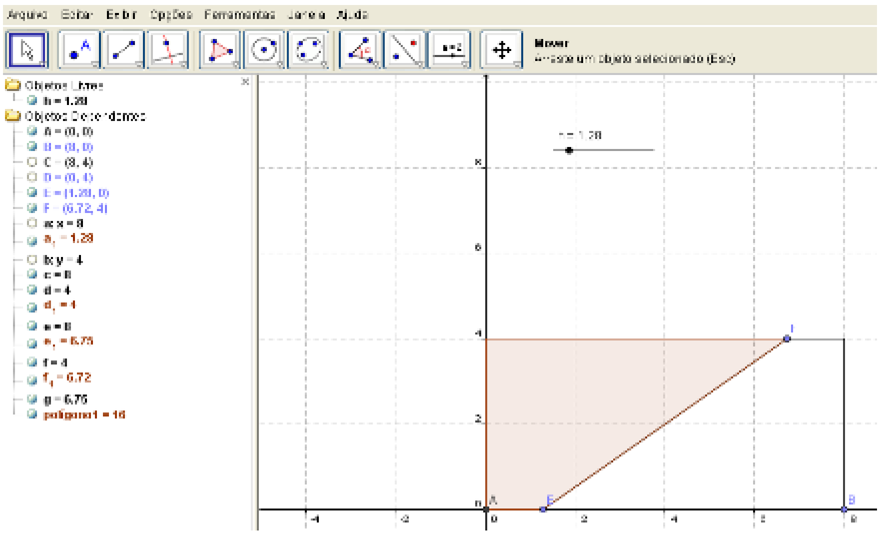


Protocolo 92 – Atividade Função Constante - aluno (A)
Fonte: O Autor (2012)

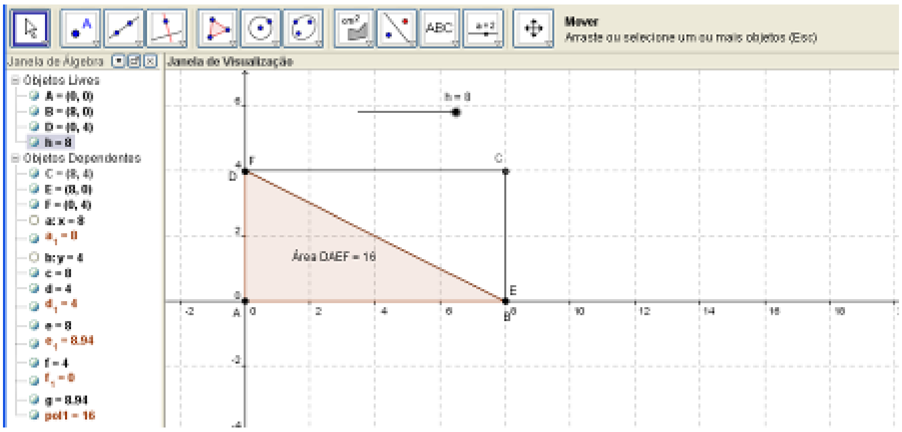
Conclusão sobre o aluno (A)

Durante as análises das questões, observamos que o aluno apresentou um desempenho considerável no desenvolvimento do processo de construção e no manuseio do *software* GeoGebra, investigou e associou bem a relação entre as Janelas de Visualização e Algébrica. Além disso, realizou conversões propiciadas pelo referido *software*. Também conseguiu reconhecer e associar a medida da medida da área do polígono a uma função e a classificou como uma função constante. Entretanto, para a lei formação o aluno não deu um tratamento algébrico, consequentemente, não alcançou o que esperávamos dele em relação a esta resolução (protocolos 89 a 92).

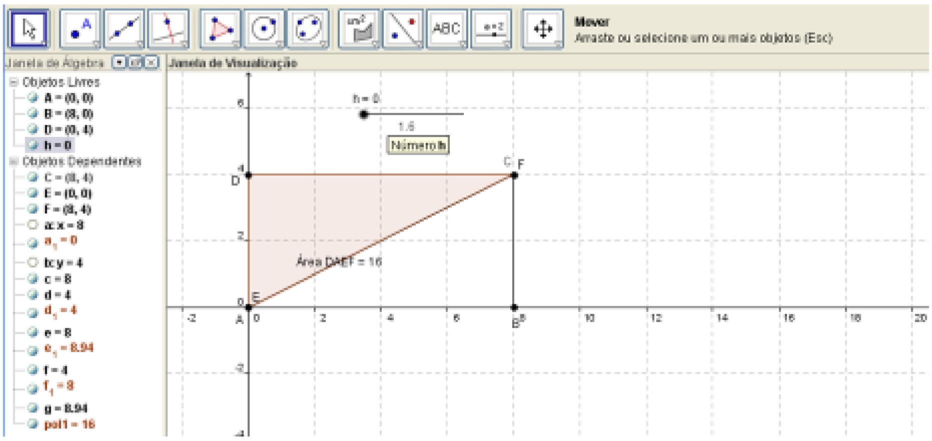
Aluno (B)



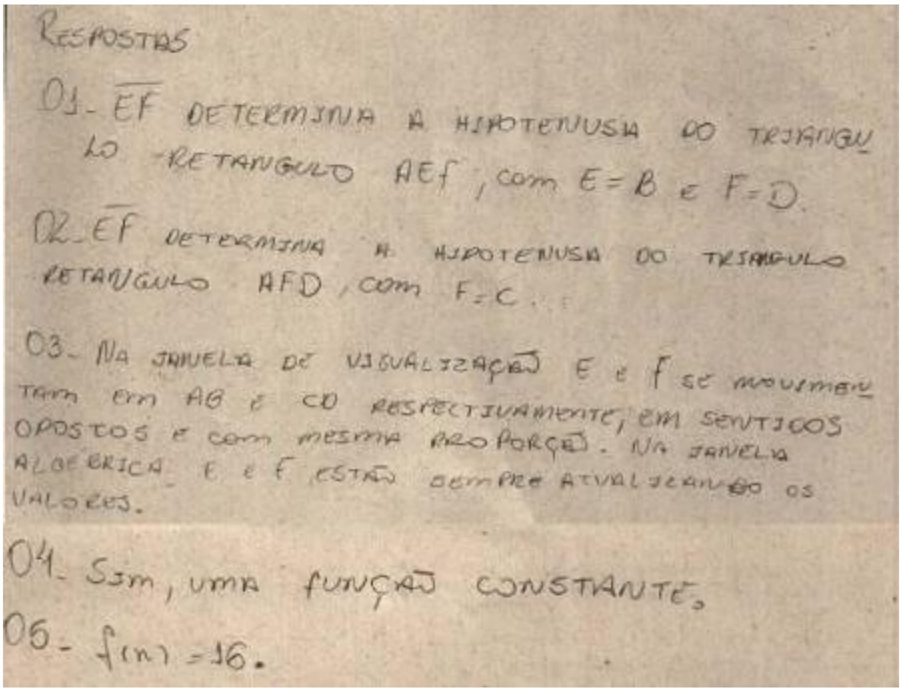
Protocolo 93 – Atividade Função Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 94 – Atividade Função Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)



Protocolo 95 – Atividade Função Constante - aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)


RESPOSTAS

01- EF DETERMINA A HIPOTENUSA DO TRIANGULO RETANGULO AEF, com E=B e F=D.

02- EF DETERMINA A HIPOTENUSA DO TRIANGULO RETANGULO AFD, com F=C.

03- NA JANELA DE VISUALIZAÇÃO E e F SE MOVIMENTAM EM AB e CD RESPECTIVAMENTE, EM SENTIDOS OPOSTOS E com MESMA PROPORÇÃO. NA JANELA ALGEBRICA E e F ESTÃO SEMPRE ATUALIZANDO OS VALORES.

