

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Gilberto Emanuel Reis Vogado

**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS IDEIAS
PRELIMINARES ENVOLVIDAS NO CONCEITO DE
INTEGRAL, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2014

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Gilberto Emanuel Reis Vogado

**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS IDEIAS
PRELIMINARES ENVOLVIDAS NO CONCEITO DE
INTEGRAL, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da
Silva.*

São Paulo

2014

Banca Examinadora

Msala

Sampedro

Diego Olancho Jr

Manoel R. Celestino

Nataniel Gutierrez Cabral

“na realidade, a aprendizagem não se reduz a uma simples absorção de informações e a formação de mecanismos mentais sobre terrenos neutros. A aprendizagem implica em um processo ativo de reconstrução, com meios intelectuais próprios, a partir de dados fornecidos (FISCHBEIN, 1969, p.291).

À minha família: pai,
mães, esposa, filhos, irmãos,
cunhados e sobrinhos pelo amor,
compreensão, apoio e incentivo
nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Muitos se fizeram presentes nesta conquista e tiveram importância na elaboração desta tese, pois as influências positivas recebidas durante este percurso, contribuíram para que este pensamento se concretizasse. Assim, agradeço imensamente, em especial:

A Deus pelo dom da vida e, pelas conquistas adquiridas transformadas em sabedoria, bem como a saúde e a força de vontade para superação de todas as dificuldades.

Aos meus pais, Sebastião Vogado, Raimunda Vogado, Nazaré Vogado, tia Lourdes Vogado, aos meus irmãos, sobrinhos e cunhados pelo grande incentivo para realização deste trabalho.

A minha esposa, Roseane Couto Vogado e aos meus filhos Gilberto Vogado Filho e Lucas Couto Vogado, sempre presentes em minha vida, pelo total apoio, superando os momentos de ausência e dedicando suas paciências para meu incentivo nesta conquista.

Ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, orientador desta tese, pela dedicação, apoio e contribuição

desta produção. Bem como pela oportunidade de me aceitar como orientando e, acreditar em minhas expectativas e, desta forma dedicar suas horas para orientação desta pesquisa.

Ao amigo e Professor Doutor Natanael Freitas Cabral, pela imensa colaboração, dedicando sua sabedoria e paciência para a finalização desta pesquisa.

A coordenação do curso de pós-graduação em educação matemática da PUC-SP, em especial ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pelo incentivo recebido e sugestões que enriqueceram meu conhecimento científico e intelectual.

Aos colegas da turma de Doutorado, pelos momentos compartilhados e vencidos por meio de palavras e ações de incentivos.

Aos amigos Carlos Alberto de Miranda Pinheiro, Antonio Sérgio dos Santos Oliveira, Antonio José de Barros Neto, Walmir José Motta Conceição e Rubens Vilhena Fonseca, que juntos, em São Paulo e em Belém, conseguimos vencer os momentos de angustias, transformados em alegrias e coragem para seguir adiante, fazendo valer cada dia o nosso esforço por esta tese.

Aos alunos, colaboradores desta pesquisa, que pacientemente contribuíram na participação da resolução das atividades, sem os quais não seria possível nossa análise.

Ao Professor Doutor Pedro Franco de Sá, que sabiamente contribuiu para o desenvolvimento e realização do projeto de Doutorado para os docentes da UEPA.

A todos os professores do doutorado em Educação Matemática da PUC-SP, que contribuíram na conquista e efetivação deste trabalho, mostrando o caminho a ser trilhado.

Aos Professores da banca examinadora, Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni, Prof. Dr. Marcos Roberto Celestino e Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral, pela imensurável contribuição da realização desta tese.

Em memória de minha avó Severina Vogado, que me ensinou a ter coragem e vencer minhas expectativas.

E, finalmente, à Universidade do Estado do Pará- UEPA, pelo apoio financeiro e oportunidade de crescimento intelectual.

A todos, os meus sinceros agradecimentos.

O Autor

RESUMO

A presente pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida a partir de inquietações vivenciadas na docência do ensino superior, quando nos deparamos com situações que nos levou a pensar nas metodologias utilizadas para o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Diante desse panorama e, a partir da experiência na docência desta disciplina, na Universidade do Estado do Pará – UEPA, elaboramos a seguinte questão de investigação: ***Como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para alunos de Licenciatura em Matemática, utilizando-se a metodologia da Resolução de Problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein?*** Em seguida elaboramos os objetivos desta pesquisa: Investigar o desempenho estratégico dos licenciandos em matemática quando submetidos à Resolução de Problemas por meio de uma sequência de ensino que visa o processo de introdução ao conceito de Integral e, Identificar nessas estratégias escritas a manipulação individual e/ou simultânea dos aspectos básicos das atividades matemáticas, segundo Fischbein, quais sejam: a intuição, o algoritmo e o formal. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2004), bem como as três categorias de Fischbein (1993), que estão presentes em toda atividade matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo. Como já mencionamos a pesquisa é qualitativa, apresentado como procedimentos metodológicos a elaboração de uma sequência de ensino que foram aplicadas num período de 15 de maio a 02 de junho de 2014, com 16 duplas participantes, tendo os encontros uma duração média de 4 horas, porém as análises dos foram efetivadas em três duplas de alunos do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Pará com o auxílio do *software GeoGebra*, acreditamos que os elementos computacionais são excelentes recursos didáticos e contribuem para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Foi observado, ainda, que a discussão em grupo é de elementar importância e traz grandes contribuições para a aprendizagem do conceito de Integral, haja vista que se torna viável a reflexão do caminho que se quer chegar, pois as atividades planejadas foram discutidas pelas duplas dando autonomia para os mesmos, percebemos um avanço na medida em que os encontros iam acontecendo, onde os alunos em sua maioria mostraram-se mais motivados e participantes durante a aplicação da atividade, isto reforça o que Onuchic (1999) e Pinto (2010) dizem a respeito da metodologia de ensino e aprendizagem da matemática por meio da Resolução de Problemas que contribuem para criação de um ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento das atividades, deixando os alunos usarem as suas próprias ideias e não, simplesmente, seguir diretrizes, fazendo com que acreditem em suas habilidades.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Intuição. Algoritmo. Formal. Integral

ABSTRACT

This research, a qualitative one, was developed from concerns experienced in higher education teaching, when faced with situations that led us to think about the methods used for teaching and learning Differential and Integral Calculus. Against this background, and from experience in teaching this discipline, at Universidade do Estado do Pará - UEPA, we developed the following research question: **How is the process of introducing the concept of Integral for students in mathematics, using the methodology of problem solving, from the perspective of basic aspects in mathematical activity, according Fischbein?** Subsequently, we developed the objectives of this research: Investigate the strategic performance in mathematics undergraduates when undergoing problem solving through a teaching sequence that targets the process of introducing the concept of Integral and, Identify these strategies written individual manipulation and / or simultaneous to the basic aspects of mathematical activities, according Fischbein, namely: intuition, algorithm and formal. Theoretical framework were used ideas related to Teaching – Learning - Assessment Mathematics Teaching through problem solving of de Onuchic e Allevato (2004), and the three categories of Fischbein (1993), which are present in all mathematical activity: intuition, algorithm and formal. As already mentioned the research is qualitative, presented as instruments to draw up a teaching sequence that have been applied in a period of May 15 to June 2, 2014, with 16 double participants, the meetings an average of 4 hours, but the analyzes were effected in three double degree course students in mathematics at a public university of Pará state with the help of the software GeoGebra, we believe that the computational elements are excellent teaching resources and contribute to the learning of mathematical concepts. It was observed also that the group discussion is of elementary importance and brings great contributions to the learning of the concept of Integral, considering that becomes viable reflection of the way that we want to go, because the planned activities were discussed by double giving autonomy to the same, realize a breakthrough in that the meetings were going on where students mostly were more motivated and participants during the implementation of activity, this reinforces what Onuchic (1999) and Pinto (2010) say about the teaching methodology and learning mathematics through problem solving that contribute to creating a learning environment for the development of activities, leaving students to use their own ideas and not simply following guidelines, making them believe in their abilities.

Keywords: Problem solving. Intuition. Algorithm. Formal. Integral

LISTA DE SIGLAS

CNE	Conselho Nacional de Educação
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
MEC	Ministério da Educação e Cultura
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PUC	Pontifícia Universidade Católica
TIC	Tecnologia da Informação e da Comunicação
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UNESP	Universidade do Estado de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
CAPITULO 1 – PRELIMINARES	23
1.1 – PROBLEMÁTICA	23
1.2 – REVISÃO DA LITERATURA	29
I – O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	29
II – A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	38
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	44
2.1 – O QUE É UM PROBLEMA	44
2.2 – A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	45
2.3 – DIFERENTES ABORDAGENS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	48
2.3.1 – ENSINAR SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	49
2.3.2 – ENSINAR PARA RESOLVER PROBLEMAS	51
2.3.3 – ENSINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	51
2.4 – A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	55
2.5 – ELEMENTOS DA TEORIA DE EFRAIN FISCHBEIN	61
1 – O ASPECTO FORMAL	62
2 – O ASPECTO ALGORITMICO	63
3 – O ASPECTO INTUITIVO	64
CAPITULO 3 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS	67
3.1 – PESQUISA QUALITATIVA	67
3.2 – PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS	72
3.2.1 – SUJEITOS DA PESQUISA	72

3.2.2 – RECURSO COMPUTACIONAL	73
3.2.3 – RECURSOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS	74
3.2.4 – A SEQUENCIA DE ENSINO	75
3.2.5 – O EXPERIMENTO	98
CAPITULO 4 – ANÁLISE DOS DADOS	101
4.1 – 1º ENCONTRO	102
4.2 – 2º ENCONTRO	115
4.3 – 3º ENCONTRO	124
4.4 – 4º ENCONTRO	134
CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFERENCIAS	142
ANEXOS	147

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – gráfico da velocidade	79
FIGURA 2 – gráfico da velocidade	80
FIGURA 3 – soma inferior	83
FIGURA 4 – soma superior	86
FIGURA 5 – soma dos pontos médios	90
FIGURA 6 – gráfico da função f	95
FIGURA 7 – extraído do Livro HUGHES-HALLET et all 2009, p.123	103
FIGURA 8 – produção Dupla D_P	103
FIGURA 9 – produção Dupla D_L	104
FIGURA 10 – produção Dupla D_F	106
FIGURA 11– produção Dupla D_P	106
FIGURA 12 – produção Dupla D_L	106
FIGURA 13 – produção Dupla D_F	108
FIGURA 14 – produção Dupla D_L	108
FIGURA 15 – produção Dupla D_F	109
FIGURA 16 – produção Dupla D_P	109
FIGURA 17 – produção Dupla D_L	109
FIGURA 18 – produção Dupla D_P	111
FIGURA 19 – produção Dupla D_P	112
FIGURA 20 – produção Dupla D_L	113

FIGURA 21 – produção Dupla D_P	113
FIGURA 22 – produção Dupla D_F	113
FIGURA 23 – produção Dupla D_F	114
FIGURA 24 – produção Dupla D_L	116
FIGURA 25 – produção Dupla D_F	116
FIGURA 26 – produção Dupla D_F	117
FIGURA 27 – produção Dupla D_P	118
FIGURA 28 – produção Dupla D_F	118
FIGURA 29 – produção Dupla D_P	119
FIGURA 30 – produção Dupla D_F	120
FIGURA 31 – produção Dupla D_P	121
FIGURA 32 – produção Dupla D_L	121
FIGURA 33 – produção Dupla D_P	122
FIGURA 34 – produção Dupla D_F	122
FIGURA 35 – produção Dupla D_L	123
FIGURA 36 – gráfico obtido no GeoGebra da parte I	126
FIGURA 37 – produção Dupla D_L	126
FIGURA 38 – produção Dupla D_F	126
FIGURA 39 – produção Dupla D_P	127
FIGURA 40 – gráfico obtido no GeoGebra da parte II	128
FIGURA 41 – produção Dupla D_L	128
FIGURA 42 – produção Dupla D_P	128
FIGURA 43 – produção Dupla D_F	129
FIGURA 44 – produção Dupla D_P	130
FIGURA 45 – produção Dupla D_P	131
FIGURA 46 – produção Dupla D_P	131
FIGURA 47 – produção Dupla D_P	132
FIGURA 48 – produção Dupla D_P	133

FIGURA 49 – produção Dupla D_P	135
FIGURA 50 – produção Dupla D_P	136
FIGURA 51 – produção Dupla P_P	136
FIGURA 52 – produção Dupla D_P	137

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – questão 1	84
TABELA 2 – questão 2	84
TABELA 3 – questão 3	84
TABELA 4 – questão 4	85
TABELA 5 – questão 11	86
TABELA 6 – questão 1	87
TABELA 7 – questão 2	87
TABELA 8 – questão 3	87
TABELA 9 – questão 4	88
TABELA 10 – questão 11	89
TABELA 11 – questão 3	125

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – velocidade x tempo

76

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é o resultado de uma expectativa iniciada ainda na época de nossa graduação no curso de Licenciatura em Matemática. O primeiro contato com a disciplina Cálculo Diferencial e Integral nos fascinou, mas ao longo da graduação fomos percebendo a grande dificuldade da aprendizagem da disciplina por parte dos colegas graduandos, bem como a ansiedade dos docentes em fazer com que nós compreendêssemos os conceitos da disciplina. A partir daí, uma vez formado, com o início da trajetória profissional – não por coincidência e, sim, pela certeza – iniciamos a carreira docente ministrando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, com os papéis invertidos: agora como docente. E pudemos observar as mesmas dificuldades percebidas na graduação. Comecei, então, a ter os primeiros contatos com pesquisas voltadas ao estudo de recursos metodológicos para o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, pensando na busca de ações facilitadoras para desenvolver trabalhos nas instituições de ensino superior que pudessem contribuir para a melhoria da situação de ensino e aprendizagem da disciplina.

O Cálculo Diferencial e Integral constitui uma das mais importantes disciplinas no ensino superior e, a partir das experiências na docência da Matemática no ensino superior, tivemos conhecimento do alto índice de dificuldades por parte dos alunos na compreensão dos conceitos da referida disciplina. Para uma compreensão satisfatória dos conteúdos que integram a disciplina Cálculo, são exigidas habilidades estritamente relacionadas ao ato de criar hipóteses, de mobilizar o raciocínio dedutivo, de manipular ideias abstratas e de fazer generalizações. As dificuldades percebidas tanto no ensino quanto na

aprendizagem dos conteúdos em geral também estão presentes no entendimento do conceito de Integral, já que ele pode fornecer aos estudantes, à ciência e à sociedade um instrumental descritivo da realidade. Além disto, faz parte do conteúdo programático do ensino superior de alguns cursos, tais como: Matemática, Engenharias, Economia, Ciências Biológicas e Tecnologias. Sabemos que o ensino e a aprendizagem da Integral se constituíram em objetos de investigação por pesquisadores em Educação Matemática no Ensino Superior. Sabemos, ainda, que no Brasil e no exterior, principalmente a partir da década de 1980, emergiram discussões sobre o processo ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e que continuam sendo focos de estudos de educadores e pesquisadores. Isto se deve ao alto índice de reprovação na disciplina. Entre os pesquisadores brasileiros que se preocuparam com baixo desempenho na disciplina estão Silva (2011), Rezende (2003) e Barufi (1999), mas sabemos, também, que tal preocupação e os resultados obtidos não são prerrogativas brasileiras. Nas próprias palavras de Rezende (2003), estes resultados não são exclusividade de países subdesenvolvidos: há uma preocupação mundial com o fracasso do ensino e da aprendizagem do Cálculo, cujos estudos estão voltados para as dificuldades relacionadas às aprendizagens dos conceitos básicos do Cálculo, originando um movimento, nos Estados Unidos, na década de 80, denominado “Calculus reform”. Este preconiza o uso de novas tecnologias: softwares computacionais e calculadoras gráficas, como ferramentas auxiliares no aprendizado de conceitos e teoremas, de modo a favorecer a resolução de problemas. Segundo Nasser (2007), outras pesquisas foram efetivadas com relação ao fracasso de estudantes na disciplina de Cálculo, como, dificuldades de compreensão de limite e derivada (Giraldo, 2002; Tall, 1991; Leme e Igliori, 2003), Teorema Fundamental do Cálculo (Vianna, 1998); havendo, ainda, pesquisas relacionadas à forma com que alunos estudam a disciplina (Frota, 2001). Há, também, literaturas internacionais, por exemplo, David Tall (1976), “*pensamento matemático avançado*”.

Nesse contexto, a relevância de nossa pesquisa vai se moldando no sentido de promover situações e condições para que os estudantes possam desenvolver competências e habilidades, a partir de suas capacidades cognitivas, com a finalidade de construir um novo conhecimento, de maneira que possamos

identificar e descrever as aproximações entre as estratégias de resolução de problemas da Matemática, especificamente em Cálculo Diferencial e Integral. A Resolução de Problemas propõe esse cenário como estratégia de ensino e de aprendizagem e, nessa investigação, o ator principal – o estudante do curso de Licenciatura em Matemática – está nas duas pontas do processo: é aquele que se apropria do processo para aprender e, mais tarde, se aproveita do processo aprendido para ensinar.

A partir desta premissa, focamos nossa pesquisa em analisar o Ensino-Aprendizagem da Integral por meio da Resolução de Problemas, sendo esta fundamentação de tal relevância que nos impulsionou a cursar o Doutorado em Educação Matemática da PUC-SP, pois se efetivava, aqui, a necessidade em investigar possibilidades de sucesso na docência com resultados qualitativos na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

A organização desta tese, tanto em nível teórico, quanto em nível experimental, está estruturada em quatro capítulos. No capítulo 1, descrevemos a realização da pesquisa bibliográfica que de muito nos ajudou para percebermos as várias alternativas e caminhos para iniciarmos nossa trajetória. Desde a problemática elaborada, voltamos nosso foco para as diversas formas metodológicas do ensino do Cálculo; enfatizamos, também, a inserção de Tecnologias da Informação como instrumento de mediação na construção de conceitos da disciplina. Ainda neste capítulo, discutimos os estudos de vários pesquisadores que realizaram trabalhos neste contexto e, a partir daí, adotamos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino para nossa pesquisa.

No capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica, assim como discutimos a questão do ensino por meio da Resolução de Problemas, a partir de pesquisadores, como: Onuchic & Allevato (2004), Van de Walle (2001), bem como de recomendações contidas nos PCNs (1998). Passamos a estudar e compreender a existência de diferentes concepções de Resolução de Problemas, visto que a partir da década de 80 muitos aspectos foram se desenvolvendo, focando as ações em sala de aula, no que se destacaram, entre outros, Onuchic (1999), Schroeder & Lester (1989). Estes últimos autores apontam três concepções diferentes na abordagem de Resolução de Problemas:

- (1) ensinar sobre resolução de problemas matemáticos;
- (2) ensinar para resolver problemas de matemática;
- (3) ensinar matemática através de resolução de problemas.

Expomos ainda o modelo de Polya (2006) para Resolução de Problemas, dividido nas seguintes etapas, em ordem: a compreensão do enunciado de um problema, a execução de um plano de resolução e a análise da solução encontrada. Estas etapas foram elaboradas de forma a fazer com que os alunos possam identificar partes importantes dos problemas a serem resolvidos e, além disso, possam seguir uma sequência lógica a ser executada. Ainda neste capítulo, trazemos alguns resultados da leitura de Fischbein (1993), destacando as três categorias de conhecimento por ele elaboradas: o formal, o algoritmo e o intuitivo.

No capítulo 3, expomos a metodologia e os procedimentos metodológicos, como ferramenta fundamental para desenvolver a pesquisa. Ainda neste capítulo, discorremos sobre metodologia de pesquisa, abordando a pesquisa qualitativa, itens necessários para a nossa tese. Em relação aos procedimentos metodológicos, caracterizamos os sujeitos de nossa pesquisa: após a análise de situações que beneficiariam nossa proposta, preferimos trabalhar com alunos que ainda não haviam estudado o conceito de Integral de função de uma variável. Pois, acreditamos que os resultados obtidos com a aplicação do instrumento de coleta de dados apontariam condições para analisar se houve aprendizagem ou não do conceito de Integral. Para a coleta nos inspiramos na literatura de Bogdan e Biklen (1994) e Creswell (2010), levando-se em conta a observação dos comportamentos dos sujeitos da pesquisa, a coleta de documentos e a utilização de recursos audiovisuais.

E, finalmente, no capítulo 4, apontamos os resultados alcançados. De modo geral, os resultados foram satisfatórios, pois a maioria dos alunos conseguiu superar os obstáculos que apresentavam nas dificuldades da aprendizagem do conceito de Integral, enfatizando alguns aspectos interessantes nas respostas obtidas. Entretanto, observamos por meio dos protocolos que os aspectos de Fischbein estavam presentes em suas soluções.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 – Problemática

O interesse por questões relativas ao ensino e à aprendizagem de Integral surgiu a partir da nossa experiência de mais de quinze anos trabalhando como docente da disciplina Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará – UEPA, ocasião em que observamos as dificuldades que os graduandos demonstram na aprendizagem desse conceito e na sua aplicação na resolução de problemas voltados a diversas áreas, como a própria matemática, a física, a biologia, a estatística, a economia, entre outras.

A partir daí, passamos então a nos questionar: será que tais dificuldades são decorrentes da utilização de uma ação metodológica apropriada ao ensino dos conceitos estudados no Cálculo em geral e, em particular, da Integral? Ou por que os alunos de Licenciatura em Matemática da UEPA não dão indícios de apelarem à intuição e de recorrerem ao rigor no estudo de ideias que fazem parte da construção desse conceito? Ou, ainda, será que a ausência de conhecimentos básicos e essenciais para a aprendizagem da integral é que causa essas dificuldades?

No ano de 2011, em algumas ocasiões, houve a oportunidade de participar das reuniões do grupo de pesquisa “O elementar e o superior em Matemática” da PUC-SP, do qual o nosso orientador Benedito Antonio da Silva é integrante e vem trabalhando no projeto “Componentes do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo: saber, aluno e professor”. Os participantes vêm desenvolvendo seus projetos de pesquisa, focalizando as temáticas principalmente em quatro vertentes que envolvem o ensino e aprendizagem de Cálculo, a saber: o aluno ingressante nos cursos de exatas, o professor da universidade, o professor da educação básica e as dificuldades inerentes aos próprios conteúdos a serem estudados. Aí tivemos ocasião, ainda que por relativamente curtos momentos, de vivenciar essa temática na prática, o que nos incentivou ainda mais a continuar a busca de respostas às nossas indagações.

A partir daí, debruçamo-nos sobre trabalhos que tratam desta problemática. A leitura e as reflexões a respeito dos resultados alcançados relativos ao ensino e à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral contribuíram consideravelmente para destacar elementos que pudessem subsidiar a nossa pesquisa. Elencamos, a seguir, alguns desses elementos, aliados a aspectos metodológicos.

Guimarães (2002), em seu artigo, ressaltou que a ação metodológica usada no ensino de Cálculo tem predominantemente um enfoque algébrico: o aluno executa exercícios sobre limites, derivadas e integrais, na maioria das vezes, semelhantes, baseados em palavras-chaves, tais como: calcule, determine, obtenha, resolva, derive, integre. Esta ação que estimula a aprendizagem pela repetição de procedimentos leva o aluno a considerar que “domina a matéria” ao fazer e refazer longas sequências de cálculos e que é “incompetente” quando simplesmente erra uma operação algébrica. Isto mostra que o ensino de Cálculo, sob a forma dita “clássica”, segue uma estrutura puramente algébrica com poucas aplicações dos conceitos matemáticos ao cotidiano ou à realidade profissional do aluno.

Vaz (2010) estudou o tratamento dado aos conceitos de limite, derivada e integral de uma função real por autores de livros didáticos e também na perspectiva de professores de Cálculo de cursos de Engenharia. Os resultados

alcançados dão conta que os livros didáticos estudados dão ênfase aos conceitos de Cálculo, utilizando as abordagens numéricas, algébricas e gráficas, de modo que os professores que ministram Cálculo trabalham com os conceitos usando as abordagens dos livros-textos, mas com a tendência a procedimentos algébricos; e, além disso, os professores de disciplinas específicas de Engenharia adotam uma abordagem qualitativa dos conceitos tecnológicos advindos de uma maior interpretação dos conceitos matemáticos, implícitos nos modelos, em sua forma algébrica.

Vidigal (2007) elegeu para sujeitos de sua pesquisa alunos que já haviam estudado Integral, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisadora buscou investigar quais eram os conhecimentos mobilizados por esses estudantes, decorridos alguns semestres letivos do estudo regular da disciplina. O estudo não evidenciou a crença de alguns profissionais que afirmam que, o que fica para os alunos no final do estudo do conceito de integral, são somente as regras e técnicas operacionais. Na verdade, o que a autora percebeu foi o contrário disso: as técnicas foram fonte de dificuldades para um pequeno grupo de estudantes pesquisados. Observou, também, que para a maioria dos alunos foi muito mais fácil relacionarem integral com área do que com a manipulação de técnicas no processo do cálculo de integração.

Rezende (2003) destacou que a situação de desconforto em relação ao ensino de Cálculo não é regional e, sim, geral no país e que isso tem provocado por parte das Instituições de Ensino Superior do Brasil discussões a respeito do “fracasso do ensino de Cálculo”. Segundo o autor, engana-se quem pensa que tal problema é cultural e que se justifica pela condição socioeconômica da sociedade brasileira; afirma que, afinal, a situação do ensino de Cálculo nos países ditos desenvolvidos não é muito diferente, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e obtido merecido destaque por parte da literatura especializada internacional. David Tall¹, por exemplo, tem sido um dos principais articuladores da área de pesquisa “pensamento matemático avançado”, cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos conceitos básicos

¹ Professor da Universidade de Londres e pesquisador em Educação Matemática, com vários artigos e livro publicado sobre o tema citado.

do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas.

Apresentamos o exemplo de Salleh e Zakaria (2012) que discutiram os efeitos do uso de duas diferentes abordagens de aprendizagem para a compreensão dos conceitos do Cálculo, por meio de uma pesquisa desenvolvida com dois grupos de alunos: um experimental, constituído por alunos que utilizaram o *software Maple* nas aulas de Cálculo; o outro chamado grupo de controle, formado por alunos que não usaram o software. De modo geral, os estudantes que usaram o *software Maple* conseguiram um melhor desempenho em Cálculo tanto no aspecto conceitual quanto no processual.

Além de elementos mais específicos a conteúdos matemáticos estudados na disciplina de Cálculo, buscamos também alguns outros direcionados a procedimentos metodológicos que possam promover ações que estimulem a autonomia e a iniciativa dos estudantes. Polya (2006) preconizou que na experiência em sala de aula deve-se buscar o equilíbrio no processo de independência dos alunos:

Se o aluno for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho. Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista. O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante. (Polya, 2006, p.1).

Motivados pelo conteúdo de tal citação, procuramos subsídios no que se refere a competências e habilidades² nas recomendações contidas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Destacamos quatro delas:

² O MEC em seu documento de nº CNE/CES 1.302/2001, que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, não estabelece explicitamente distinção entre os termos competências e habilidades.

- Capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas;
- Habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
- Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
- Perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente.

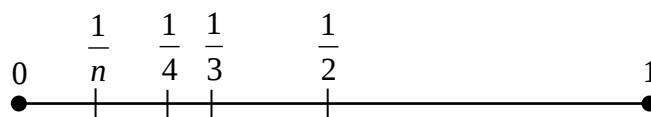
As duas primeiras dizem respeito ao estudante, enquanto as outras duas dizem respeito à prática pedagógica do professor. Estamos conscientes que raramente se veem esses quatro itens mobilizados em uma atividade de sala de aula, pois isso exige do professor, além do sólido conhecimento dos conteúdos estudados, a competência de agir rapidamente em situações de imprevisto, de propor e de gerenciar situações que favoreçam o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem.

Ainda na busca de elementos que pudessem contribuir para a delimitação da questão de nossa pesquisa, buscamos subsídios em trabalhos de Fishbein (1993) relativos à questão da intuição. Esse autor enfatiza a Matemática como uma atividade inventada por seres humanos por meio de um processo criativo que envolve a hesitação, a aceitação e, ao mesmo tempo, uma repulsa desses processos quando surgem dificuldades. A partir do pensamento intuitivo, tendemos a procurar outras argumentações para se chegar a respostas concretas, considerando que a Matemática é um processo de ações, reações, análises, elaborações e, finalmente, afirmações matemáticas teóricas e concretas.

Sendo Fischbein (1993) psicólogo e fundador do grupo de Pesquisa Internacional de Psicologia Matemática, a sua pesquisa formulou os principais conceitos sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, sob a influência piagetiana, de modo a poder relacionar os fenômenos matemáticos com os

fenômenos da natureza cognitiva, ou seja, o raciocínio intuitivo é uma ponte para o raciocínio numérico na Resolução de Problemas matemáticos, induzindo-se daí um raciocínio lógico-matemático. Tendo em vista que toda a aprendizagem é gerada por um processo intelectual ativo.

A partir desse pensamento, Fischbein (1993) organizou uma teoria ao analisar comportamento matemático de alunos, segundo a qual há três aspectos básicos que devem ser considerados na atividade matemática: o formal, o algoritmo e o intuitivo. Um exemplo que podemos citar são os limites de sequências. Podemos até “convencer” os alunos, por exemplo, de que a sequência: $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots$ tem 0 como limite, quando n aumenta indefinidamente, mesmo que para isso apelemos para o auxílio de procedimentos geométricos, do tipo:



Tal procedimento quase certamente trará à cena o aspecto intuitivo, mas não o aspecto formal, nem o algoritmo.

De posse da soma dos elementos que buscamos com o objetivo de subsidiar nossa investigação aliados à estratégia de se ensinar Matemática por meio de Resolução de Problemas – sobre a qual discorreremos mais adiante –, propomos a hipótese de que a introdução do conceito de Integral, por meio da Resolução de Problemas, para alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado Pará, poderá desvelar aspectos sobre noções que se situam em torno desse conceito.

A partir dessas constatações, explicitamos os objetivos da pesquisa:

- Investigar o desempenho estratégico dos licenciandos em matemática quando submetidos à Resolução de Problemas por meio de uma sequência de ensino que visa o processo de introdução ao conceito de Integral.

- Identificar nessas estratégias escritas a manipulação individual e/ou simultânea dos aspectos básicos das atividades matemáticas, segundo Fischbein, quais sejam: a intuição, o algoritmo e o formal.

Na procura por responder a questão acima e por estabelecer os procedimentos de cunho metodológicos, realizamos uma revisão de literatura, cujos resultados são apresentados na próxima seção.