04- SIM, UMA FUNÇÃO CONSTANTE.

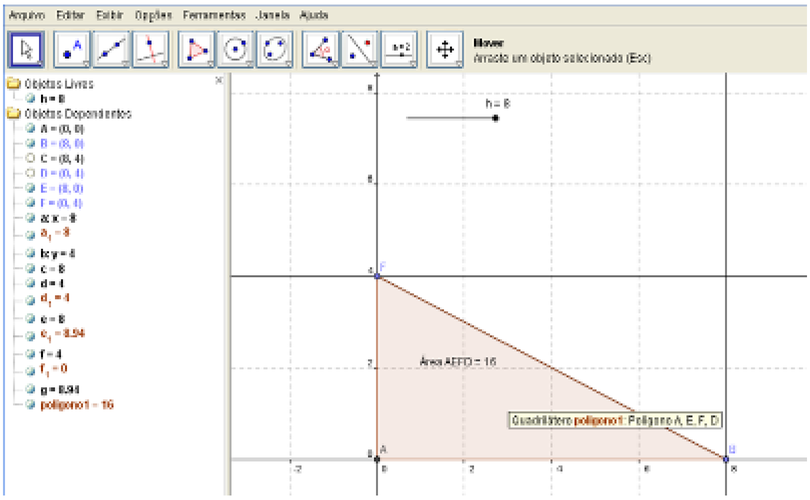
06- f(n) = 16.

Protocolo 96 - Atividade Função Constante – aluno (B)
Fonte: O Autor (2012)

Conclusão sobre o aluno (B)

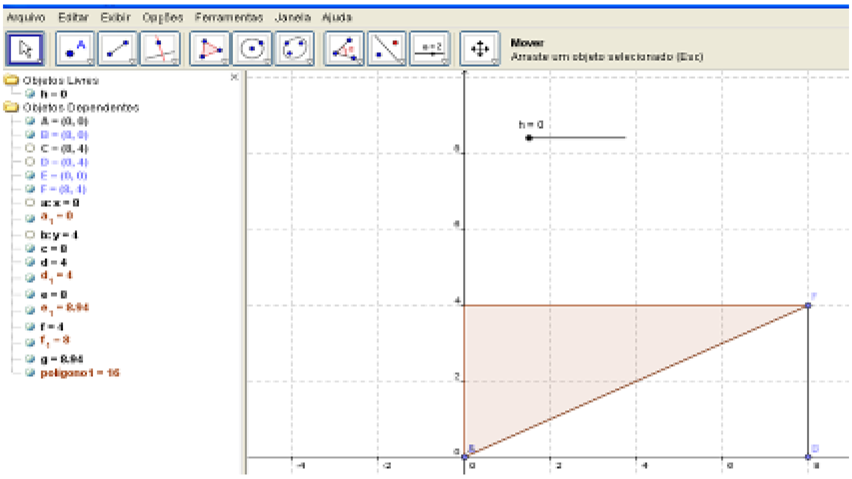
A partir da análise das questões, percebemos que o aluno correspondeu às expectativas na realização da atividade do *redesign*. Conseguiu com o auxílio do *software* GeoGebra, investigar, interpretar e associara a medida da medida da área do polígono como uma função constante, e reconhecer o mesmo objeto por mais de uma representação. Assim, o aluno realizou uma conversão propiciada pelo *software*. Reconheceu a medida da área da função na Janela de Visualização, porém não deu um tratamento algébrico para a lei de formação da função. Deste modo, não atendeu a todas as nossas expectativas (protocolos 93 a 96).

Aluno (C)



Protocolo 97– Atividade Função Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Durante a análise da questão, observamos que o aluno reconheceu, ao movimentar o seletor h na Janela de Visualização, o segmento $\overline{AB}$ representado por $\overline{EF}$ como sendo a hipotenusa do triângulo. Verificamos que o aluno não identificou a qual triângulo o segmento figurava como hipotenusa (protocolo 97).



Protocolo 98 – Atividade Função Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

① O segmento EF determina a diagonal BD do polígono ABCD, quando o seletor h é igual a oito.

② O segmento EF determina a diagonal AC do polígono ABCD, quando o seletor h é igual à zero.

③ O ponto E se movimenta no intervalo fechado de zero a oito [0,8] na janela de visualização. Já na janela algébrica o valor de x, da abscissa se altera e o valor de y não se altera.

O ponto F também se movimenta no intervalo de zero a oito [0,8] na janela de visualização. Já na janela algébrica o valor de x também se altera e o valor de y não se altera.

Protocolo 99 - Atividade Função Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

④ Sim, função constante $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, onde todo elemento do domínio terá a mesma imagem no contradomínio.

⑤ Para calcular a área o polígono AEFD, precisamos pegar a medida da base, do polígono ABCD, multiplicar pela altura, do polígono ABCD, e dividir por dois.

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Protocolo 100 - Atividade Função Constante - aluno (C)
Fonte: O Autor (2012)

Na análise da questão, percebemos que o aluno reconheceu, ao movimentar o seletor h na Janela de Visualização, o segmento $\overline{AB}$ representado por $\overline{EF}$ como sendo a hipotenusa do triângulo. Ainda, observamos que o aluno não se referiu a qual triângulo o segmento figurava como hipotenusa (protocolo 98).

1) Verificamos, durante a análise da questão, que o aluno reconheceu que à medida que o ponto E e o ponto F sofreram variações estes eram atualizados na Janela Algébrica (protocolo 99).

2) Observamos durante a análise da questão que o aluno interpretou a medida da área como uma função e a definiu corretamente como uma função constante (protocolo 100).

3) Percebemos, na análise da quarta questão, que o aluno somente enunciou a função e não teceu nenhuma conjectura. Como havíamos previsto anteriormente (protocolo 100).

Conclusão sobre o aluno (C)

Nesse *redesign* da atividade sobre função constante, observamos durante a análise e realização das questões que o aluno apresentou desenvoltura na construção geométrica e familiaridade com o *software*. Investigou e interpretou, reconheceu a medida da área do polígono como uma função constante. Também realizou as conversões propiciadas pelo *software* e deu tratamento algébrico para a lei de formação da função constante.

Conclusão Final da atividade 9

Esse *redesign* só foi possível por que a metodologia que dá suporte ao nosso trabalho, *Design Resarch*, nos permitiu fazer isso. Procuramos enfocar os pontos nos quais os alunos tiveram mais dúvidas no decorrer da realização da primeira atividade para que pudéssemos, com aplicação da nova atividade, verificar se houve aprendizagem. Para Collins (2004), as mudanças são necessárias por que permitem descrever a forma como o redesenhar vai conseguir atingir os objetivos do projeto original, ou como os objetivos o mudaram. Percebemos com a aplicação da atividade 7, plano cartesiano, e da atividade 9, função constante, um avanço considerável pelos alunos no *redesign* conforme vimos nos protocolos das referidas atividades, assim como nas investigações feitas por eles com o auxílio do GeoGebra nas figuras das atividades 7 e 9. O que nos permitiu atingir os objetivos da proposta metodológica do *Design Research*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa tem como meta contribuir com o processo de aprendizagem de funções afim e quadrática. Para isso, foi elaborada, implementada e analisada uma sequência de atividades com o uso de tecnologias. Estas atividades foram selecionadas a partir do material desenvolvido para a disciplina “Fundamentos da Matemática”, integrante do projeto intitulado “Implementação de Novas Tecnologias na produção de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática nos cursos de graduação da UNIMONTES”. A aplicação das atividades foi realizada presencialmente no laboratório de informática com alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da referida universidade. Os dados coletados, referentes aos três alunos participantes desta pesquisa, foram analisados com base no Registro de Representações Semióticas. A metodologia predominante em nosso trabalho consiste no *Design Research*, segundo a qual foram organizadas as nove atividades sobre função afim e quadrática que consistem no produto final desta nossa pesquisa.