1.2 – Revisão de Literatura

A fim de buscarmos mais indicações para atingir os objetivos propostos, realizamos uma incursão nos trabalhos (Teses, Dissertações e Artigos) desenvolvidos e publicados sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Dedicamos esta seção a apontamentos sobre resultados dessas pesquisas, de forma a analisar até que ponto o trabalho que estamos nos propondo a desenvolver tem relevância e apresenta aspectos pertinentes e diferenciados dos que já foram realizados.

Dividimos a seção em dois eixos temáticos: o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral; e a utilização da estratégia de Resolução de Problemas no ensino dessa disciplina.

I – O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

A pesquisa realizada por Reis (2001) teve por objetivo compreender como a relação tensional entre o rigor e a intuição se manifesta no ensino universitário de Cálculo e Análise. Esse estudo foi realizado mediante a análise de manuais didáticos e de entrevistas semiestruturadas com quatro professores e autores de livros didáticos das áreas do Cálculo e Análise, a saber: Roberto Ribeiro Baldino, Geraldo Severo de Souza Ávila, Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima.

Reis constatou que a relação tensional entre rigor e intuição é sempre desigual e dicotômica nos manuais didáticos e que o conjunto de posições defendidas pelos entrevistados mostrou que esses dois componentes caminham

juntos, no ensino de qualquer conceito matemático e ambas têm papéis igualmente importantes e complementares na formação do pensamento/conhecimento matemático, tanto de um professor de matemática quanto de um matemático. Portanto, cabe aos professores de matemática a avaliação de qual nível de rigor e de intuição é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o sentido e a real compreensão das ideias matemáticas.

Outro aspecto enfatizado em pesquisas refere-se à análise da utilização da ferramenta computacional no ensino do Cálculo nas universidades brasileiras. Machado (2008) dedicou um estudo voltado ao assunto e, para entender a evolução de tal utilização, o autor pesquisou trabalhos realizados em países como a Grã-Bretanha, Estados Unidos, Alemanha, México, Espanha, Colômbia e Venezuela, verificando que neles havia estudos bastante avançados, inclusive referentes a avaliações sobre o uso de tecnologias, como calculadoras gráficas e numéricas, vídeos e *softwares*, em cursos de graduação.

Machado (2008) focou seus objetivos na análise da contribuição de um aplicativo educacional no ensino Cálculo. Destacou, em seu trabalho, a necessidade, a importância e os resultados da utilização dessa ferramenta, que vai além da manipulação de lápis e papel. Procurou analisar por meio de tarefas realizadas o conhecimento matemático adquirido a partir da visualização e da representação visuais descritas pelos estudantes, chegando à seguinte questão de investigação: qual é a contribuição da visualização das representações gráficas produzidas pela ferramenta computacional Mathematic Plotting Package-MPP no aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral para estudantes ingressantes no curso de Química?

Como resultado, a referida autora enfatizou que essa ferramenta é eficaz para o ensino de Cálculo, pois possibilitou a solução e a visualização gráfica e numérica dos problemas trabalhados de forma rápida e prática. Além disso, observou que os estudantes ficaram motivados e participativos na procura de novos conhecimentos para conseguirem resolver problemas propostos pelos professores.

Ramos (2009), em seu artigo, apresentou uma experiência sobre a utilização de procedimentos midiáticos que promovessem a aprendizagem no curso de Cálculo Diferencial e Integral, enfatizando a preocupação em apresentar, sempre que possível, os conteúdos contextualizados e de acordo com a realidade de seus alunos. Destacou que a utilização de *softwares* gráficos proporciona uma maior percepção visual, bem como o desenvolvimento da capacidade de análise e de formalização por parte do aluno, na sua relação com a Matemática.

A pesquisa de Escher (2011) fez referência a dois aspectos geralmente considerados separadamente na academia: as relações históricas, neste caso, referentes à gênese dos conceitos e ao ensino e aprendizagem do Cálculo e a implementação da tecnologia no contexto educacional. O autor justifica a escolha desta disciplina por ela fazer parte de vários cursos acadêmicos. A pesquisa focou suas discussões na prática do professor de matemática e de suas ações no âmbito acadêmico; utilizou alguns dados históricos para situar o cenário professor/disciplina/prática, mostrando alguns indícios do surgimento de conceitos matemáticos tratados no campo de estudo que se intitula Cálculo Diferencial e Integral e também sua integração com o ensino.

O objetivo da pesquisa de Escher (2011) consistia em investigar as dimensões teórico-metodológicas presentes nas inter-relações do Cálculo e as Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC). Focou a sua pesquisa na discussão de tais dimensões presentes nas inter-relações do Cálculo Diferencial e as Tecnologias Informacionais e Comunicacionais, no contexto do ensino e da aprendizagem de matemática. O autor concluiu que as TIC adquirem uma característica forte o bastante para alterar todas as dimensões – linguagem, formalista, sociocultural, metodológica ou epistemológica –; assumindo, logo, seu caráter epistêmico, justificando assim sua característica revolucionária, estando presente nas salas de aulas e assumindo uma importante dimensão.

Outra pesquisa que consideramos relevante foi a realizada por Lima (2012), que analisou o desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral do curso de graduação em matemática da Universidade de São Paulo, desde 1934, ano em que tal Instituição foi fundada e nela foi implantado o primeiro curso superior de matemática do país, até 1994, momento em que a

disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura passou a ser oficialmente diferente daquela oferecida no Bacharelado. Para essa análise, usou a metodologia da História Oral Temática. Concluiu que o processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise para outra efetivamente de Cálculo – visto com frequência como uma pré-Análise – foi lento, gradual e repleto de idas e vindas.

Constatou, também, que os professores não concebiam a existência de diferentes níveis de rigor e, portanto, não consideravam necessário adequá-lo ao público-alvo da disciplina que estava sendo ministrada. Mas com o decorrer do tempo passou-se a defender a adequação da forma como os conceitos eram apresentados, levando em conta a maturidade matemática dos estudantes, o curso no qual a disciplina estava inserida e o perfil do profissional que se desejava formar. Além disso, verificou que a distinção entre a disciplina de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado também se deu por razões didáticas: buscou-se oferecer aos licenciados um primeiro curso que lhes possibilitassem rever, com uma abordagem que fosse mais adequada aos objetivos do ensino superior, conceitos já trabalhados na Educação Básica e que usualmente não dominam ao ingressar na universidade, e, ao mesmo tempo, introduzir os conteúdos específicos do Cálculo de forma mais apropriada ao futuro professor de matemática.

Já Imafuku (2008) e Marques (2009) realizaram estudos com foco em questões relativas ao ensino e à aprendizagem de funções de duas variáveis. A pesquisa do primeiro objetivou a investigação das dificuldades e dos saberes manifestados por estudantes por ocasião da transição do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e o gráfico de função, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também, quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. A análise dos dados fundamentou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que permitiu observar algumas dificuldades: a maioria dos alunos pesquisados não compreende o sistema tridimensional, ou seja, a representação gráfica do $\mathbb{R}^3$; não classifica uma função de acordo com o

número de variáveis independentes; os estudantes apresentam grandes dificuldades na conversão do registro da língua natural para o algébrico e na determinação do domínio das funções de duas variáveis.

O objetivo do estudo de Marques (2009) foi mostrar como estudantes de um curso de Engenharia manipulam o livro didático no estudo de derivadas parciais. Para isso, elaborou um instrumento de coleta de dados com questões também fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval; o questionário foi aplicado a alunos em estágios distintos do curso de engenharia mecânica de uma universidade particular da cidade de São Paulo. A pesquisa revelou que os estudantes priorizaram o registro algébrico em suas resoluções das questões e que somente esta representação é considerada como resposta válida e que as outras são apenas “auxiliares”. Outra revelação foi a dificuldade que os alunos demonstraram quando as funções de duas variáveis são expressas no registro da língua natural.

Lira (2008), em sua tese, fez um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de limite, realizando também uma reflexão sobre os critérios cognitivos que envolvem a resolução de um problema sobre esse conteúdo. Realizou um minucioso levantamento da trajetória histórica desse conceito matemático para que pudesse entender a importância do apoio de objetos digitais interativos em seu estudo. Destaca que os objetos digitais interativos podem ser gerenciados como objetos de aprendizagem, contribuindo para a melhoria das práticas de ensino por meio de um recurso digital, como, por exemplo: imagens, fotografias, vídeos, textos, publicações via *web*. Como referencial teórico para a análise epistemológica do conceito, Lira baseou-se na Epistemologia Genética de Jean Piaget, especificamente no que se refere às relações e operações infralógicas, lógicas e ao pensamento formal.

A principal questão, objeto de pesquisa neste estudo, foi: *que objetos digitais e como utilizá-los para investigar o desenvolvimento de mecanismos cognitivos presentes no processo de construção do conceito matemático de limite (de uma função com domínio e imagem no conjunto dos reais) em aprendizes?*

O autor concluiu sua tese afirmando que os mecanismos cognitivos do conceito de limite podem ser evidenciados pelo uso de objetos digitais interativos. Entretanto, para que tal evidência seja possível é necessária uma teoria epistemológica que possibilite este processo de investigação. Defende que essa teoria é a Epistemologia Genética de Jean Piaget, que modela o pensamento humano utilizando estruturas matemáticas do tipo conjuntos, agrupamentos, grupos e redes, já que quando o sujeito também é capaz de fazer composições entre operações (que comportam a reversibilidade) que mostra se ele construiu o pensamento formal. O autor enfatizou que o conceito de limite coordena operações de natureza espacial (topológicas) e lógica (relações lógicas envolvidas no conceito de número inteiro e real). Concluiu, ainda, que o conceito de limite engloba muito mais que a definição. Ele envolve mecanismos cognitivos, os quais exercitamos desde criança, tais como ordenar, seriar, encaixar, separar, recompor e realizar envolvimento.

Sobre o conceito de derivada, destacamos a pesquisa de Dall’Anese (2006) que teve como objetivo identificar e analisar argumentos e metáforas conceituais utilizadas por um grupo de alunos de pós-graduação em Educação Matemática em relação à taxa de variação, ao se estudar derivada de função de uma variável real. O pesquisador criou um cenário de aprendizagem em que privilegiou o diálogo entre professor, alunos e tecnologia. Para estabelecer esse diálogo, foram criadas tarefas em que os alunos interagiram com o computador, como, por exemplo, a reta secante a uma curva “virava” reta tangente por sucessivas aproximações ou quando a reta tangente à curva num ponto ao se mover, ao mesmo tempo os valores dos coeficientes angulares das retas, em cada instante, podiam ser vistos na tela do computador; em outros momentos, usavam uma canaleta feita de PVC, bola de tênis, bola de pingue-pongue, cronômetro e trena para calcular a velocidade média e a velocidade instantânea de um objeto em movimento. O autor se propôs a investigar, a partir dos argumentos dos alunos, quais metáforas podem ser levantadas e qual o papel das mesmas na compreensão da taxa de variação; além disso, procurar identificar os argumentos dos alunos relativos aos aspectos visuais – algébricos e estáticos – e dinâmicos nas atividades mediadas pelo uso do computador.

Após o desenvolvimento das tarefas e a análise dos resultados, o autor pôde concluir que, para os sujeitos, o processo de compreender a taxa média e a taxa instantânea de variação não é o caso apenas da passagem de uma fórmula analítica a outra ou de um gráfico para uma fórmula. Salienta que existe uma diferença entre os mecanismos cognitivos para compreender o gráfico e a fórmula analítica, diferença esta que acentua as dificuldades dos procedimentos de aprendizagem dos alunos.

Concluiu, também, que com o auxílio da tecnologia da informática foi possível criar um ambiente em que o movimento fictício, intrínseco da linguagem, se transformou em um movimento factivo. Isto é, quando retas secantes “coincidem” com a reta tangente por sucessivas aproximações e quando a reta tangente à curva num ponto podia se mover, ao mesmo tempo que os valores dos coeficientes angulares dessas retas podiam ser vistos na tela.

Apresentamos na sequência comentários sobre algumas pesquisas realizadas especificamente sobre o ensino e a aprendizagem da Integral.

Em seu trabalho, Melo (2002) pesquisou se os alunos são capazes de construir o conceito de Integral, por meio de atividades que levem em conta a sua gênese, com a utilização um software matemático. Desenvolveu atividades com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, com o auxílio do computador, por meio do *software Maple*. Constatou, ao comparar as respostas escritas dadas pelos alunos com os comentários orais, que eles apresentam grandes dificuldades em expressar seus argumentos por escrito, utilizando a linguagem matemática.

Além disso, o autor salientou outras dificuldades dos alunos envolvidas no processo de aprendizagem de integral, tais como: a identificação de domínio e de imagem de uma função em situações-problema. A maioria dos alunos teve dificuldade de relacionar a definição de integral a um limite, além de não associar um número obtido por procedimentos algébricos à área de uma região plana.

Já em seu trabalho, Oliveira (2004) teve como objetivo mostrar como o conceito de Integral é abordado em dois livros didáticos, apontando em que

medida a abordagem de cada um deles é “mais” operacional ou “mais” estrutural, segundo a classificação de Sfard.

No livro de Spivak, a Integral é definida por meio de uma construção bastante refinada que usa definições e teoremas e é guiada pela noção de área.

Os teoremas fundamentais de Cálculo são demonstrados com todo rigor e algumas aplicações são dadas, por exemplo, no cálculo de áreas. A transição entre as concepções é da estrutural para a operacional³.

No livro de Stewart, o autor definiu integral como limite de soma de Riemann. Antes, porém, fez uma longa introdução calculando a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ inserindo retângulos “acima e abaixo” dela, calculando a área de cada um e somando-as. Definiu área da região limitada pelo gráfico de uma função contínua como o limite dessa soma, quando o número de retângulos tende ao infinito. Também, resolveu o problema da distância percorrida por um carro, tratando a questão como a do cálculo de área. A transição entre as concepções é da operacional para a estrutural.

A tese defendida por Henriques (2006) teve como objetivo compreender as dificuldades encontradas pelos alunos, com o cálculo de áreas e de volumes por Integrais Múltiplas, bem como estudar em que medida a utilização de um *Software* de Cálculos Avançados como o *Maple* pôde *ajudar a superar essas dificuldades, favorecendo as interações entre Representação Gráfica e Representação Analítica* de sólidos nos problemas de cálculo de volumes por meio de integrais múltiplas, utilizando-se do software Maple.

O estudo foi realizado com estudantes universitários do Brasil e das classes preparatórias tecnológicas da França, apoiou-se na teoria de Instrumentação, proposta por Rabardel (1995), na Teoria Antropológica do

³ A teoria de Sfard, segundo a qual as noções matemáticas são tratadas inicialmente como processo, em que são evidenciadas as suas características (concepção operacional) e depois como objetos (concepção estrutural). A passagem da primeira para a segunda se dá por meio de três estágios hierarquizados: interiorização, condensação e reificação.

Didático, proposto de Chevallard (1991), e nos Registros e Representações Semióticas, proposto por Duval (1993).

O autor concluiu que o *Software* “permite um trabalho específico em que a interação entre o usuário e a máquina faz aparecer elementos de articulação entre o gráfico e o analítico”.

A pesquisa de Dietrich (2009) teve como foco a análise das possibilidades de aquisição dos conceitos básicos de integral definida, por meio da metodologia da Engenharia Didática, sob a ótica da teoria da imagem do conceito e da definição do conceito, proposta por Tall e Vinner (1981). O pesquisador realizou a análise de alguns cadernos de alunos, que tinham cursado a disciplina de Cálculo II. Observou que a sequência de ensino foi sempre a mesma, ou seja, os professores partiam do estudo da antiderivada e apresentavam o Teorema Fundamental do Cálculo e, após isso, apresentavam uma lista de exercícios para a fixação dos conteúdos. Assim, o conceito de Integral era apresentado como o inverso da derivada e, após os alunos estarem familiarizados com os cálculos de integrais, era apresentada a definição como soma de Riemann, em um processo contrário ao surgimento histórico da Integral.

A conclusão que obteve em seu trabalho foi a de que o desenvolvimento de uma sequência didática, baseada na metodologia da Engenharia Didática, mostrou-se eficaz no entendimento do conceito de integral e de suas propriedades. Os alunos, em sua maioria, mostraram-se motivados e participantes durante todo o trabalho. A metodologia proposta propiciou um ambiente rico de discussões entre as duplas e entre todos os estudantes da classe, no momento da formalização do conteúdo em questão. O diferencial é que o conceito não foi exposto pelo professor, mas foi construído pelos alunos, passo a passo, por meio da resolução de situações-problema, em cada sessão. Neste sentido, os pressupostos de imagem do conceito e de definição do conceito de Tall e Vinner (1981) deram sustentação ao processo de construção do conceito de integral.

Andersen (2011), em sua dissertação, teve como objetivo investigar quais os processos do pensamento matemático que podem intervir e ser

combinados por alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Além disso, verificar se o tipo de atividades propostas

favorece a compreensão das ideias centrais envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa fundamentou-se nos Processos de Pensamento Matemático Avançado de Tommy Dreyfus, que privilegia o ensino por descoberta, por tentativa e erro. O resultado alcançado foi o surgimento de certa facilidade dos alunos quanto à visualização, representação e mudança entre diferentes representações, à síntese, à análise e à generalização. Além disso, foi observado que a maioria das duplas conseguiu conjecturar que a Derivada é a inversa da Integral. No entanto, nenhum dos alunos observou a necessidade de que a função f envolvida no Teorema Fundamental do Cálculo e que figura na representação acima fosse contínua.

Os estudos referenciados, muitos dos quais versando sobre os benefícios do emprego de softwares como mais um elemento auxiliar no ensino do Cálculo, nos levaram a considerar a possibilidade de recorrermos à utilização de algum tipo de ferramenta da informática em nosso trabalho.

II – A resolução de problema e o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Nesse item, destacaremos quatro pesquisas de autores que utilizaram a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. A primeira, de Sangoi (2010), teve como objetivo encontrar vestígios de aprendizagem significativa no ensino de derivada, suas propriedades e aplicações por meio da resolução de problemas associada ao emprego *software Maple*. O autor afirma acreditar que a resolução de problemas e tal *software* são aliados do professor no ensino e na aprendizagem significativa de conceitos do Cálculo. Buscou elementos na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1989) e concluiu sua pesquisa afirmando que quando ensinamos Cálculo por meio da resolução de problemas, estamos dando aos estudantes, subsídios para desenvolverem a sua compreensão e entendimento das noções que compõem essa disciplina, contribuindo para que o processo de aprendizagem seja significativo graças às

relações: aluno-aluno, aluno-professor, professor-aluno e aluno-computador, pois cada um contribuiu a seu modo para a aprendizagem dos conceitos.

A segunda pesquisa, cujos resultados analisamos, foi a de Pinto (2010), que investigou as contribuições da metodologia de resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem e aplicações de derivada, construção de gráficos de uma função e o da função derivada, em um ambiente virtual de aprendizagem, com alunos do curso de licenciatura em matemática a distância. A conclusão a que chegou é a de que a metodologia de resolução de problemas contribuiu para a criação de um ambiente de aprendizagem propício para o desenvolvimento das atividades, mesmo com as limitações de tempo e distância.

A terceira pesquisa é a de Ribeiro (2010) que definiu seu trabalho a partir de uma situação vivida no Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP/UNESP, em que o autor relata as estratégias utilizadas para a resolução do seguinte problema:

Três um-quarto de círculo e um três-quartos de círculo – todos de raio igual a 10 cm – compõem esta atraente forma de jarro. Qual é sua área?



Para resolver este problema, o grupo passou por uma sequência de ações: a leitura do enunciado, a interpretação, a compreensão do que se pedia, principalmente a busca de uma figura geométrica para entender o que o problema pedia e, então, a busca de uma estratégia para resolvê-lo. Depois que vários passos haviam sido dados, constatou-se que os componentes do grupo procuravam sua solução por meio de diferentes caminhos.

Uma das soluções apresentadas por um dos membros do grupo estava errada, pois, ao ler o enunciado precipitadamente, não soube transportar seus dados para a forma do jarro. Apoiado apenas nos dados numéricos do problema, escreveu:

$$3 \times \frac{1}{4} \text{ decírculo} + 1 \times \frac{3}{4} \text{ decírculo} = 6 \times \frac{1}{4} \text{ decírculo} = \frac{3}{2} \text{ decírculo}$$

E, empregando expressão πr^2 para o cálculo da área do círculo, com $r = 10$ cm, obteve, como resposta, 150π cm² e fazendo $\pi \approx 3,14$, concluiu que a área do jarro mediria *aproximadamente* 471 cm². Mas foi percebido pelo grupo que isso não parecia muito coerente com a figura desenhada. A partir deste momento a coordenadora do grupo, com intuito de provocar os participantes acerca de outras possíveis soluções, perguntou: de que outras maneiras se poderiam calcular a área dessa figura?

Prontamente, responderam que seria por meio de integrais. Foi sugerido que se poderia utilizar integrais simples ou duplas. A coordenadora pediu, então, que os participantes levassem o problema para casa para ser trabalhado por cada membro e para que as resoluções fossem discutidas na última reunião do GTERP, daquele ano. Para essa reunião, foram levadas quatro resoluções possíveis para o problema, trabalhadas com integrais duplas, uma resolução geométrica generalizando a resolução e, também, um trabalho com dobraduras elaboradas para facilitar a visualização dos trabalhos feitos. Em outras palavras, esse problema chamou muito a atenção dos componentes do Grupo. Ele os desafiou. O que aí aconteceu colaborou para a definição da pesquisa do autor, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas em um trabalho envolvendo o tema Integrais.

O seu trabalho foi desenvolvido em três eixos: história da Integral como parte da História da Matemática, de sua origem até sua formalização por Riemann; resolução de problemas; sala de aula na Engenharia. Tais eixos foram organizados para responder a seguinte questão: como se pode construir um projeto de ensino-aprendizagem destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, em um ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos da história da matemática e com os alunos, em grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, sendo coconstrutores de um conhecimento autogerado?

Em sua conclusão, o autor observou que ficou evidente no trabalho de sala de aula a grande responsabilidade do professor ao se trabalhar com Cálculo Diferencial e Integral direcionado a futuros engenheiros, despertando-lhes o interesse por investigação e pesquisa e deixando-os atentos à necessidade dessa Matemática em sua vida profissional, caso eles pretendam ser engenheiros criativos. Assim, se quiserem ser engenheiros que trabalham apenas como tecnólogos, bastam as fórmulas. Entretanto, se quisermos formar engenheiros criativos e não apenas seguidores dos projetos de outros, é preciso que o Cálculo Diferencial e Integral seja bem entendido e suas ideias possam ser transferidas a outras situações encontradas em seu trabalho.

Essas evidências todas que se pôde constatar, ao longo da implementação do projeto, nas plenárias de participação e de discussão, nos trabalhos entregues pelos alunos e nos momentos em que fora da sala de aula alguns alunos procuraram continuar discussões de sala de aula, podem atestar que:

- A História da Matemática foi importante, uma vez que por meio dela os alunos puderam adquirir o conhecimento de como as ideias surgiram, evoluíram e de como fazer a transposição deste conhecimento para as atividades em sala de aula, olhando os obstáculos e os caminhos encontrados durante a evolução do conceito da integral.
- A Resolução de Problemas mostrou-se um caminho eficiente para o trabalho em sala de aula, tanto para o professor quanto para os alunos, na busca pela solução de um problema, por investigar e na consequente compreensão dos conceitos, agora formulados pelo próprio aluno. Esta metodologia de trabalho permitiu muitas vezes ao aluno colocar-se no lugar dos desbravadores de novos conceitos de Matemática e do Cálculo. Permitiu que vivenciasse a tensão e o prazer na busca pela resposta certa de um problema, o que contribui para o fortalecimento da autoestima.

A quarta pesquisa é a de Abdelmalack (2011) que teve como objetivo averiguar como se dá a aprendizagem de derivadas quando se utiliza a metodologia ensino-aprendizagem-avaliação da matemática, por meio de Resolução de Problemas.

Em sua pesquisa, foram propostos problemas geradores de vários conteúdos relacionados ao conceito de derivada. Nesse contexto, o ensino e a aprendizagem ocorreram simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores desse conhecimento. Os alunos mostraram-se questionadores, com iniciativas próprias na formulação de hipóteses, na interpretação de dados, na busca por estratégias para a resolução de problemas, mais participativos e independentes do professor. Com isso, conseguiram aprender os conteúdos de forma significativa, estabelecendo relações entre diversos aspectos importantes para esse estudo.

Os trabalhos analisados contribuíram para a delimitação do tema e o estabelecimento da questão de nossa pesquisa, bem como para o fornecimento de elementos que direcionem a escolha dos embasamentos teórico-metodológicos.

A pesquisa de Reis nos remeteu a uma procura de trabalhos de Fischbein, principalmente os relacionados com a interação entre o formal, o algorítmico e a componente intuitiva, em matemática.

Por outro lado, os trabalhos que se referem à introdução do conceito de integral, aliados àqueles em que foi utilizada a estratégia de resolução de problemas nos indicaram possibilidades de encaminhamentos de nosso trabalho.

Esses elementos permitiram que pudéssemos formular a questão de nossa pesquisa:

Como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para alunos de Licenciatura em Matemática, utilizando-se a metodologia da Resolução de Problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein?

Nesse sentido, estamos interessados em investigar como os futuros professores de Matemática combinam os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos em seu contato inicial com as noções envolvidas no conceito de Integral, utilizando-se da estratégia de Resolução de Problemas.

Por outro lado, vários trabalhos da revisão de literatura, como, por exemplo, as de Melo (2002), Machado (2008), Ramos (2009) e Escher (2011) utilizaram um *software* matemático em suas pesquisas, indicando que esse recurso poderia ajudar os alunos a construir conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Motivados pelas constatações das vantagens da utilização de ferramentas computacionais feitas pelos autores, optamos em trabalhar em nossa pesquisa com o *software GeoGebra*, ferramenta auxiliar no desenvolvimento de uma sequência de ensino.

Nos próximos capítulos passaremos a descrever a fundamentação teórica e a metodologia da pesquisa.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O trabalho está embasado em princípios teóricos relativos ao ensino, à aprendizagem da matemática por meio da Resolução de Problemas e às três categorias presentes nas atividades matemáticas, a saber: o formal, o algoritmo e o intuitivo, segundo Fischbein (1993). A seguir apresentamos considerações sobre essas duas vertentes. Iniciamos com a exposição de algumas concepções sobre o significado de *problema* para depois levantar alguns elementos sobre a teoria de Fischbein, para dar suporte à nossa investigação.

2.1 – O que é um problema?

São variadas as concepções de *problema*, algumas são convergentes e outras apresentam ligeiras distinções, segundo o ponto de vista de diferentes pesquisadores.

Para Onuchic (1999, p. 215), problema refere-se “a tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. No entanto, segundo D’Ambrósio, o que se percebe é que é muito comum no momento do desenvolvimento de uma atividade surgirem manifestações reiterando que “problema é uma situação, real ou abstrata, ainda não resolvida, em qualquer campo do conhecimento e de ação”. (D’AMBRÓSIO, 2008, p. 2).

De acordo com Van de Walle, um problema é “qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou

memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta” (VAN de WALLE, 2001, p. 42).

Nos PCN, pode-se ler que “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la” (BRASIL, 1998, p. 41).

Todas essas concepções de problema têm algumas características em comum. O aluno precisa ter interesse, precisa estar seduzido pelo problema, precisa estar motivado para resolvê-lo e precisa promover o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, a fim de exercitar o seu pensar matemático.

2.2 – A Resolução de Problemas

Na primeira metade do XX, a aprendizagem da matemática era caracterizada por um trabalho de repetição, enfatizando-se a memorização como forma de aprender e de resolver problemas matemáticos. Com o passar do tempo, pesquisadores perceberam que as dificuldades em resolver problemas impunham a necessidade de estudos mais direcionados a essa questão. Alguns estavam convencidos que tais dificuldades residiam somente na falta de entendimento dos enunciados por parte dos alunos. Recomendavam, então, que os estudantes deveriam exercitar mais suas potencialidades, estudando previamente conteúdos neles presentes. Atualmente, é sabido que apenas estudar conteúdos e desenvolver habilidades para resolver problemas não representam a solução para se aprender matemática.

Já na segunda metade do século, mais precisamente na década de 1960, o Movimento de Matemática Moderna surge preconizando um ensino de matemática estrutural, com base na teoria dos conjuntos. No final da década seguinte, era patente que esse modelo não estava dando os resultados esperados. Em resposta ao fracasso desse movimento, aquela concepção de resolução de problemas evoluiu para uma percepção mais ampla, segundo a qual se aprende à medida que se compreende. (ONUICHIC E ALLEVATO, 2009, p. 213).

Principalmente nos Estados Unidos, as discussões acerca da Resolução de Problemas começaram a se expandir ficando cada vez mais patente a necessidade de um ajuste aos trabalhos para que se adequassem aos problemas surgidos. Isto é, questões relativas à aprendizagem e ao ensino da matemática exigiam novas tendências para o seu aprimoramento. A partir dos anos 1970, buscavam-se questionamentos a respeito do ensino da matemática, no sentido de se entender até onde as reformas puderam influenciar no sucesso da aprendizagem e resolução de problemas matemáticos. A partir deste período, as investigações começaram a ganhar mais espaço entre educadores matemáticos.

Já nos anos 1980, as pesquisas sobre a Resolução de Problemas avançavam. Os trabalhos em salas de aulas foram mais observados e experimentados a partir de novas estratégias, mas, segundo Schroeder & Lester (1989), devido a tantos pesquisadores interessados em avaliar o bom desempenho dos alunos, começaram a surgir algumas divergências sobre diferentes concepções. Esses autores apresentaram três possíveis indicações para abordagem do tema, de forma a refletir a respeito de tais diferenças: teorizar sobre Resolução de Problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática por meio da Resolução de Problemas. Esses enfoques indicam e encaminham várias combinações para se trabalhar em sala de aula com Resoluções de Problemas.

Apesar de diferentes concepções e análises acerca de Resolução de Problemas, até o final daquela década, ainda não se obtinham resultados julgados eficazes para o assunto. Somente após o final dela, nos Estados Unidos, uma reforma no ensino de matemática foi bem sucedida. Por essa ocasião e durante os anos 1990, o NCTM⁴ – National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática), criado naquele país, publicou três diretrizes para se trabalhar com a resolução de problemas:

⁴ O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos. É a principal organização para professores de Matemática desde K-12 (Pré-primário até a Escola Secundária).

- *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, em 1989, que estabeleceu o envolvimento de professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais ao currículo da matemática; pela proposta todos são capazes de aprender, fazer e resolver problemas;
- *Professional Standards for Teaching Mathematics*, em 1991, que estabeleceu caminhos para que professores pudessem estruturar atividades em sala de aula e;
- *Assessment Standards for School Mathematics*, em 1995, estabelecendo princípios para que professores e educadores pudessem ter apoio para construção de práticas de avaliação em favor de uma matemática acessível para a aprendizagem de todos.