Consideramos dois aspectos fundamentais e relevantes para a elaboração do produto final. Primeiro, procuramos fazer um trabalho que contribuísse com a abordagem didática contemplada nos livros didáticos para o desenvolvimento deste tema . Para isso, apresentamos uma sequência de atividades levando em consideração a interdisciplinaridade entre a geometria plana e a álgebra. Neste sentido, foram desenvolvidas atividades com o auxílio do GeoGebra que permitiram tanto a exploração do cálculo de medida da área de figuras planas, quanto sua interpretação como função. O segundo aspecto se refere ao crescente desenvolvimento dos ambientes computacionais que possibilitam associar o estudo de funções agregadas a um *software* de geometria dinâmica, bem como dar uma roupagem nova e diferenciada ao tratamento tradicional relacionado às suas representações algébricas e gráficas.

No desenvolvimento das atividades relacionadas ao plano cartesiano, às funções afim e quadrática, propomos realizar seu estudo usando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que possibilita trabalhar com duas janelas, simultaneamente uma de álgebra e outra gráfica, o que propicia ver o mesmo objeto de duas maneiras diferentes ao mesmo tempo. Neste sentido, o GeoGebra nos permite realizar a conversão entre as referidas representações, que é uma das transformações dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, teoria que embasa o nosso trabalho de pesquisa.

Segundo Duval (2003), para a resolução de um problema é necessário haver uma sucessiva troca de registros; no que se refere à mudança de registros, este autor conjectura que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, ou seja, para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representação semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são caracterizados por permanecerem no mesmo sistema de escrita, enquanto as conversões mudam de sistema, mas conservam a referência aos mesmos objetos.

No que se refere à metodologia *Design Research*, Collins (2004) considera que seu desenvolvimento permite abordar várias questões centrais para o estudo da aprendizagem, ressaltando a necessidade de abordar as questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem em contexto e de ir além das medidas estreitas de aprendizagem. Uma das características da pesquisa *design* experiments é desenvolver uma forma de efetuar uma investigação formativa para testes e refinar modelos educacionais baseados em princípios teóricos derivados de pesquisa prévia. O *design* pode ser entendido como progressivo refinamento da investigação que consiste em aplicar, em uma primeira versão, um projeto para que seja possível diagnosticar e analisar como ele ocorre e, posteriormente, seja revisto de maneira constante com base nas experiências colhidas até que seus obstáculos sejam trabalhados. No nosso trabalho, será apresentado, nos anexos, o *redesign* das atividades aplicadas.

Para Collins (2004), na metodologia *Design Research* é importante observar pelo menos três tipos de variáveis dependentes - clima, aprendizagem e sistemática. Dentre as variáveis independentes, o autor destaca ambiente, natureza dos educandos, desenvolvimento profissional, objetivos e elementos do desenho. No desenvolvimento do nosso trabalho, ficaram evidenciadas as três variáveis dependentes:

- Clima, relacionada à cooperação, comprometimento, envolvimento dos alunos na aprendizagem na sala de aula, o grau de cooperação que tiveram e de esforço que fizeram para entendimento dos conteúdos. Apesar das atividades terem sido desenvolvidas individualmente, houve interação tanto entre os alunos, como deles com o professor; o que possibilitou observarmos a presença dos indicadores dessa variável durante a implementação das atividades.

- Variável de aprendizagem, que em nossa pesquisa foi observada por meio das habilidades desenvolvidas no decorrer da realização das atividades e atitudes, respostas ou perguntas curtas.

- Variável Sistemática, que pode ser avaliada pelo baixo investimento geralmente realizado nos laboratórios para aquisição de *softwares* e atualização das máquinas para torná-las mais eficientes.

No que se refere às variáveis independentes, podemos ressaltar:

- Ambiente, as atividades foram desenvolvidas no local de trabalho, nos laboratórios da UNIMONTES.

- Natureza dos educandos – observamos que o trabalho foi desenvolvido com 16 alunos, dentre os quais percebemos que existiam alunos com desempenho insatisfatório relacionado ao conteúdo de funções. Entretanto, isso não impediu o desenvolvimento do trabalho com as inovações contempladas nas atividades propostas.

Consideramos que essas variáveis ficaram bem evidenciadas no desenvolvimento das atividades durante o curso. É importante destacarmos, segundo Doerr e Wood (2006), que a metodologia *Design Research* requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis. O que quer dizer que a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação dos dados em todos os níveis devem gerar e aprimorar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais úteis a professores, pesquisadores e outros profissionais.

Em consonância com o referencial teórico e metodológico de nossa pesquisa, as atividades propostas para os alunos do 1º período do curso de Licenciatura em Matemática contemplavam um processo de construção e uma abordagem teórica. Nossa intenção era que os alunos interpretassem os resultados obtidos na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra durante o processo de construção e que dessem significados a essas informações na abordagem teórica durante a resolução das questões propostas.

Constatamos que os alunos, embora apresentassem algumas dificuldades relacionadas ao conteúdo de função afim e quadrática, conseguiram realizar as atividades satisfatoriamente. Podemos ressaltar que o *software* foi um aliado muito forte para a realização das atividades. A opção do arrastar de um objeto na Janela de Visualização permitiu ao aluno visualizar os conteúdos por meio dos aspectos dinâmicos proporcionados pelo *software*, tecer conjecturas e argumentar sobre a validade das respostas das questões.

Desenvolvemos no total nove atividades relacionadas com plano cartesiano, função afim (incluindo a função constante e linear) e função quadrática. Duas destas atividades consistiram em um *redesign*, sendo uma sobre plano cartesiano e outra sobre função constante. Para as atividades de *redesign*, percebemos um avanço considerável dos alunos em relação às primeiras atividades realizadas.

Ao final do curso, coletamos algumas opiniões dos alunos sobre a abordagem de funções realizada com a utilização do GeoGebra, comparativamente com o desenvolvimento das sequências de atividades propostas nos livros didáticos. Isso permitiu constatarmos que o uso desse *software* possibilitou aos alunos desenvolverem as questões com maior rapidez, observarem o comportamento dos gráficos plotados na Janela de Visualização e compreenderem o conteúdo estudado.

A nossa questão de pesquisa foi enunciada da seguinte maneira: Quais as contribuições do GeoGebra para o ensino de funções afim e quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática?

A busca de resposta para esta questão nos leva a considerar que a visualização propiciada pelo dinamismo do GeoGebra chamou muito a atenção dos alunos e teve uma contribuição significativa para a realização das atividades propostas. Também devemos ressaltar que a utilização do *software* no ensino de funções teve uma importante contribuição para uma análise crítica das atividades desenvolvidas; o que possibilitou a melhoria da aprendizagem de funções afim e quadrática pelos alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática. Observamos que a utilização do GeoGebra permitiu aos alunos a realização da conversão entre as representações algébricas e gráficas das funções estudadas, bem como o tratamento no sentido proposto pelo Registro de Representações Semióticas. A metodologia do *Design Research* possibilitou identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a realização das atividades e propor o redesign, que em nossa pesquisa consistiu na proposição de duas atividades específicas, o que foi eficaz para superarem as referidas dificuldades de aprendizagem.

Finalmente, pensamos que pesquisas similares à desenvolvida neste trabalho deverão ser estendidas aos cursos de Licenciatura de outras universidades, especialmente nas que contemplem, em sua estrutura curricular, a disciplina Fundamentos da Matemática. Esperamos que este trabalho possa contribuir com o avanço das pesquisas realizadas em Educação Matemática no Ensino Superior, particularmente no que se refere ao processo de aprendizagem dos conteúdos de funções afim e quadrática.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. T. O. **Quando professoras se encontram para estudar matemática: saberes em movimento.** Tese de Doutorado (em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal.2007. Disponível em: http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/9/TDE-2007-04-26T221313Z-628/Publico/FranciscaTOA.pdf . Acesso em 27 de novembro 2012.