Ressaltamos que esses documentos não se configuravam como uma teoria final, que pudesse, enfim, trabalhar a Resolução de Problemas. Pelo contrário, segundo Onuchic e Allevato (2009, p. 217-218), “esses Standards queriam apresentar objetivos e princípios em defesa das práticas curriculares, de ensino e de avaliação que pudessem ser examinadas”. No entanto, entendemos que este foi um instrumento que abriu caminho para a reflexão acerca do ensino da matemática, utilizando-se da resolução de problemas.

A partir daí, outras propostas foram surgindo. Ainda no ano 2000, foram publicados outros *Standards* caracterizados por alguns pesquisadores como outros passos para novas compreensões matemáticas. Estes estabeleciam fundamentalmente seis princípios, os quais são Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia, enfatizando que estes princípios deveriam estar profundamente ligados aos programas de matemática escolar. Respeitando esses princípios, eram apresentados cinco padrões de conteúdos: Números e Operações, Álgebra, Medida, Análise de Dados e Probabilidade.

Baseados nas ideias dos *Standards*, no Brasil, iniciou-se o processo de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1995) e, a partir de 2001, já se estabeleciam ideias para exploração de Resolução de Problemas, em que várias concepções sobre o ensino de matemática se evidenciavam, mas convergindo quanto a recomendações de criação de situações para fazer com que os alunos pudessem pensar matematicamente. Começavam aí as propostas

no sentido de contextualizar os problemas, de forma que os alunos pudessem entendê-los e partir para uma resolução consciente. Contudo, surgia uma preocupação: a prática docente. Isto é, de que forma os docentes poderiam enfrentar as mudanças já estabelecidas? A questão está em discutir o ensino e a aprendizagem da matemática por meio de uma eficiente Resolução de Problemas.

Nesse sentido, Van de Walle preconiza que os professores devem estar completamente envolvidos numa ideia construtivista de aprendizagem. Recomenda que sejam apresentadas aos alunos atividades possíveis de resolver, ou seja, aprender a resolver problemas matemáticos de maneira prazerosa.

O autor acrescenta, ainda, algumas considerações sobre o ambiente onde se aprende matemática por meio da resolução de problemas. Segundo Walle, o professor é responsável por criar uma atmosfera para o bom funcionamento da aula. O *antes*, o *durante* e o *depois* devem servir de base e como roteiro para o ensino da matemática. O *antes* é o ponto de partida para que o professor possa pensar e elaborar suas propostas de ensino, de forma coesa e segura; o *durante* é a fase em que os alunos poderão manusear os conceitos prévios, relacionando-os às suas realidades, seguindo diretrizes e transformando-as em habilidades para uma aprendizagem lógica e necessária a sua vida; o *depois* seria a construção produtiva de conhecimentos trabalhados na matemática por meio da resolução de problemas.

Segundo Onuchic e Allevato (2009, p. 222), ensinar matemática por meio da Resolução de Problemas está nas recomendações do NTCM e dos PCN, que enfatizam que conceitos e habilidades matemáticas são, também, aprendidos no contexto de experiências da Resolução de Problemas.

2.3 – Diferentes abordagens de Resolução de Problemas

De acordo com Onuchic (1999, p. 206), durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, tais como: listas de estratégias, sugestões de atividades, orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas.

Esse material passou a ajudar os professores a fazerem da Resolução de Problemas o ponto central de seu trabalho. Porém, todo esse desenvolvimento não deu a coerência e a direção necessária a um bom resultado, porque havia pouca concordância na forma pela qual os objetivos da introdução de ensinar matemática por meio de Resolução de Problemas eram encarados. Esse fato gerou uma situação de pouca aceitação dessa estratégia de ensino. Essa falta de aceitação ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”.

Na busca de explicação para a falta de concordância sobre a resolução de problemas, Schroeder & Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar a questão, que ajudam a refletir sobre essas diferenças: (1) ensinar sobre resolução de problemas matemáticos; (2) ensinar para resolver problemas de matemática; e (3) ensinar matemática por meio da resolução de problemas. Os autores ressaltam que, embora na teoria esses três caminhos de trabalhar Resolução de Problemas possam ser separados, na prática eles se superpõem e podem acontecer em várias combinações e sequências.

2.3.1 – Ensinar sobre Resolução de Problemas

Ensinar a partir da Resolução de Problemas significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho muitas heurísticas ou estratégias e, enfim, teorizando sobre o assunto. O professor que pauta o seu ensino na Resolução de Problemas realça o modelo de Polya (2006) ou variações dele, dividido em quatro etapas: compreender o problema, criar um plano, executar o plano e olhar de volta ao problema original no intuito de analisar a validade da solução encontrada.

Na primeira etapa, o aluno precisa compreender o problema e desejar resolvê-lo. Não podem lhe faltar compreensão e interesse. O problema deve ser bem escolhido e bem entendido. O aluno deve identificar as partes importantes, como as incógnitas, os dados e a condicionante. Já o professor não pode dispensar as seguintes indagações, sob pena de não atingir o seu objetivo: Quais são as incógnitas? Quais são os dados? Qual a condicionante? A compreensão

do problema está subdividida em dois estágios: familiarização e aperfeiçoamento da compreensão.

Na segunda etapa, deve haver o estabelecimento de um plano, isto é, traçar um caminho para chegar ao valor da incógnita. Para isso, é preciso se valer de alguns questionamentos, tais como: Quais as operações a serem realizadas? Quais os cálculos? Quais os desenhos que se precisa vislumbrar para chegar à incógnita? A concepção da ideia de um plano pode surgir gradualmente por experiências passadas ou por conhecimentos adquiridos. Procurar pensar em um problema conhecido, que tenha uma incógnita semelhante, é uma boa sugestão. Se as indagações forem bem compreendidas, podem contribuir para uma correta sequência de ideias da resolução desse problema, de modo que haverá um plano para seguir. Se não conseguir, é necessário procurar resolver um problema auxiliar adequado para uma possível correlação. O plano é a base da solução do problema, pois ele propicia uma sequência lógica a ser executada.

Na terceira etapa, ocorre a execução do plano. Para conseguir a ideia de resolução, precisa-se de conhecimentos anteriores, concentração no objetivo e paciência. Executar o plano é colocar em prática a sua sequência de ideias. Verificar tudo para que nada fique obscuro, erradicando o erro. O professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo de sua sequência. O fundamental é que o aluno fique convicto da correção de cada etapa.

Na quarta etapa, há um retrospecto. Se os alunos revisarem a resolução completa para reconsiderar e reexaminar o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas, pois é sempre possível melhorar a compreensão da resolução.

Aos estudantes, sob esse ponto de vista, são ensinadas claramente as etapas que, de acordo com Polya, um esperto resolvidor de problemas as utiliza quando está resolvendo problemas matemáticos; assim, eles são encorajados a tomar conhecimento de seu próprio progresso, por meio dessas fases, enquanto resolve o problema.

O professor, ao ensinar a partir da Resolução de Problemas, deverá sempre fazer comentários a respeito do processo de resolução: etapas do processo, estratégias utilizadas, quais atitudes se deve ter para conseguir resolver os problemas propostos.

2.3.2 – Ensinar para resolver problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), quando o professor ensina *para* resolver problemas, ele se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado. Dá-se importância ao uso do conhecimento adquirido anteriormente em problemas rotineiros e não rotineiros⁵.

Embora a aquisição do conhecimento matemático seja muito importante, a maior finalidade para aprender matemática é a de ser capaz de usá-la. Assim, devem ser dados muitos exemplos de conceitos e de procedimentos aos estudantes e diversas oportunidades para aplicar essas competências na resolução de problema. Além disso, o professor que ensina para resolver problemas está preocupado em fazer com que os estudantes tenham a habilidade de transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento obtido em sala de aula para resolver problemas e transpô-los para outros contextos.

2.3.3 – Ensinar por meio da resolução de problemas

Ensinar matemática por meio de resolução de problemas compreende todo o processo, do começo ao fim, ao longo da resolução do problema dado e não simplesmente um recurso para se resolvê-lo. Portanto, a expressão '*por meio de*' aqui empregada tem o significado de ensinar e, conseqüentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, visto que os alunos diante do problema devem se mostrar como coconstrutores de seus próprios conhecimentos.

⁵ Os problemas são considerados rotineiros quando, no processo de resolução, podem ser encontrados os caminhos de solução, de uma maneira direta, a partir do próprio conteúdo da matéria que se aborda na escola e, neles, se empregam procedimentos que não chegam a ser propriamente algoritmos, nem tampouco chegam a ser procedimentos heurísticos.

Segundo essa abordagem, o objetivo primeiro é apresentar para os alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos. Essa visão é, de certa forma, compartilhada por vários pesquisadores anteriormente mencionados.

Van de Walle, em seu livro *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally*, propõe um trabalho de ensino-aprendizagem de Matemática por meio da resolução de problemas. Ele avalia que esse procedimento deveria ser o foco do currículo de matemática e afirma que o ensino dessa disciplina por meio da Resolução de Problemas deve ser visto como a principal estratégia de ensino. Além disso, chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre no ponto em que estão os alunos, ao contrário da forma tradicional em que o ensino começa no ponto onde estão os professores; ignorando-se, muitas vezes, o que os estudantes trazem consigo para a sala de aula.

Segundo o autor, não há dúvida de que ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas não é tarefa fácil. Diz, ainda, que o professor deve estar bem preparado para trabalhar, usando esse caminho, no sentido que as tarefas devem ser selecionadas e planejadas a cada dia, levando em consideração o conhecimento prévio dos estudantes e as necessidades de atender ao currículo. Assim, apresenta algumas razões que justificam o esforço e dentre elas estão:

- A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias e sobre o "dar sentido";
- A resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards 2000, a saber: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação;
- A resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a autoestima dos estudantes;
- A resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem; e

- Os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam por meio de seu próprio raciocínio.

Sobre o ambiente de uma sala de aula quando se utiliza essa estratégia para ensinar matemática, o autor afirma que:

Ensinar matemática por meio da resolução e problemas não significa simplesmente apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático, motivador e estimulante, no qual a aula deve transcorrer. (van de Walle, 2001, p. 44).

Van de Walle diz que para que isso ocorra é preciso que, ao planejar-se uma aula, esta seja vista como composta por três importantes partes: *antes*, *durante* e *depois*. Cada uma dessas partes carrega uma programação específica e requer ações específicas do professor, que são necessárias para tornar a aula eficiente:

- *Antes*: Neste momento, como parte da aula, o professor deve preparar os estudantes mentalmente para trabalhar sobre o problema e pensar sobre os tipos de ideias que mais os ajudarão. Precisa estar seguro de que os alunos compreenderão a tarefa a ser proposta e que eles compreenderão suas responsabilidades. No fim deste planejamento não deverá haver dúvidas sobre a tarefa ou sobre aquilo que deve ser feito. Os alunos deverão sempre começar a pensar sobre as ideias relevantes e estar prontos para trabalhar.

- *Durante*: Nesta fase, deve-se dar oportunidade aos alunos de trabalharem sem a direção do professor. Este deve dar-lhes a chance de usarem as suas próprias ideias e não simplesmente de seguirem diretrizes, acreditando na sua habilidade. Um segundo ponto é saber ouvir, procurando descobrir como diferentes alunos ou grupos estão pensando, que ideias estão usando e como eles estão abordando o problema.

- *Depois*: O professor aceita as resoluções dos grupos e conduz uma discussão que leva os alunos a justificarem e avaliarem os resultados e os métodos de cada grupo. Depois é de sua total responsabilidade formalizar o que de novo em matemática foi construído, relatando com notação e terminologia corretas tudo o que foi trabalhado.

Por sua vez, Schroeder e Lester ressaltam que o ensino de matemática por meio da resolução de problemas é a abordagem mais coerente com as recomendações do NCTM, no que diz respeito a:

- Habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas;
- O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas;
- O ensino de matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

Já para Onuchic (1999) trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias para realizar o trabalho feito em cada unidade temática. A utilização dessa metodologia poderá beneficiar o aluno na construção do seu próprio conhecimento por meio de situações em que ele seja capaz de criar e de ampliar sua capacidade de resolver problemas. Para tanto, é importante que o professor crie, em sua sala de aula, um ambiente motivador e que instigue o aluno a interpretar tais situações. Enfatiza que:

[...] os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (Onuchic, 1999, p. 207).

Nessa perspectiva, o problema é gerador do processo de ensino-aprendizagem, pois por meio de um problema-desafio pode ocorrer uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.

Ao finalizar esta seção, entendo que há alguns pontos, relativos a esta concepção, que merecem ser destacados. Primeiramente, o fato de que o ensino por meio da resolução de problemas não exclui as demais concepções; constituindo-se, assim, uma abordagem mais completa e abrangente que as demais. Acreditamos, além disso, que favorecendo um trabalho mais autônomo, no qual o conhecimento construído fará mais sentido para o aluno. Ele perceberá, por si só, suas reais condições e dificuldades. Isso aumenta a confiança em suas próprias capacidades e, tanto por parte dos alunos como do professor, possibilita uma avaliação mais efetiva e individualizada e um consequente realinhamento das atividades de ensino.

Ressaltamos que baseamos nossa pesquisa nesta concepção, pois acreditamos que “ensinar por meio da resolução de problemas” pode facilitar o caminho da aprendizagem da Matemática de forma qualitativa. Partindo desta premissa, optamos em trabalhar com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas proposta por Onuchic e Allevato.

2.4 – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas

Pensar Resolução de Problemas como metodologia de ensino, em nossa pesquisa, se tornou consistente a partir da leitura de Onuchic e Allevato (2004), considerando as recomendações dos PCN e do NCTM. Segundo esses autores, a construção de conceitos e o desenvolvimento de habilidades matemáticas são favorecidos no contexto de tal estratégia. O grupo de trabalho coordenado por Onuchic desde 1992, na UNESP de Rio Claro, denominado Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas, adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas. Os trabalhos desenvolvidos pelo grupo e os resultados obtidos nos demonstram ser acertada a decisão de adotarmos essa metodologia de ensino

para a pesquisa desenvolvida por nós, pois entendemos que a resolução de problemas pode ser considerada o ponto de partida e um meio para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos.

No decorrer dos tempos, várias metodologias foram experimentadas em sala de aula, porém pelas novas formas de se ensinar matemática compreende-se que a participação efetiva do aluno deve ser estimulada para a sua compreensão e vivência de mundo. Assim, hoje o papel do professor não deve ser considerado apenas como repassador de conceitos. Antes de tudo, ao trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas, o professor deve ter plena consciência de seu papel, precisa ter clareza de suas práticas, ou seja, precisa ser crítico, reflexivo, contextualizado. Pois, ao escolher problemas a serem trabalhados, deve ter o cuidado para fazer com que os alunos reflitam e procurem investigar as melhores estratégias para as resoluções possíveis do problema dado.

O professor tem um papel fundamental, segundo Marincek (2001, p. 16), para “garantir que os alunos construam um conhecimento adequado de matemática, que faça sentido, é necessário que o professor reflita, investigue e venha a formular ou escolher cuidadosamente os problemas que irá propor”. Ou seja, os problemas propostos precisam despertar os interesses dos alunos em sua resolução; não podemos pensar, simplesmente, em problemas matemáticos que apenas envolvam o conhecimento básico e, sim, um problema que seja desafiador para o aluno, porém não tão difícil a ponto de fazê-los desistir da resolução.