ARDENGHI, M. J. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função: Pesquisas Realizadas no Período de 1970 a 2005 no Brasil**. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BAGÉ, I. B. **Proposta para a prática do professor do ensino fundamental I de noções de Geometria com o uso de Tecnologias**. 199f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BIANCHINI, E. e PACCOLA, H. **Matemática Versão Alfa 1**. São Paulo, 1995. Editora moderna. Cap.IV, Pág 79, 80.

CASTRO, M. R., FRANT, J. B. **Argumentação e Educação em Matemática**. In: Boletim GEPEM, n. 40, p. 53-68, agosto 2002.

COLLINS, A. **Design Research: Theoretical aud. Melhodological** ISSUES. (Artigo 2). Journal of the Learning Sciences. Evanston, p.13-42.2004.

DOERR, H.M; WOOD, T. **Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática**. In: Borba, M.C. Tendências internacionais em formação de professores de Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. Cap.V, Pág 113-128.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semiótica e Funciornamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003 (Coleção Papirus Educação).

DWECK, C. **Motivacional processes affecting leaning.** In: Collins, A. Design Research: Theoretical aud. Melhodological ISSUES. (Artigo 2). Journal of the Learning Sciences. Evanston, p.13-42. 2004.

GAUTHIER, C. *et al*. **Por uma teoria da Pedagogia**. Ijuí: Unijuí, 1998.

GOLDSTEIN, L.J.*et al*. **Matemática Aplicada a Economia, Administração e Contabilidade**. 8º ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática. 1ª série**. 10 ed. São Paulo: Atual, 1990.

MANUAL DO GEOGEBRA. Disponível em: http://www.passeiLospelamtematica.net/manual geogebra.pdf . Acesso em 20 de novembro 2012. 11h44min.

MAIA, D. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional**. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

NÓBRIGA, J. C. C..; ARAÚJO, L. C. L. de. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**.São Paulo, 2010. Editora Exato.

OLIVEIRA, J. M. A. de. **Escrevendo Com o Computador Na Sala de Aula**. São Paulo: Cortez, 2006 – (Coleção Questões de Nossa Época; v.29).

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. 174f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PROINFO. **A educação brasileira e a chegada dos computadores**. 1997. In: Oliveira, José Márcio Augusto de. Escrevendo Com o Computador Na Sala de Aula. São Paulo: Cortez, 2006 – (Coleção Questões de Nossa Época; v.29).

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática/ Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

REIS, A. M. **Uma proposta dinâmica para o ensino de Função Afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/S.P, 2011.

SANTOS, F. R., *et. al*. **Ambientes de aprendizagem**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SCANO, F. C.. **Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra**. 151f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função ao término do 2º grau**. 161f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. CBC Matemática Ensino Fundamental e Médio. Proposta Curricular. Minas Gerais, 2006. Disponível em: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf Acesso em 27 de novembro de 2012.

SEMINÁRIO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO. 1982. In: Oliveira, J. M. A. de. **Escrevendo com o computador na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2006 – (Coleção Questões de Nossa Época; v.29).

SIGNORELLI, S. F. **Um Ambiente Virtual para o Ensino Semipresencial de Funções de uma Variável Real: Design e Análise**. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica São Paulo, São Paulo, 2007.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 12 ed. Petrópolis, R. J.: Vozes, 2011.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS. Proposta institucional: Uso e disseminação das tecnologias de Informação e comunicação no ensino superior presencial da UNIMONTES, 2010. Diponível em http://www.virtualmontes.unimontes.br/course/view.php?id=2029. Acesso em 17 jan 2013. 19h 34min.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS. Centro de Educação a Distância. Disponível em: http://www.cead.unimontes.br Acesso em 13 de dezembro de 2012. 17h07min.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS. Projeto Político Pedagógico, curso de Licenciatura de Matemática, 2009.

ANEXOS

Fundamentos de Matemática

Atividade 1- Explorando o plano cartesiano

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalização de conceitos e proposições

O sistema de coordenadas cartesianas é constituído por dois eixos perpendiculares entre si. Esse sistema de coordenadas é a correspondência que a cada par ordenado de números reais associa um único ponto do plano cartesiano ortogonal.

O eixo desenhado na horizontal é chamado eixo das abscissas e o eixo desenhado na vertical é chamado eixo das ordenadas.

Propriedade do par ordenado.

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se,

$$(a.b) = (c, d) \rightarrow a = c \ e \ b = d$$

Simetria

Uma figura plana simétrica segundo uma reflexão possui uma reta chamada eixo de reflexão ou eixo de simetria, que divide em duas figuras congruentes que podem ser sobrepostas. Esse eixo funciona como um espelho que reflete uma parte sobre a outra.Ao dobrarmos a figura nessa linha, cada parte se encaixará perfeitamente na outra. Smole (2010, p.71)

CURIOSIDADES

A idéia de localizar pontos em um plano é bem antiga em matemática e, por volta do século III a.c., já havia sido usada pelo geômetra Apolônio de Perga.No entanto,o sistema que utilizamos hoje se originou dos trabalhos do matemático e filósofo René Descartes, que viveu na França, no século XVII. Descartes adotava o pseudônimo de Cartesius e, por isso, o sistema cartesiano criado por ele é conhecido como cartesiano. SMOLE (2010, p.68)

[...] As palavras coordenada, abscissa e ordenada, no sentido técnico que tem hoje, foi contribuição de Leibniz em 1692. Eves (2007, p.388).

Atividade 1: Explorando o plano cartesiano

Objetivos

- Reconhecer pontos no plano cartesiano.
- Identificar a abscissa e a ordenada de um ponto.
- Reconhecer que o sistema cartesiano divide o plano em 4 regiões denominadas quadrantes.
- Identificar quadrantes onde os pontos estão situados.
- Identificar as coordenadas dos pontos pertencentes ao plano cartesiano.
- Utilizar lápis e papel para explorar o plano cartesiano.
- Utilizar o *software* de GeoGebra para explorar o plano cartesiano.

Recursos didáticos e tecnológicos

- Lápis e papel.
- Fotocópia da Atividade
- Laboratório de informática.
- *Software* GeoGebra.

Preparação

Preparação

5. Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade1_seunome.doc".
6. Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.
7. Deixe visíveis os eixos.
8. Utilize o Campo de Entrada digitando os dados diretamente.

   Processo de construção

n) Digite no campo de entrada o ponto A= (2,3) e tecle enter.
o) O ponto A pertence a qual quadrante?
p) Digite no campo de entrada o ponto B= (-3,4) e tecle enter.
q) O ponto B pertence a qual quadrante?
r) Digite no campo de entrada o ponto C= (-2,-3) e tecle enter.
s) O ponto C pertence a qual quadrante?

t) Digite no campo de entrada o ponto D= (5,-4) e tecle enter.
u) O ponto D pertence a qual quadrante?
v) Digite no campo de entrada os pontos: E= (2,0) tecle enter; F= (0,3) tecle enter; G= (-2,0) tecle enter e H= (0,- 4), tecle enter.
w) Onde estão localizados os pontos E, F,G e H? Eles pertencem a qual quadrante?
x) Qual a condição para que um ponto pertença ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?
y) Qual a condição para que um ponto pertença ao 1º quadrante? E ao 3º quadrante?
z) Qual a condição para que um ponto pertença ao eixo X? E ao eixo Y?

Ao término da atividade, foi criada uma pasta na medida da área de trabalho e a mesma foi salva intitulada "atividade1_seu nome".

Atividade 2 -Explorando o plano cartesiano

Objetivos

- identificar simetria dos pontos em relação aos eixos
- identificar simetria em relação a origem do sistema cartesiano.

1.Digite no campo de entrada do GeoGebra os pontos A, B e C. Sendo A=(1,5), B=(1,-5) e C= (1,-5). Qual a relação de simetria entre os pontos: A e B? A e C? B e C?

1. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE

1.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem? Justifique.

1.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

1.3. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de função? Justifique.

1.4. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina funções.

Fundamentos de Matemática

Atividade 3 - domínio e imagem de uma função

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalizando conceitos e proposições

Definição

Uma **função** f de um conjunto D para um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.

O conjunto D de todos os valores de entrada possíveis é chamado de domínio da função. O conjunto de todos os valores de $f(x)$ conforme x varia ao longo de D é chamado de imagem de uma função. A imagem pode não incluir todos os elementos do conjunto Y.

Dizemos que " y é uma função de x ", e a escrevemos de modo simbólico, como

$y = f(x)$ (" y é igual a f de x ").

Nessa notação, o símbolo f representa a função, a letra x é a **variável independente** que representa o valor de entrada de f, e y a é a **variável dependente** ou o valor de saída de f em x.

Atividade 3 – Domínio e imagem de uma função

Objetivos:

- Identificar elementos pertencentes ao domínio de uma função.
- Identificar elementos pertencentes ao conjunto imagem.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade 3

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade3_seunome.doc".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Deixe visíveis os eixos.

Utilize o Campo de Entrada digitando os dados diretamente.

Processo de construção

1. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das abscissas determinando o ponto A.

2. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das ordenadas determinando o ponto B.

Abordagem teórica

1) Clique sobre o ponto A e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.
2) Clique sobre o ponto B e movimente-o em diversas direções e descreva o seu comportamento.

Abra uma nova janela do GeoGebra

1. Digite no campo de entrada a função f dada por $f(x) = x + 1$, tecle enter.

2. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o eixo das abscissas determinando o ponto A.

3. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), clique sobre o ponto A e logo em seguida sobre o eixo das abscissas determinando uma perpendicular por A.

4. Ative a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a interseção da reta perpendicular com o gráfico da função obtendo o ponto B.

5. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), clique sobre o ponto B, logo em seguida sobre o eixo das ordenadas obtendo uma perpendicular por B.

6. Ative a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a interseção da reta perpendicular com o eixo das ordenadas obtendo C.

7. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B, vai abrir uma janela, clique sobre a opção renomear, vai abrir uma nova janela digite C. clique em ok.

8. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, vai abrir uma janela, clique sobre a opção renomear, vai abrir uma nova janela digite B. clique em ok.

9. Ative a ferramenta Segmento Definido por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre A e C, depois sobre C e B.

10. Desabilite na janela algébrica as retas perpendiculares a e b.

11. Clique com o botão direito do mouse, sobre o segmento $\overline{AC}$, vai abrir uma janela, clique sobre propriedades, vai abrir uma nova janela, clique sobre a opção "estilo", em estilo de linhas, selecione linha tracejada, clique em fechar.

12. Clique com o botão direito do mouse, sobre o segmento $\overline{CB}$, vai abrir uma janela, clique sobre propriedades, vai abrir uma nova janela, clique sobre a opção "estilo", em estilo de linhas, selecione linha tracejada, clique em fechar.

13. Clique sobre o ponto A, mantenha-o pressionado e arraste-o ao longo do eixo x, para a direita e para a esquerda, do eixo x. Observe os valores correspondentes de A em C.

Abordagem teórica

1.Em relação à função afim f dada por $f(x) = x + 1$ como podemos definir os pontos A e B?

2.Qual é imagem de A:

- quando x for igual a 1?
- quando x for igual a 0?
- quando x for igual a -1?

REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE!

1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de função? Justifique.

2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

3. Em sua opinião, quais seriam os principais tópicos de função que deveriam ser estudados com a utilização das TIC's? Justifique.

4. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

- SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ,Maria Ignês.Matemática Ensino Médio. V.I. Editora Saraiva. 6º edição, 2010. São Paulo.

- Stewart,James. Cálculo volume I, tradução da 6ª edição.CENGAGE Learning. São Paulo 2011.

- THOMAS,George B. Cálculo volume I. 11ª edição. Ed. Pearson Education. São Paulo 2009.

Fundamentos de Matemática

Atividade 4 - função afim constante

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalizando conceitos e proposições

Função afim constante é toda função $f(x) = K,$ para todo $K \in \Re$.

O gráfico de uma função constante é sempre uma reta paralela ao eixo x.

$$G(f) = \{(x, y) / x \in \Re e y = k, \forall k \in \Re \}$$

.

Atividade 4 – Função afim constante

Questão adaptada do livro Matemática volume 1 versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola. (p.80).

Construção de uma função constante, por meio de medida da área, utilizando o GeoGebra

Objetivos:

- Construir o conceito de função constante por meio de medida da área utilizando o *software* GeoGebra.
- Interpretar a medida da área do polígono como uma função f .
- Deduzir uma fórmula para a função constante.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade5_seunome".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Processo de construção

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado AB marcar um ponto E a x cm de A . Por M traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. Obtendo dessa forma dois retângulos ABCD e AECD. Mostrar com o auxilio do GeoGebra que podemos enunciar uma fórmula para uma função linear.

1) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.
2) Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.
3) Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.
4) Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.
5) Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) e clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.
6) Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o lado AB, obtendo o ponto E.
7) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obter por E uma perpendicular.
8) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC obtendo F.
9) Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), Clique sobre os pontos E e F, obtendo o segmento $\overline{EF}$.
10) O segmento $\overline{AE}$ mede x cm o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.
11) Na janela algébrica, clique sobre a bolinha da reta f: $x = 4$ desabilitando-a.
12) Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A,E,F,D,A, obtendo assim dois retângulos ABCD e AEFD.
13) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

14) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da janela geométrica obtendo o seletor g. Com o botão direito clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.
15) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.
16) Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter. Clique com o botão direito sobre P, clique sobre opção "Habilitar Rastro". Na janela algébrica clique sobre a bolinha ao lado do ponto P desabilitando-o.

Abordagem teórica

1) Observe o que acontece com a medida da área do referido polígono AFDE quando as medidas de seus lados paralelos variam no intervalo de [0,6] do seletor. A medida da área do trapézio depende dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{FB}$? Descreva o que você observou.
2) A medida da área do trapézio pode ser interpretada como uma função? Caso afirmativo, defina está função.
3) Deduza a fórmula da medida da área do polígono AFDE, nomeando-a como uma função f.
4) Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter.
5) Clique como o botão direito sobre P vai abrir uma janela, clique sobre a opção abilitar rastro. Ative animação. Descreva o comportamento do ponto P.
6) Digite no campo de entrada a função que você deduziu, tecle enter e descreva o que acontece com a função f e a semi reta descrita por P.

1. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE

1.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de Cálculo? Justifique.

1.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

1.3. Em sua opinião, quais seriam os principais tópicos de Cálculo que deveriam ser estudados com a utilização das TIC's? Justifique.

1.4. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

1.5. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina Fundamentos da Matemática.

Fundamentos de Matemática

Atividade 5 – Função afim linear

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalização de conceitos e proposições

Função afim linear é toda função $f:\Re \rightarrow \Re$ **definida por** $f(x) = ax$, com $a \in \Re$ e $a \neq 0$.

Raízes ou zeros de uma função são todos os valores de x que tornam a função nula, ou seja, $f(x) = 0$ é a interseção da reta com o eixo x.

O gráfico de uma função afim linear é uma reta obliqua em relação ao eixo x.

CURIOSIDADES

Existem evidências de que o homem tem , desde a antiguidade, a noção intuitiva de função. Algumas dessas evidências são tabelas encontradas no Egito, na Índia e na Grécia que associam comprimentos da sombra de uma vara a certas horas do dia.