Em 1998, Onuchic elencou algumas questões para auxiliar o professor a refletir e escolher de forma minuciosa os problemas a serem trabalhados:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que séries este problema é adequado?

- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como avaliar se as respostas obtidas são razoáveis?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?

A partir dessas questões, é relevante que o professor pesquise o problema que vai trabalhar. Como já citamos anteriormente, o problema deve envolver o aluno e o seu interesse em resolvê-lo e, por meio dessa ação, a pesquisa será uma grande aliada ao processo ensino-aprendizagem-avaliação, visando a aprimorar as estratégias de ensino, transformando os conceitos matemáticos acessíveis aos alunos de maneira que tanto professor quanto o estudante possam interagir satisfatoriamente nas resoluções de problemas.

Ao desenvolver seu Projeto intitulado *Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas* na Secretaria de Estado de Educação de São Paulo, a referida autora deu os primeiros passos para trabalhar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas, pela qual o foco principal dado o problema seria um meio para que os alunos pudessem chegar a conceitos e definições matemáticas e, não, um ponto de partida para se chegar a respostas de exercícios mecanicamente resolvidos e de conceitos previamente dados. As resoluções partiriam de um conhecimento da realidade e de uma compreensão da mesma de forma consciente para construção de um novo conhecimento. Visando a essa significação do conhecimento, a autora, juntamente com quarenta e cinco professores participantes do Projeto, propôs um roteiro que pudesse efetivar um objeto matemático, bem como pudesse ser trabalhado em sala de aula por meio da resolução de problemas.

Apresentamos, a seguir, o roteiro de atividades proposto:

- Formar grupos: entregar aos alunos uma situação-problema; Onuchic (1998) afirmava que seria mais fácil trabalhar com determinado número de grupos a trabalhar com, por exemplo, quarenta alunos individualmente. O objetivo seria o de estimular o trabalho cooperativo, ressaltando o perfil do grupo

e o seu nível de aprendizagem, sendo fundamental que o professor conheça todos do grupo;

- O papel do professor: precisa ter conhecimento e consciência do que espera deste grupo, para que possa trabalhar como mediador, organizador, interventor, consultor, incentivador da aprendizagem;
- Resultado na lousa: após a resolução dos problemas, seria de fundamental importância que o professor possibilitasse a visualização dos resultados (certos, errados, feitos por diferentes caminhos) de todos os grupos, com o objetivo de que todos os alunos pudessem analisar as diversas formas de resoluções utilizadas;
- Plenária: participação de todos para socialização das respostas encontradas;
- Análise dos resultados: as dificuldades encontradas são trabalhadas de maneira conjunta e à medida que surgirem outros problemas são explorados outros resultados e conceitos;
- Consenso: retiram-se as dúvidas para um consenso sobre o resultado pretendido;
- Formalização: com o resultado do trabalho conjunto, professor e alunos sintetizam o que aprenderam. O professor, a partir daí, coloca as devidas definições, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades sobre o assunto.

Com o passar o tempo, algumas alterações neste roteiro foram necessárias, levando em conta outras dificuldades apresentadas pelos alunos, como, por exemplo, dificuldades em leitura, interpretação de textos e, até mesmo, matemática básica. Aqui, entra a importância da observação e da diagnose do grupo, pois conhecendo suas dificuldades e características o professor poderá propor problemas de acordo com o grupo a em que um conceito vai ser trabalhado. Tentando atender à demanda de prover os alunos de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, Onuchic e Allevato (2011, p. 83) realizaram algumas modificações no primeiro roteiro, incluindo novos elementos; criando, assim, o segundo roteiro, que transcrevemos na sequência:

- Preparação do problema: selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não foi, ainda, trabalhado em sala de aula.

- Leitura individual: Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- Leitura em conjunto: formar grupos e solicitar uma nova leitura do problema, agora nos grupos.

- ✓ Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

- ✓ Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se com os alunos consultar um dicionário.

- Resolução do problema: a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- Observar e incentivar: nessa etapa, o professor não tem o papel de transmissor de conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, ele observa, analisa o comportamento dos estudantes e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- ✓ O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas e necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e, a fim de possibilitar a continuação

do trabalho, ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias.

- Registro das resoluções na lousa: representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- Plenária: para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- Busca do consenso: depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- Formalização do conteúdo: neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da Resolução do Problema, bem como destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Discorreremos sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas como forma de propor uma ressignificação da aprendizagem da matemática, mais especificamente no que se refere ao problema de nossa pesquisa “O ensino-aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral”, tentando fazer do problema, um ponto de partida para a aprendizagem da matemática, sobretudo em relação aos conteúdos introdutórios ao conceito de Integral, o foco de nossa pesquisa.

Continuando a busca de suporte teórico que possa se somar ao do ensino de matemática por meio de resolução de problemas, encontramos em Fischbein (1993) características envolvidas nas atividades matemáticas, referentes aos aspectos intuitivo, lógico e formal.

2.5 – Elementos da teoria de Efraim Fischbein

Nesta seção, apresentaremos as três categorias de Fischbein (1993), presentes numa atividade matemática, a saber, o formal, o algorítimo, e o intuitivo. Anteriormente, tratando do papel da intuição, o autor já havia destacado que “a completa independência da matemática, como um mundo fechado de entidades formalmente postuladas, mostrou-se impossível” (FISCHBEIN, 1987, p. 16).

No campo do ensino, podem-se encontrar, sem muito esforço, professores que parecem estar numa realidade paralela à do estudante. Suas predileções, crenças, concepções e hábitos platônicos e/ou formalistas produzem um saber matemático de caráter universal e que elimina a dimensão subjetiva, a dimensão mundana do conhecimento que ele professa. Este quadro de ensino proporciona sérios entraves à aprendizagem. Tal situação é analisada cuidadosamente por Fischbein ao mencionar que:

De fato, o modelo de ensino dessa natureza é que dificulta a aprendizagem dos estudantes. No entendimento de Souza (2008, p. 48),

A matemática precisa ser mostrada, não só como um encadeamento lógico de definições, axiomas, proposições e teoremas, mas principalmente como um processo de tentativas, erros, correções, refinamentos, com espaço para produzir conjecturas, elaborar justificativas, avaliar formalmente e intuitivamente uma afirmação matemática (SOUZA, 2008, p. 48).

Em seu artigo “*The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity*”, Fischbein afirma que a matemática deveria ser considerada a partir de dois pontos de vista:

- Matemática como um corpo rigoroso, dedutivo-formal do conhecimento como exposto nos tratados e livros didáticos de alto-nível;

- Matemática como uma atividade humana.

O fato de que o ideal de um matemático seja a obtenção de algo estritamente coerente, logicamente estruturado, não exclui a necessidade de se considerar a matemática também como um processo criativo. Queremos que os alunos compreendam que a matemática é essencialmente uma atividade humana, que ela é inventada por seres humanos. O processo de criação da matemática implica momentos de iluminação, hesitação, aceitação e regulação; muitas vezes, por séculos de tentativas sucessivas, correções e aperfeiçoamentos. Queremos que os estudantes aprendam não só formalmente, mas também intuitivamente a validade das demonstrações matemáticas.

No artigo citado, o autor faz uma exposição, apresentando argumentos e exemplos para expor uma teoria, segundo a qual, ao analisar o comportamento matemático de um estudante, é preciso levar em conta três aspectos básicos, que estão presentes em toda atividade matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

1 - O aspecto formal

O aspecto formal está relacionado a axiomas, definições, teoremas e demonstrações. Mesmo sabendo que nem todo aluno tenderá a ser um matemático no futuro, mas, considerando que a matemática sempre fará parte de seu cotidiano, como atividade humana, fica explícito que os componentes formais dessa ciência deverão ser bem entendidos por meio de um processo cognitivo, baseado num raciocínio lógico, uma vez que necessariamente a matemática precisa ser aprendida, sistematizada, confrontada e concretamente utilizada pelo sujeito. Desse modo, contribui para o desenvolvimento do sentimento de coerência e consistência, revelando a sua capacidade de pensar, de forma que esse sujeito possa entender a importância da aprendizagem formal da matemática, em um processo educacional contextualizado.

Mas, quando trabalhamos os conceitos matemáticos utilizando somente procedimentos, estaremos correndo o risco de criar indivíduos cujo raciocínio fica “travado” diante de situações não usuais, e vice-versa. Se o

trabalho for todo baseado em aspectos formais, o indivíduo pode chegar ao exemplo citado por Kline (1973), em seu livro “Why Jonhny can't add: The failure of the new Mathematics, quando o pai pergunta ao seu filho quanto é $5 + 3$?⁶

A resposta que recebeu foi que $5 + 3 = 3 + 5$ pela lei comutativa. Espantado, ele reformula a pergunta: “Mas quantas maçãs são 5 maçãs e 3 maçãs?”. O seu filho não entendeu muito bem que o “e” significa mais e então perguntou: você quer dizer 5 maçãs mais 3 maçãs?

O pai apressou-se em dizer que sim e esperou ansiosamente. Oh, disse a criança, “não importa se você está falando de maçãs, peras ou livros; $5 + 3 = 3 + 5$ em todos os casos”.

Percebemos, a partir deste exemplo, que não devemos trabalhar somente com o aspecto formal, pois compreendemos que precisamos de outros aspectos para que o processo cognitivo da matemática seja entendido pelo indivíduo.

2 - O aspecto algorítmico

O aspecto algorítmico está ligado às técnicas de resolução e estratégias do tipo padrão. Sabemos, baseados em pesquisas e em nossa prática docente, que a compreensão de axiomas, teoremas, provas e definições da forma como são expostas formalmente nos livros didáticos não é suficiente para aplicar esses conhecimentos à resolução de um problema matemático. Por outro lado, se for usado só o aspecto algorítmico, após algum tempo ou até mesmo imediatamente, o aluno será incapaz de aplicar o algoritmo em uma situação não usual. Torna-se necessário desenvolver tanto as habilidades como o entendimento dos “porquês”, isto só se tornará possível quando conseguir aplicar os algoritmos aprendidos por meio dos aspectos formais.

Como exemplo, podemos citar uma pessoa que sabe a definição de integral, mas não é capaz de resolver, espontaneamente, uma questão do tipo

⁶ “One parent asked his eight-year-old child, ‘How much is $5+3$?’ The answer he received was that $5+3=3+5$ by the commutative law.” (KLINE, 1973, cap.1). (Acessível em: www.marco-learning.com/pages/kline/johnny.html). Acesso em: 12/08/2014 às 22h15).

$\int \frac{x^2}{x^3+6} dx$, pois, não foi desenvolvida nela uma habilidade para resolver o problema.

3 - O aspecto intuitivo

Este aspecto se caracteriza por uma cognição intuitiva, um entendimento intuitivo ou uma solução intuitiva. Fischbein considera a aceitação direta de uma noção, teorema ou de uma solução, por parte do aluno, sem que este tenha necessidade de qualquer demonstração, como sendo uma cognição intuitiva, que é então caracterizada por ser autoevidente. A cognição autoevidente significa que intuições são aceitas sem que o indivíduo manifeste a necessidade de uma checagem ou prova *a posteriori*. Como exemplos dados pelo autor, podem ser citados:

- O todo é maior do que qualquer uma das partes;
- Por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma e uma só reta paralela à primeira;
- Dois pontos distintos determinam uma única reta;
- O caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta.

A intuição pode também trazer dificuldades para o processo de aprendizagem. Pois, segundo Fischbein, a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual primitiva e limitada, porém fortemente enraizada, anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e, assim, distorce ou bloqueia a reação matemática correta.

Como exemplo disso, podemos citar o fato da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. Imaginando-se que sempre poderemos diminuir o comprimento de um segmento de reta quanto quisermos, parece razoável supor que o lado e a diagonal do quadrado iriam sempre admitir um submúltiplo comum e, portanto, seriam comensuráveis. Aí a intuição leva a enganos.

O referido autor afirma que as interações e os conflitos entre os componentes formais, algorítmicos e intuitivos de uma atividade matemática são muito complexos e precisam ser identificados e entendidos. Exemplifica afirmando que, quando os aspectos formais e algorítmicos não estão bem sedimentados e relacionados, podem surgir erros do tipo:

- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Observamos, pela experiência adquirida lecionando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que esse tipo de interação e conflito entre o formal e o algorítmico não se restringe ao ensino básico. No ensino superior, particularmente em um curso de Cálculo, testemunhamos o surgimento de erros como os que seguem:

- A regra da derivada do produto, em que se tem o emprego incorreto da regra $\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$
- Na técnica de integração do tipo $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha).(x-\beta)} dx = \int \frac{P(x)}{x-\alpha} dx \cdot \int \frac{1}{x-\beta} dx$

No exemplo seguinte, os aspectos intuitivo e formal foram bloqueados pelo esquema rígido da resolução algorítmica.

- Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$. (Guidorizzi, 1987, p. 311).

O aluno resolve algebricamente da seguinte forma: $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ (aspecto algorítmico não inter-relacionado ao formal). O aluno dá a resposta zero, mas percebe que há alguma coisa errada, porque observou que pelos dados do problema existe uma região plana e que o objetivo do problema é calcular a área dessa região, mas não vê explicação para o resultado obtido. Neste caso, os aspectos intuitivo e formal foram bloqueados pelo esquema rígido da solução algorítmica, porque o aluno sabe que existe uma região cuja área deve ser calculada;

erra no algoritmo e percebe algo errado, porque intuitivamente está convencido de que a área dessa região deve ser diferente de zero.

Estes exemplos mostram, no nosso entender, o quanto é importante o trabalho do professor com os teoremas e definições (aspecto formal), bem como com os aspectos algorítmicos e os intuitivos.

No próximo capítulo, são apresentados a metodologia e os processos metodológicos. O quarto e último capítulo são destinados à análise dos dados.

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentaremos considerações da metodologia de pesquisa empregada no nosso trabalho, bem como descreveremos os procedimentos metodológicos adotados com o objetivo de responder a seguinte questão:

Como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para alunos de Licenciatura utilizando-se a metodologia da Resolução de Problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein?

3.1 – Pesquisa Qualitativa

Com o presente estudo, pretendemos investigar como os grupos de estudantes manipulam os conhecimentos necessários à compreensão das noções envolvidas na introdução do conceito de Integral por meio da estratégia de Resolução de Problemas e, além disso, investigar se os estudantes conseguem inter-relacionar os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, segundo Fischbein, em tal estudo. Neste contexto, a opção metodológica adotada para o desenvolvimento deste trabalho é a Pesquisa Qualitativa, focalizando o conceito e os três aspectos de Fischbein na Integral.

São muitas as interpretações que se tem dado à expressão pesquisa qualitativa ou abordagem qualitativa. Dentre as mais comumente referidas nos trabalhos da área de Educação Matemática, listamos as que virão a seguir.

Bogdan e Biklen (1994, p. 11) referem-se à abordagem qualitativa como “uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”. Os autores salientam que:

Embora os dados quantitativos recolhidos por outras pessoas (avaliadores, administradores e outros investigadores) possam ser convencionalmente úteis tal como foram descritos, os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam. [...] Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos por seu valor facial. (Bogdan e Biklen, 1994, p.195).

Para Creswell (2010, p. 26), “a pesquisa qualitativa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano”.

Por seu turno, Oliveira (2010, p. 37) conceitua a abordagem qualitativa ou a pesquisa qualitativa “como sendo um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ ou segundo sua estruturação”.

Borba (2004) apresenta um levantamento que resume as contribuições da pesquisa qualitativa para diversas linhas de pesquisa da Educação Matemática: Formação de Professores (Fiorentini *et al.*, 2002), Etnomatemática (Knijnik, 2002), História da Matemática (Miguel & Miorim, 2002), Psicologia da Educação Matemática (Falcão, 2002), Tecnologias da Inteligência (Borba e Penteado, 2002) e Educação Matemática no Ensino Superior (Pinto, 2002). Além disto, Borba (2004) enfatiza que:

O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento. (Borba, 2004, p. 2).

Retomando as ideias de Bogdan e Biklen, para os quais a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, preocupada em retratar a perspectiva dos participantes, salientamos que esses aspectos são considerados no presente estudo. Por esse motivo, tecemos mais algumas considerações que julgamos relevantes na busca pelos procedimentos metodológicos empregados em nosso trabalho.

Segundo estes últimos autores, uma pesquisa qualitativa apresenta cinco características, a saber:

- O ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento principal – Os pesquisadores tendem a coletar dados em escolas, famílias, bairros e outros locais, ou seja, no local em que os participantes vivenciam a questão ou problema que está sendo estudado. “Os pesquisadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência”.
- A pesquisa qualitativa é descritiva – Os dados recolhidos são na sua essência descritivos, pois incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais e outros registros oficiais. Esses dados são analisados pelos investigadores, respeitando tanto quanto o possível a forma em que estes foram registrados ou transcritos.
- Os pesquisadores qualitativos interessam-se mais pelos processos do que pelos resultados ou produtos – O interesse do pesquisador qualitativo ao estudar o problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas, mais do que providenciar soluções.

- Os pesquisadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma indutiva – Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações se formam ou se consolidam a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima. O fato de não existirem hipóteses ou questões específicas formuladas *a priori* não implica a inexistência de um quadro teórico que oriente a coleta e a análise dos dados. O desenvolvimento do estudo aproxima-se a um funil: no início há questões ou focos de interesse muito amplos, que no final se tornam mais diretos e específicos à medida que a pesquisa se desenvolve.

- O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida, que deve ser uma preocupação do pesquisador – Nesse estudo, “os investigadores qualitativos estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como *eles* próprios estruturam o mundo social em que vivem”.

Com base nessa caracterização descrita pelos autores, podemos observar que na pesquisa qualitativa o pesquisador possui um contato direto com o ambiente e os sujeitos da pesquisa e os dados coletados são descritivos, destacando-se os instrumentos de coleta, os questionários, as entrevistas, as notas de campo, as fotografias, os vídeos e outros instrumentos, uma vez que o objetivo do pesquisador, em sua análise, é procurar compreender por meio dos dados o significado expresso pelos participantes. O pesquisador nesse tipo de estudo deve se preocupar como o seu objeto de pesquisa é evidenciado nas atividades elaboradas, dado que a análise e a interpretação dos resultados seguem um processo indutivo, em que se criam categorias de análise a partir dos resultados obtidos, no sentido de se generalizarem tais dados, uma vez que estes, em geral, são influenciados pelas concepções dos sujeitos.

Essas características foram norteadoras na realização desta pesquisa. Os dados foram coletados em uma universidade pública, no estado do Pará. As atividades foram elaboradas e analisadas pelo pesquisador, de modo que os dados colhidos por meio delas constituíram o instrumento fundamental de análise. Os dados gerados forneceram informações para ilustrar e substantiar os resultados da

pesquisa, evidenciando o que indicam Bogdan e Biklen (1994, p. 49): “... *A palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registro dos dados como para a disseminação dos resultados*”.

Neste trabalho, os dados têm uma natureza descritiva e estão apoiados nas estratégias adotadas pelas duplas de estudantes na solução dos problemas, nas discussões ocorridas entre seus componentes e nas plenárias, em que houve a participação de todos para a socialização das respostas encontradas pelas duplas.

Na fase experimental de nossa pesquisa, procuramos propiciar que as duplas tivessem sempre a chance de usar as suas próprias ideias na busca de estratégias para a resolução dos problemas e não, simplesmente, seguir diretrizes geradas pelo pesquisador. Com isto, pretendíamos desenvolver nas duplas a crença de que são capazes de fazer Matemática e de que seu caminho de resolução faz sentido, isto é, aumentar a confiança e a autoestima dos alunos no momento de resolver problemas.

Nesse sentido, acreditamos ter criado com a nossa pesquisa um ambiente motivador e, também, sempre estimulando as duplas a interpretar as situações obtidas e, com isso, ampliar suas capacidades de resolver os problemas. Com isto, o papel do pesquisador neste trabalho foi o de mediador, de organizador, de interventor, de consultor, de incentivador da aprendizagem, embora esta última não seja o foco principal desta pesquisa.

Para análise dos dados dessa pesquisa, fundamentamo-nos em três eixos: as estratégias desenvolvidas pelas duplas na solução dos problemas que, acreditamos, iriam contribuir para o entendimento das ideias envolvidas na introdução do conceito de Integral; as proposições articuladas pelas atividades escritas mediadas pela resolução de problemas; e, por fim, a existência ou não, nas respostas das duplas, de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos em algumas questões da sequência de ensino que foi desenvolvida.

3.2 – Procedimentos Metodológicos

O principal instrumento de coleta de dados foi uma sequência de ensino, que será apresentada mais adiante. A seguir, descrevemos os outros componentes dos procedimentos metodológicos.

3.2.1 – Sujeitos da Pesquisa

A parte experimental da pesquisa foi realizada no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado do Pará – UEPA, instituição criada pela Lei nº. 5.747, de 18 de maio de 1993.

Os participantes escolhidos para essa pesquisa são alunos que ainda não haviam estudado o conceito de Integral, uma vez que nossa investigação está focada na introdução desse conceito. Entendemos que, com os resultados do desenvolvimento das atividades propostas, teríamos condições de analisar os elementos reveladores concernentes à aprendizagem das principais ideias envolvidas no conceito de Integral. Os participantes foram convidados por meio de divulgação em sala de aula, em que informamos sobre a importância da colaboração dos alunos nesta pesquisa, bem como enfatizamos os objetivos desta, de maneira que foi esperado que todos participassem tendo consciência da ajuda que estariam dando para a finalização de nossa pesquisa e da sua contribuição para a busca de elementos que poderão concorrer para tentar diminuir os problemas enfrentados no ensino e aprendizagem da Integral.

Após a divulgação em sala de aula, compareceram para o primeiro encontro 32 alunos matriculados no curso de Matemática. Neste primeiro encontro, foi apresentada a metodologia com que iríamos trabalhar para a coleta de dados, que é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, e propusemos que os estudantes trabalhassem em duplas.

Enfatizamos que, pelo nosso entendimento, a resolução de problemas pode ser considerada o ponto de partida e um meio para se iniciar o estudo do conceito de Integral, embora na análise das respostas dadas pelas duplas,

buscamos verificar a presença de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. Como pesquisadores, acreditamos que o uso dessa metodologia de ensino possa favorecer a desejada interação e a inter-relação entre tais aspectos.

Após a apresentação das etapas da metodologia com que iríamos trabalhar, os 32 alunos participantes concordaram com os termos propostos e assinaram um termo de compromisso que se encontra no ANEXO 1. A seguir pedimos que os participantes se organizassem em 16 duplas. A decisão de trabalhar em duplas se deveu ao fato de acreditamos que a formação de pequenos grupos contribui para um melhor diálogo entre os participantes. Deixamos por conta deles a constituição dessas duplas.

3.2.2 – Recurso Computacional

Para a realização das atividades do 3ª encontro, foi usado o programa GeoGebra, um software de geometria dinâmica, livre, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que pode ser instalado em qualquer computador a partir do endereço <http://www.geogebra.org>. O GeoGebra permite ao usuário a realização de transformações gráficas. Por apresentar uma interface simples e fácil de utilizar, o programa pode contribuir para facilitar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos de maneira uniforme, vinculando e interligando aspectos algébricos e geométricos.

Esse software oferece a possibilidade de construir gráficos, partições do intervalo de integração, bem como realizar cálculos de somas inferiores e de somas superiores de uma função, além da visualização dos retângulos, cujas somas inferiores ou superiores são componentes de somas de Riemann relacionadas à função que se deseja integrar. Desse modo, em nosso estudo, o uso do GeoGebra está ligado à construção desses elementos com o intuito de dinamizar o desenvolvimento das atividades, no sentido de promover a visualização de elementos que possam contribuir para a introdução do conceito de Integral.

3.2.3 – Recursos utilizados na Coleta de Dados

Os tipos de coletas de dados envolvidos na nossa pesquisa foram: a observação, os documentos (protocolos dos alunos) e os audiovisuais.

Embasamo-nos em Creswell (2010, p. 214) que afirma que

- Observações são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e o desenvolvimento das atividades pelos indivíduos no local de pesquisa;
- Durante o processo de pesquisa, o investigador pode coletar documentos públicos (p. ex., jornais, minutas de reuniões, relatórios oficiais e outros) ou privados (p. ex., diários pessoais, cartas, e-mails e outros);
- Audiovisuais podem assumir a forma de fotografias, objetos de arte, videoteipes ou quaisquer formas de som.

Esses tipos de instrumentos utilizados na coleta foram muito úteis na análise dos dados obtidos, pois pela observação se podem obter informações sobre o desconforto ou não dos participantes, causado por ocasião da exposição de tópicos específicos em uma plenária, pois, para algumas pessoas, é mais viável exporem suas ideias em uma conversa interpessoal do que por meio de uma discussão coletiva. Além disso, as evidências escritas poupam tempo e gastos ao pesquisador para transcrevê-los e as audiovisuais proporcionam uma oportunidade para se ter o registro dos participantes, compartilhando diretamente suas ideias nas duplas e na socialização dos resultados.

Em nossa pesquisa, foram adotados os seguintes procedimentos de coleta de dados: em termos de observação, trabalhamos com diário de campo, com o objetivo de anotar as falas e/ou intervenções dos alunos, julgados relevantes para enriquecer a coleta de dados; nos documentos, fizemos análise dos protocolos dos alunos resultantes do desenvolvimento das atividades; e, no audiovisual, utilizamos as mídias (áudio e vídeo), já que essas técnicas registram comportamentos e interações entre os pesquisados que poderiam passar despercebidos, caso nos restringíssemos somente a registrar e descrever observações.

3.2.4 – A sequência de ensino

As atividades propostas têm como objetivo principal a introdução do conceito de Integral. Assim, as atividades foram elaboradas com a intenção de propiciar aos estudantes elementos para iniciar a construção gradativa desse conceito.

Ao concebermos as situações que compõem a sequência de ensino, tivemos sempre presente a preocupação de propor problemas cuja resolução possa ajudar as duplas a se tornarem o elemento principal do processo de aprendizagem, levando-as a agir de forma autônoma. Para tanto, convencionamos que o professor-pesquisador deveria atuar apenas no acompanhamento e na observação e interferir apenas quando extremamente necessário para o desenvolvimento das atividades, a menos que a sua não interferência pudesse barrar a continuidade do trabalho, comprometendo o processo da aprendizagem.

Foram elaboradas sete atividades a serem desenvolvidas em quatro encontros com a duração de três horas. No primeiro, foram trabalhadas a 1ª e 2ª atividades; no segundo, a 3ª atividade, que é composta por duas partes; no terceiro encontro, foi desenvolvida a 4ª atividade, que é dividida em três partes e que foi realizada com auxílio do software GeoGebra; no quarto encontro, foram trabalhadas a 5ª, a 6ª e a 7ª atividades.

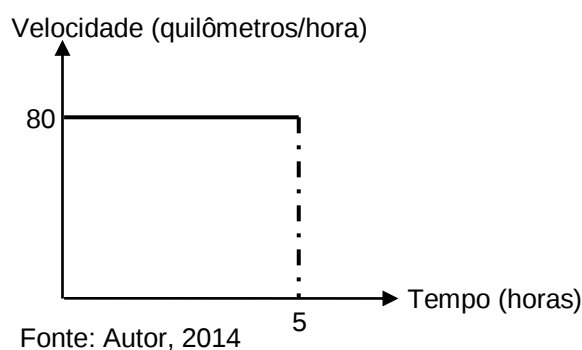
A seguir, são apresentadas cada uma das atividades com seus respectivos objetivos e análise *a priori*.

1º Encontro

Atividade 1

- 1) O gráfico abaixo representa uma viagem realizada por uma pessoa em seu carro, durante 5 horas. Observando o gráfico, descubra qual foi a distância total percorrida por essa pessoa?

Gráfico 1: Velocidade x Tempo



- 2) Uma pessoa em seu carro viajou a 50 km/h durante 3 horas, depois a 75 km/h por 2 horas, depois a 90 km/h por 4 horas.

- a) Esboce um único gráfico ilustrando as três situações para a viagem descrita.
- b) Determine a distância percorrida para cada intervalo de tempo, apenas observando o gráfico.
- c) Determine, de acordo com o que foi feito no item (b), a distância total percorrida.
- 3) Os resultados encontrados nas questões 1 e 2-c representam a medida da distância total percorrida pelo móvel. Esses resultados podem representar uma outra medida? Justifique sua resposta.

O objetivo principal desta atividade, composta por três questões, é verificar se os estudantes conseguem descobrir intuitivamente, com o recurso da visualização principalmente, a distância percorrida para cada intervalo de tempo e a distância total, bem como fazer o esboço do gráfico da função velocidade.

Na primeira questão, esperamos que as duplas consigam mostrar que a área do retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade e a largura é o tempo. A questão pode contribuir para que o aluno não vincule sempre a Integral à área de uma figura geométrica; neste caso, estão envolvidos conceitos da Física, mais diretamente a distância percorrida por um móvel com determinada velocidade, em um tempo determinado.

No item (a) da questão dois, é preciso primeiramente construir o gráfico para visualizar as regiões que serão criadas e, em seguida, determinar o que se pede. Esperamos que as duplas consigam mostrar quais procedimentos poderiam ser utilizados para determinar a distância percorrida para cada intervalo de tempo e a distância total, bem como para traçar o esboço do gráfico.

Acreditamos que esta primeira atividade possa contribuir para que cada grupo inter-relacione os aspectos intuitivos e algorítmicos do assunto.

Atividade 2

- 1) Faça um esboço do gráfico da função velocidade dada por $V(t) = -t^2 + 6t$ em km/h, em que t representa o tempo em horas. Ilustre a região do plano limitada pelo gráfico da função V , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 3$.
- 2) É possível usar fórmulas da geometria para calcular a distância total exata, usando a área da região acima ilustrada? Justifique sua resposta.
- 3) Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da distância total usando a área da região ilustrada na questão (1), ache uma aproximação para a mesma.
- 4) Você acha que é possível melhorar a estimativa feita na questão (3)? Justifique sua resposta.

Esta atividade constituída por quatro questões tem por objetivo verificar se as duplas conseguem fazer o esboço gráfico da função velocidade, bem como

investigar quais procedimentos matemáticos que os alunos indicam que poderiam ser utilizados para melhorar o cálculo da distância total.

Na questão 1, é preciso primeiramente construir o gráfico para visualizar a região que será representada e, em seguida, determinar o que se pede. A área da região em questão não pode ser calculada diretamente por fórmulas elementares da geometria plana. Esperamos que as duplas consigam mostrar uma maneira de fazer o cálculo aproximado da distância total, manipulando conhecimentos de geometria plana, tais como: área de retângulo, quadrado, triângulos e outras.