A formalização da idéia de função, no entanto, parece ter ocorrido somente do século XVII. Ao que tudo indica, foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês, o primeiro a usar o termo função. Ao estudar relação entre duas grandezas, Descartes adotou um sistema de eixos concorrentes, representando a primeira grandeza, sobre um dos eixos e a segunda, sobre o outro. Dessa forma ele pôde determinar as coordenadas de um ponto no plano.

O sistema de eixos ortogonais que você utiliza é um caso particular daquele criado por Descartes. Daí o nome sistema cartesiano ortogonal.

Posteriormente outros grandes nomes da matemática dedicaram-se tanto à formalização como à aplicação de funções, cabendo ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) a introdução da notação $f(x)$ universalmente utilizada.

Com o surgimento da teoria dos conjuntos, o conceito de função passou a ser estruturado com base na idéia de pares ordenados e na lei que relaciona os elementos desses pares.

Nos dias atuais as representações cartesianas estão em quase todas as atividades humanas, como mostram os meios de comunicação ao analisar, por exemplo, a variação da temperatura, das intenções de voto numa eleição, ou a oscilação das ações nas Bolsas de Valores.

Essas representações, além de possibilitarem análises rápidas através da simples visualização de um gráfico, facilitam a monitoração do fenômeno em desenvolvimento.

Fonte: BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, herval. Matemática vol. 1, Versão Alfa 1, 2ª edição revisada e ampliada.São Paulo: Editora moderna, 1995.

Atividade 5 – Função afim linear

Questão adaptada do livro Matemática volume 1 versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola. (p.80).

Construção de uma função afim linear, por meio de medida da área, utilizando o GeoGebra

Objetivos:

- Construir o conceito de função afim linear $y = ax$,com $a \in \Re$, por meio de medida da área utilizando o *software* GeoGebra.
- Interpretar a medida da área do polígono como uma função f .
- Deduzir uma fórmula para a função linear.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade5_seunome".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Processo de construção

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado AB marcar um ponto E a x cm de A . Por M traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. Obtendo dessa forma dois retângulos ABCD e AECD. Mostrar com o auxilio do GeoGebra que podemos enunciar uma fórmula para uma função linear afim.

1)Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.

2)Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.

3)Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.

4)Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.

5)Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) e clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.

6)Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre o lado AB, obtendo o ponto E.

7)Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obter por E uma perpendicular.

8)Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC obtendo F.

9)Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), Clique sobre os pontos E e F, obtendo o segmento $\overline{EF}$.

10)O segmento $\overline{AE}$ mede x cm, o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.

11) Na janela algébrica, clique sobre a bolinha da reta f: $x = 4$ desabilitando-a.

12)Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A,E,F,D,A, obtendo assim dois retângulos ABCD e AEFD.

13) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

14) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da janela geométrica obtendo o seletor g. Com o botão direito clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.

15) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.

16) Digite no campo de entrada P=(g,pol1), tecle enter. Clique com o botão direito sobre P, clique sobre opção "Habilitar Rastro". Na janela algébrica clique sobre a bolinha ao lado do ponto P desabilitando-o.

Abordagem teórica

1) Qual a medida da área do retângulo AEFD?

2) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. A medida da área do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{EF}$?

3) A medida da área do retângulo AEFD pode ser interpretada como uma função? Se sim defina-a.

4) Deduza a fórmula da medida da área do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função f .

5) Ative a ferramenta Reflexão com Relação a uma Reta (9ª janela), clicar sobre o retângulo AEFD. Na janela algébrica clique na bolinha ao lado do ponto E,F, h e desabilite pol1=8.

Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P habilitando-o. Logo em seguida com o botão direito clique sobre o seletor g, clique opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

6) No campo de entrada digite a função que você deduziu, tecle enter, verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor.

2. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE

2.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de fundamentos da Matemática? Justifique.

2.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

2.3. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

2.4. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina Fundamentos da Matemática.

Fundamentos de Matemática

Atividade 6 – Função Afim

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalização de conceitos e proposições

- Função afim é toda função $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x)=ax+b$ com a **e** $b \in \Re$.
- Raízes ou zeros de uma função são os valores que tornam a função nula, ou seja, $f(x)=0$.
- O gráfico de uma função afim é sempre uma reta e é dado por $Gf=\{(x,y)/ x \; e \; y \in \Re\}$
- Perímetro de um polígono é a soma de todos os seus lados, é dado por $P=2x+2y$.

Atividade 6 -Função afim

Questão adaptada do livro Matemática volume 1 versão alfa. Edwaldo Bianchini e Herval Paccola. (p.80)

Construção de uma função afim, por meio de medida da área, utilizando o GeoGebra

Objetivos:

- Mostrar com o auxilio do GeoGebra que podemos enunciar uma lei de formação para uma função afim do tipo $f(x)=ax+b$ com a e $b \in \Re$.
- Investigar com o auxilio do GeoGebra e interpretar o perímetro de um polígono como uma função afim.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade .

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade6_seunome".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Situação problema

Construir um retângulo ABCD de comprimento 6 cm e largura 4 cm. Sobre o lado AB marcar um ponto E a x cm de A . Por E traçar $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$. Obtendo dessa forma dois retângulos ABCD e MBCF.

Processo de construção

9) Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.
10) Digite no campo de entrada B=(6,0), tecle enter.
11) Digite no campo de entrada C=(6,4), tecle enter.
12) Digite no campo de entrada D=(0,4), tecle enter.
13) Ative a ferramenta Segmento definido por Dois Pontos (3ª janela) clique sobre os pontos A e B, B e C, C e D.
14) Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), , clique sobre o lado AB, obtendo o ponto E a x cm de A (por exemplo x = 2 cm.)
15) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obter por E uma perpendicular.
16) Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique sobre a perpendicular na interseção com o lado DC obtendo F.

9) Ative a ferramenta Segmento Definido Por Dois Pontos (3ª janela), clique sobre os pontos E e F, obtendo o segmento $\overline{EF}$.

10) O segmento $\overline{AE}$ mede x cm o segmento $\overline{EF}$ mede 4 cm.

18) Na janela algébrica, clique sobre a bolinha da reta e desabilitando-a.

19) Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre A,E,F,D,A, obtendo assim dois retângulos ABCD e AEFD.

20) Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique dentro do retângulo AEFD.

21) Ative a ferramenta Seletor (11ª janela), clique em qualquer lugar da janela geométrica obtendo o seletor g. Com o botão direito clique sobre g, opção propriedades, digite min: 0 e max: 2, incremento 0,001. Clique em fechar ou aplicar.

22) Digite no campo de entrada E=(g,0), tecle enter.

23) Ative a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro (8ª janela), clique sobre a medida da área do polígono.

24) Na janela algébrica desative o polígono AEFD.

Abordagem teórica

8) Qual o perímetro do retângulo AEFD no intervalo [0,2]?

9) Clique sobre o seletor g e movimente-o lentamente. O perímetro do retângulo AEFD depende do segmento $\overline{AE}$?

10) A medida do perímetro do retângulo AEFD pode ser interpretado como uma função? Se sim defina esta função.

11) Deduza a fórmula do perímetro do retângulo AEFD, nomeando-a como uma função f

12) Clique sobre a bolinha ao lado do ponto P habilitando-o. Logo em seguida com o botão direito clique sobre o seletor g, clique opção animação. Descreva o comportamento do ponto P no intervalo de [0,2].

13) Dê uma interpretação para o gráfico da função do perímetro no plano cartesiano.

14) No campo de entrada digite a função que você deduziu e verifique se a mesma sobrepõe a função que aparece no intervalo de [0,2] do seletor. Existe alguma relação entre a reta e o segmento de reta?

1. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE

1.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de Cálculo? Justifique.

1.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

1.3. Em sua opinião, quais seriam os principais tópicos de Cálculo que deveriam ser estudados com a utilização das TIC's? Justifique.

1.4. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

Fundamentos de Matemática

Atividade 7 - Explorando o plano cartesiano

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalização de conceitos e proposições

O sistema de coordenadas cartesianas é constituído por dois eixos perpendiculares entre si. Esse sistema de coordenadas é a correspondência que a cada par ordenado de números reais associa um único ponto do plano cartesiano ortogonal.

O eixo desenhado na horizontal é chamado eixo das abscissas e o eixo desenhado na vertical é chamado eixo das ordenadas.

Propriedade do par ordenado.

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se,

$$(a.b) = (c, d) \rightarrow a = c \ e \ b = d$$

Atividade 7 – plano cartesiano.

Objetivos:

- Identificação de pontos no plano cartesiano
- Construir uma tabela a partir do plano cartesiano.
- Determinar lei de formação a partir de um dado problema.
- Representar pares ordenados no plano cartesiano.
- Identificar simetria entre os eixos
- Identificar relação de simetria com a origem do sistema cartesiano.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade 7

Lápis e papel

1)Com base no plano cartesiano representado pela figura a seguir com os respectivos pontos preencha a tabela dada.

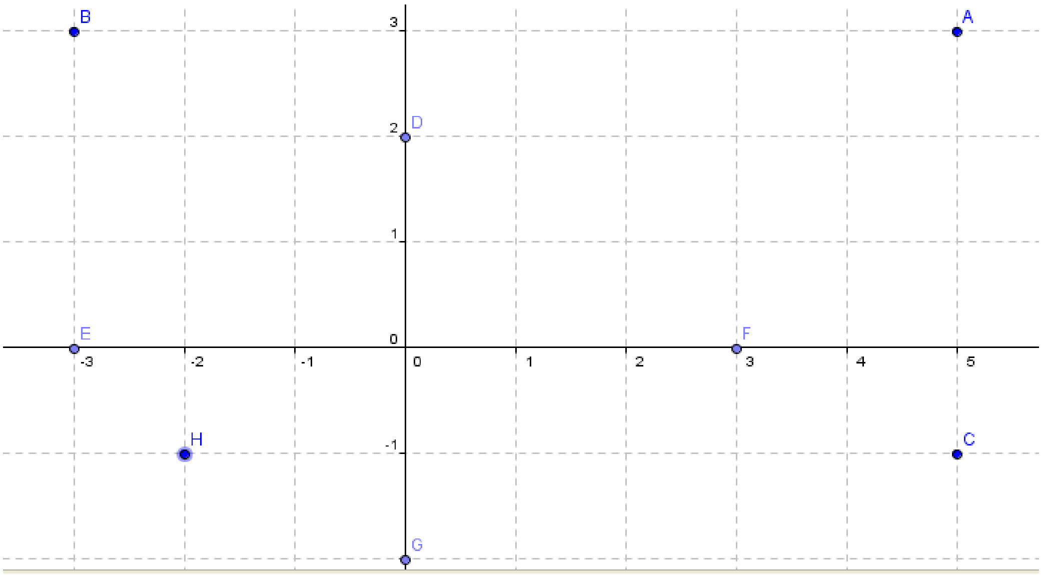


Figura – Atividade 7 plano cartesiano

	X	Y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Tabela – Atividade 7 plano cartesiano

2)Situação problema

(Relação do número de carros com o número de pneus) Considerar a variável x para carros populares e a variável y para pneus. Deve ser levado em conta que são carros com 4 pneus mais o pneu reserva (estepe) num total de 5 pneus. Se

2.a) em uma garagem tiver zero carro, quantas pneus terá?

2.b) em uma garagem tem 1 carro, quantas pneus terá?

2.c) em uma garagem tem 2 carros, quantas pneus terâo?

2.d) em uma garagem tiver 3 carros, quantas pneus terão?

2.e) em uma garagem tiver 4,5,6... carros, quantas pneus terão?

2.f) Nas questões de 1 a 5 é possível um par ordenado estar no 4º quadrante? Justifique.

2.g) É possível obter uma fórmula ou uma lei de formação para relação entre o número de carros e o número de pneus? Se sim qual é esta lei?

2.h) A partir da lei de formação, da questão 7, construa uma tabela para a quantidade de pneus para os 7 primeiros carros populares de números pares consecutivos a começar pelo 4º carro.

2.i) questão 8 represente estes pares ordenados no sistema de coordenadas cartesianas.

3) Abra uma nova janela no GeoGebra, digite os pontos: A=(-2,0), B=(-2,3), C=(2,0), D=(2,-3), E=(2,3), F=(-2,-3). Qual a relação de simetria entre os pontos:

a) A e C?

b) B e D?

c) D e E?

d) B e F?

3. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE

3.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem ? Justifique.

3.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

3.3. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de função? Justifique.

3.4. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina funções.

Fundamentos de Matemática

Atividade 8 - função quadrática

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalizando conceitos e proposições

Função quadrática é toda função $f(x) = ax^2 + bx + c$ **com** $a, b\, e\, c \in \Re,\ \ a \neq 0.$

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma curva chamada parábola. Essa por sua vez pode ter a concavidade voltada para cima se o coeficiente $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0.$

Reta tangente

A medida da área de um retângulo é pelo produto da medida do comprimento da base pela medida da altura, isto é, $A = xy$.

ATIVIDADE 8 - Função Quadrática

Objetivos:

- Construir o conceito de máximo de uma função quadrática com o uso do GeoGebra.
- Investigar, interpretar e escrever a medida da área de um polígono como uma função f .
- Explorar reta tangente no conceito de máximo de uma função.

Recursos didáticos e tecnológicos

Fotocópia da Atividade.

Laboratório de informática.

Software GeoGebra.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo “Atividade8_seunome”.

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada.

Ative os eixos e malhas.

Situação Problema

Para cercar uma horta de forma retangular no quintal de sua casa uma pessoa dispõe de 8m de tela. Encontre as dimensões da maior horta que ele pode cercar usando 8m de tela.

Processo de Construção

19. Ative a ferramenta Novo Ponto (2° janela), clique sobre a origem do sistema cartesiano obtendo A=(0,0) e clique sobre o eixo das abscissas para obter o ponto B = (2,0).

20. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4° janela), obter uma perpendicular por B.

21. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), obter o ponto C = (0,4)

22. Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4ª janela), obter uma perpendicular por C.

23. Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2ª janela), clique na interseção das perpendiculares obtendo o ponto D.

24. Clique com o botão direito sobre o ponto D, opção “renomear”; renomei o ponto D para C. Clique com o botão direito sobre o ponto C, renomei para D; obtendo o polígono A,B,C,D.

25. Ative a ferramenta Polígono (5ª janela), clique sobre os A,B,C,D,A.

26. Desabilite as retas perpendiculares na janela algébrica, clicando sobre a bolinha ao lado a: x = 2 e b: y = 4.

27. Ative a ferramenta Seletor 11ª janela, clique sobre a janela de Visualização criando o seletor e = 1,clique em aplicar.

28. Clique com o botão direito sobre o seletor, opção propriedade, intervalo min;0 e max ; 4. Clique em aplicar ou fechar.

29. No campo de entrada digite B = (e,0), tecle enter.

30. Digite no campo de entrada D= (0,e).

31. Ative a ferramenta Medida da área (8ª janela), clique sobre o polígono.

32. Na janela Álgebra desabilite pol 1

33. Digite no campo entrada a função f dada por $f(x)=4x-x^2$, tecle enter.

34. Ative a ferramenta Novo Ponto (2ª janela), clique sobre a curva no intervalo em que a mesma é crescente obtendo ponto E.

35. No campo de entrada digite E = (e; f(e)), tecle enter.

36. Digite no campo de entrada tangente [E, f], tecle enter.

Abordagem teórica

1. Desabilite na janela algébrica a função $f(x)=4x-x^2$ e a reta tangente g. Clique sobre o seletor com o botão direito, ativar animação, observar o comportamento da medida da área. Descreva o que você observou em seguida desabilite a animação.

2) Ative a ferramenta Reflexão em Relação a Uma Reta (8ª janela), clicar dentro do polígono e depois, na reta de reflexão, eixo y. O que você observa? Estas figuras são simétricas em relação ao eixo y?

3)Na janela Algébrica desabilite o pol1. habilite a função $f(x)=4x-x^2$ e a reta tangente. Qual a relação existente função $f(x)=4x-x^2$ com a medida da área do polígono?

4) Quando o ponto E assume o valor (2,4) qual é a medida da área do polígono?

5) Ative a ferramenta Ângulo (8ª janela), clique sobre o eixo x e sobre a reta tangente no sentido horário criando um ângulo α. Clique sobre o seletor e arraste-o lentamente observando os valores que o ângulo assume. Quando o ângulo é igual a zero qual é a posição da reta tangente em relação à parábola?

6) Qual é o significado da posição da reta tangente, conforme a resposta da questão anterior, e a parábola no ponto E?

7) O que determina a abscissa do vértice da função e o lado do polígono?

8) A medida da área do polígono A`B`C`D` pode ser interpretada como uma função? E se possível indicar qual o tipo de função?

4. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE!

4.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de Cálculo? Justifique.

4.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

4.3. Em sua opinião, quais seriam os principais tópicos de Cálculo que deveriam ser estudados com a utilização das TIC's? Justifique.

4.4. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

4.5. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina Fundamentos da Matemática.

Fundamentos de Matemática

Atividade 9 - função afim constante

Aluno(a):

Período: **Data:**

ELABORAÇÃO: Professor Ronaldo Dias Ferreira

Formalização de conceitos e proposições

Função afim constante é toda função $f(x)=K,$ para todo $K \in \Re$.

O gráfico de uma função constante é sempre uma reta paralela ao eixo x.

$G(f)=\{(x,y)/\,x\in\Re e\, y=k, \forall k\in\Re\ \}$

A medida da área de um retângulo é pelo produto da medida do comprimento da base pela medida da altura, isto é, $A=xy$.

A medida da área de um trapézio é dada média aritmética entre a base maior e a base menor pelo produto da altura, ou seja, $A=\frac{(B+b)}{2}h$.

Atividade 9- Função constante

Objetivos:

- Mostrar por meio do cálculo de medida da área, com auxílio do GeoGebra, uma função constante.
- Conceituar função constante.
- Deduzir uma lei de formação para uma função constante a partir da medida da área de um trapézio, quadrado ou triângulo.

Preparação

Abra o GeoGebra e crie o arquivo "Atividade9_nome".

Deixe as janelas Algébrica e de Visualização do GeoGebra ativadas.

Utilize o Campo de Entrada digitando os dados diretamente.

Recursos didáticos e tecnológicos

Laboratório de informática.

Software GeoGebra

Processo de construção

1)Digite no campo de entrada A=(0,0), tecle enter.

2)Digite no campo de entrada B=(8,0), tecle enter.

3)Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4º janela), opção reta perpendicular, clique sobre B e logo em seguida sobre o eixo x, obtendo uma perpendicular por B.

4)Digite no campo de entrada C=(0,4), tecle enter.

5) Ative a ferramenta Reta Perpendicular (4º janela), opção reta perpendicular, clique sobre C e logo em seguida sobre o eixo y, obtendo uma perpendicular por C.

6)Ative a ferramenta Interseção de Dois Objetos (2º janela), obtendo D na interseção das retas perpendiculares.

7)Clique sobre o ponto C com o botão direito do mouse, opção renomear, renomeie C para D.

9)Clique sobre o ponto D como botão direito do mouse, opção renomear, renomeie para C.

10)Ative a ferramenta Segmento Definido por Dois Pontos (3ª janela), Clique sobre A e B, depois sobre B e C, depois sobre C e D, finalmente sobre D e A. Formando assim o polígono ABCDA.

11)Sobre o segmento $\overline{AB}$, determine um ponto E qualquer.

12)Sobre o segmento $\overline{CD}$, determine um ponto F qualquer.

13)Ative a segmento definido por dois pontos 3ª janela, clique sobre E e F. determinando o segmento EF.

14)Ative a ferramenta Polígono (5º janela), opção, clique sobre os pontos A,E,F,D e A.

15)Ativar a ferramenta Controle Deslizante 11ª janela, clique sobre qualquer lugar da Janela de Visualização, obtendo o seletor g.

16)Desative na janela algébrica os pontos C e D.

17)Digite no campo de entrada E=(h,0), tecle enter.

18)Digite no campo de entrada F=(8-h,4), tecle enter.

19)Clique com o seletor g com o botão direito do mouse, opção propriedades, em intervalo min:0 e Max=8 , incremento 0,001. Clique em fechar.

20) Ative a ferramenta Medida da área, clique sobre o polígono AEFD.

Abordagem teórica

1)Clique sobre o seletor h arraste-o até h = 8. O que determina o segmento $\overline{EF}$ no polígono?

2)Clique sobre o seletor h arraste-o até h= 0. O que determina o segmento $\overline{EF}$ no polígono?

3)Clique sobre o seletor h e arraste-o. Descreva o que acontece com os pontos E e F na janela de visualização e na janela algébrica?

4)Clique sobre o seletor h e arraste-o até h= 8 e depois até h= 0 observando a medida da área. A medida da medida da área pode ser interpretada como função no intervalo [0,8]? Si sim, classifique-a.

5)Determine, informalmente, uma lei de formação para está função no intervalo de [0,8].

5. REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE!

5.1. Você considera importante a utilização das TIC's para seu processo de aprendizagem de Fundamentos de Matemática? Justifique.

5.2. Quais são as principais dificuldades que você encontrou na realização desta atividade?

5.3. Em sua opinião, quais seriam os principais tópicos de Cálculo que deveriam ser estudados com a utilização das TIC's? Justifique.

5.4. Cite os aspectos que você considerou mais relevantes na atividade desenvolvida. Você considera que esses aspectos contribuem para prepará-lo melhor para utilizar as TIC's no estudo dos diversos tópicos de Fundamentos da Matemática? Justifique.

5.5. Apresente sugestões e comentários relativos à atividade realizada para orientar o planejamento e o desenvolvimento das aulas da disciplina Fundamentos da Matemática.

SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ,Maria Ignês.Matemática Ensino Médio. V.I. Editora Saraiva. 6º edição, 2010. São Paulo.

- Stewart, James. Cálculo volume I, tradução da 6ª edição.CENGAGE Learning. São Paulo 2011.

- THOMAS,George B. Cálculo volume I. 11ª edição. Ed. Pearson Education. São Paulo 2009.

DECLARAÇÃO

Declaramos para os devidos fins que o professor **Ronaldo Dias Ferreira**, MASP 1046785-0, atuou na equipe docente do Projeto de Ensino **Implementação de Novas Tecnologia na produção de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática nos cursos de graduação da UNIMONTES,** desenvolvido no âmbito da Proposta Institucional TIC's. O professor está autorizado a utilizar tanto os materiais produzidos quanto os dados coletados por meio das atividades desenvolvidas pelo projeto para finalidade de pesquisa.

Por ser verdade, firmamos a presente declaração.

Montes Claros, 11 de junho de 2012.

Professor Dr. Edson Crisostomo dos Santos
MASP 0367722-6
Coordenador do Projeto 7 – TIC's
Universidade Estadual de Montes Claros - UNIMONTES