Assim como a atividade 1, acreditamos que esta também possa contribuir para que cada grupo inter-relacione os aspectos intuitivos e algorítmicos do assunto.

As duas atividades seguintes são adaptações de propostas do livro “Cálculo e Aplicações” dos autores HUGHES-HALLETT *et al* (2009), do capítulo 3; o objetivo do [o quê?] é oferecer ao estudante uma situação que favoreça o entendimento de ideias envolvidas no conceito de Integral, definida como limite de somas de Riemann, bem como ilustrar tais ideias em vários contextos.

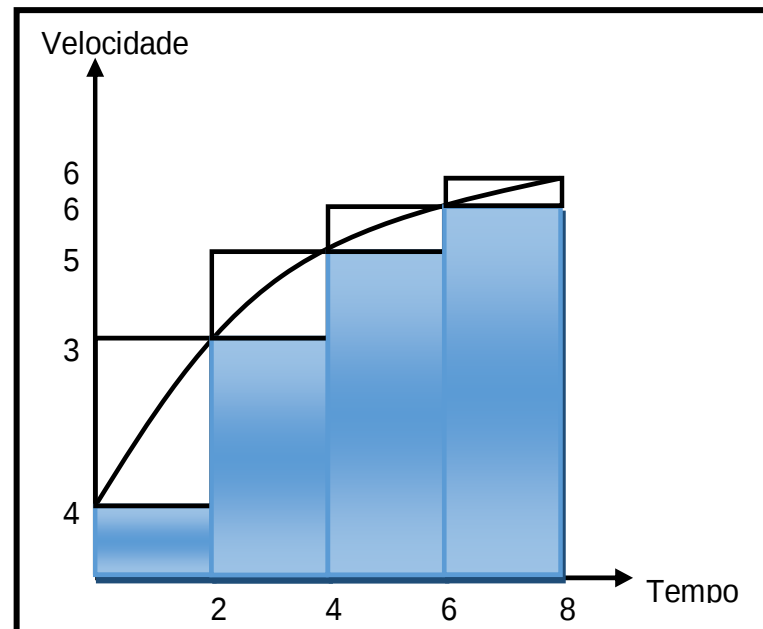
2º Encontro

Atividade 3

Parte I

A figura abaixo mostra o gráfico da velocidade, V , de um objeto (em km/h), representada pela função f . A área dos retângulos escuros representa a estimativa inferior para distância total percorrida pelo objeto durante as 8 horas, e a área dos retângulos escuros e brancos, juntos, representa a estimativa superior para distância total percorrida nas mesmas 8 horas.

Figura 1: Gráfico da velocidade.



Fonte: Autor, 2014

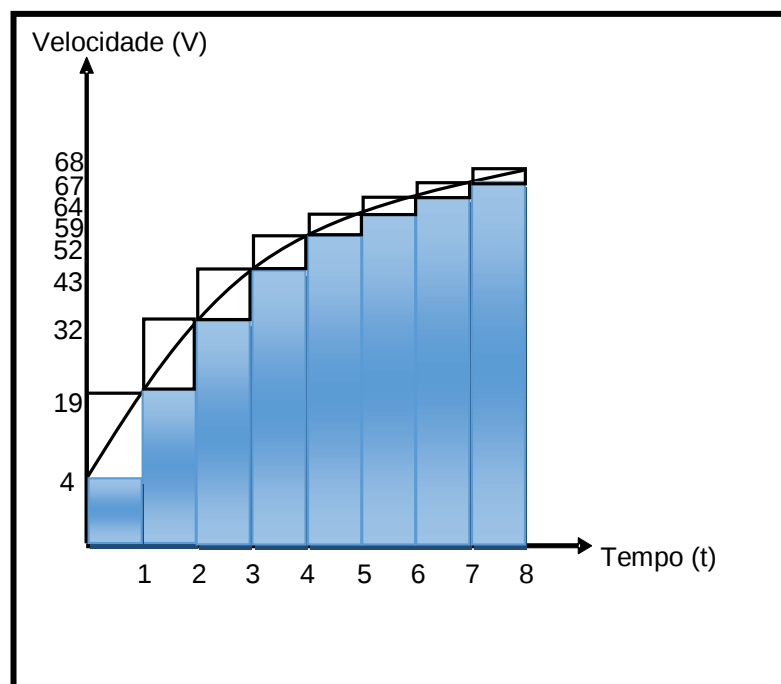
- 1) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,2]$; $[2,4]$; $[4,6]$; $[6,8]$?
- 2) Como você representaria essas variações?
- 3) No gráfico acima calcule $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ e $f(8)$
- 4) Os valores de $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ e $f(8)$ podem ser identificados das seguintes formas:

- a) No campo da função esses valores são identificados como:
- b) No campo da física eles são identificados como:
- c) No campo da geometria são identificados como:
- 5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?
- 6) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?
- 7) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões (5) e (6).
- 8) Qual a diferença entre a estimativa superior e a inferior nas questões (6) e (5)
- 9) Você acha que é possível melhorar as estimativas feitas nas questões (5) e (6)? Justifique sua resposta.

Parte II

O gráfico abaixo mostra medidas mais frequentes da velocidade.

Figura 2: Gráfico da velocidade



Fonte: Autor 2014

- 10) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,1]$; $[1,2]$; $[2,3]$; $[3,4]$; $[4,5]$; $[5,6]$; $[6,7]$; $[7,8]$?
- 11) Como você representaria essas variações?
- 12) No gráfico acima calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ e $f(8)$.
- 13) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?
- 14) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?
- 15) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões (13) e (14).
- 16) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões 5 e (13).
- 17) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa inferior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.
- 18) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões 6 e (14).
- 19) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa superior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.
- 20) Qual a diferença entre a estimativa superior e a inferior nas questões (14) e (13)
- 21) Compare (maior ou menor) os resultados encontrados nas questões 8 e (20)
- 22) O que você acha que vai acontecer com a diferença entre a estimativa superior e a inferior, se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

Esta atividade está dividida em duas partes com um total de vinte e duas perguntas. Os objetivos delas são verificar se as duplas são capazes de identificar a partição de um intervalo; entender e calcular a distância total (estimativa inferior e estimativa superior), utilizando área de retângulo; comparar e analisar dados da distância total. A atividade apresenta várias regiões retangulares escuras e brancas, de forma que apresente uma melhor visualização da distância total (estimativa inferior e estimativa superior).

Nas questões (1) e (10), o objetivo é que os grupos consigam perceber que, em cada intervalo, a variação do tempo é igual e que o intervalo de tempo de 0 a 8 foi subdividido em quatro e depois em oito. Já nas questões (2) e (11) é estimular os grupos a escrever uma representação para essas variações. Nas questões (3) e (12), apesar das figuras mostrarem o gráfico da velocidade em função do tempo, a ideia é a de que os grupos consigam transferir o conhecimento já adquirido por eles de função para o contexto das questões. Assim, como a questão (4) que tem como ação de associar o contexto da questão à outra área de conhecimento.

Segundo HUGHES-HALLETT *et al* (2009, p. 116), quando não sabemos a velocidade do carro a cada momento, não podemos calcular exatamente a distância, mas podemos fazer uma estimativa. É com esta ideia que esperamos que as duplas, usando o cálculo de área, consigam determinar a distância total (estimativa inferior e estimativa superior), no período de 8 horas.

Também, desejamos verificar se as duplas, por meio da análise dos dados da distância total, consigam perceber que a distância total (estimativa inferior) aumenta e a distância total (estimativa superior) diminui à medida que a variação do tempo for ainda menor e, respectivamente, que a diferença entre elas seja cada vez menor. Assim, esperamos uma resposta do tipo: a verdadeira distância total está em algum lugar entre a distância total (estimativa inferior) e a distância total (estimativa superior) ou uma resposta similar a esta.

A atividade é uma adaptação do livro “Cálculo e Aplicações” dos autores HUGHES-HALLETT *et al* (2009), visto que o objetivo deste “capítulo 3” já foi mencionado no 1ª encontro.

3º Encontro

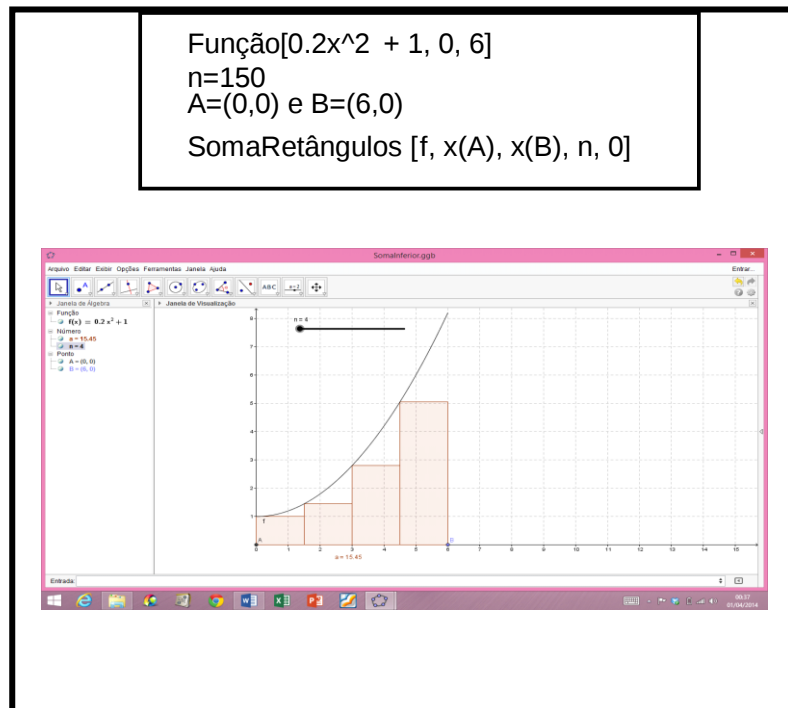
Atividade 4

Utilize o Geogebra para construir o gráfico da função velocidade de um móvel, dada por $V(t) = 0,2t^2 + 1$ em km/h, com o tempo t em horas. Ilustre a região do plano limitada pelo gráfico da função V , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 6$.

Parte I

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:

Figura 3: Soma inferior



Fonte: Autor 2014

1) Preencha a tabela abaixo, usando as informações do gráfico

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}$$

2) Repita o procedimento da questão 2, alterando o número de subintervalos para 2.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}$$

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
3º	$t_2 =$	$t_3 =$			
4º	$t_3 =$	$t_4 =$			
5º	$t_4 =$	$t_5 =$			
6º	$t_5 =$	$t_6 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

4) altere o número de subintervalos para 12.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0=$	$t_1=$			
2º	$t_1=$	$t_2=$			
3º	$t_2=$	$t_3=$			
4º	$t_3=$	$t_4=$			
5º	$t_4=$	$t_5=$			
6º	$t_5=$	$t_6=$			
7º	$t_6=$	$t_7=$			
8º	$t_7=$	$t_8=$			
9º	$t_8=$	$t_9=$			
10º	$t_9=$	$t_{10}=$			
11º	$t_{10}=$	$t_{11}=$			
12º	$t_{11}=$	$t_{12}=$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \text{-----}; \Delta t_{12} = t_{12} - t_{11} = \text{-----}$$

5) Se alterarmos o número de subintervalos para 24, qual será a distância total?

6) Se alterarmos o número de subintervalos para 48, qual será a distância total?

7) Se alterarmos o número de subintervalos para 96, qual será a distância total?

8) Se alterarmos o número de subintervalos para 120, qual será a distância total?

9) Se alterarmos o número de subintervalos para 150, qual será a distância total?

10) Baseadas nas questões anteriores, como você poderia formalizar a distância total, sabendo que $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ são as extremidades dos subintervalos?

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada									

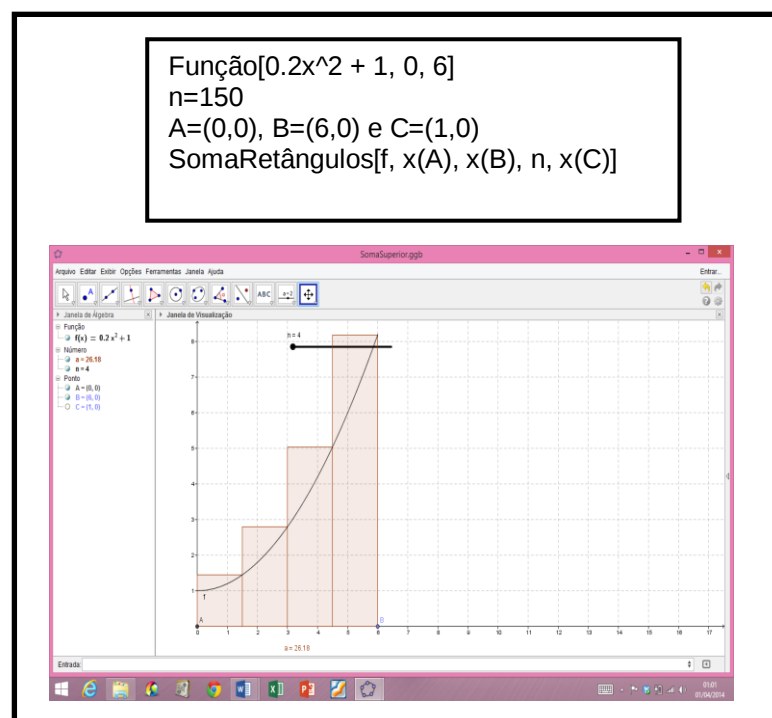
12) Com o crescimento de **n** na tabela acima, a distância total tende a chegar um valor exato. Qual é esse valor?

13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando **n** se torna arbitrariamente grande?

Parte II

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:

Figura 4: Soma superior



Fonte: Autor 2014

1) Preencha a tabela abaixo, usando as informações do gráfico

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0=$	$t_1=$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}$$

2) Repita o procedimento da questão 2, alterando o número de subintervalos para 2.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0=$	$t_1=$			
2º	$t_1=$	$t_2=$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}$$

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0=$	$t_1=$			
2º	$t_1=$	$t_2=$			
3º	$t_2=$	$t_3=$			
4º	$t_3=$	$t_4=$			
5º	$t_4=$	$t_5=$			
6º	$t_5=$	$t_6=$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

4) altere o número de subintervalos para 12.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
3º	$t_2 =$	$t_3 =$			
4º	$t_3 =$	$t_4 =$			
5º	$t_4 =$	$t_5 =$			
6º	$t_5 =$	$t_6 =$			
7º	$t_6 =$	$t_7 =$			
8º	$t_7 =$	$t_8 =$			
9º	$t_8 =$	$t_9 =$			
10º	$t_9 =$	$t_{10} =$			
11º	$t_{10} =$	$t_{11} =$			
12º	$t_{11} =$	$t_{12} =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \text{-----}; \Delta t_{12} = t_{12} - t_{11} = \text{-----}$$

5) Se alterarmos o número de subintervalos para 24, qual será a distância total?

6) Se alterarmos o número de subintervalos para 48, qual será a distância total?

7) Se alterarmos o número de subintervalos para 96, qual será a distância total?

8) Se alterarmos o número de subintervalos para 120, qual será a distância total?

9) Se alterarmos o número de subintervalos para 150, qual será a distância total?

10) Baseados nas questões anteriores, como você poderia formalizar a distância total, sabendo que $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ são as extremidades dos subintervalos?

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada									

12) Com o crescimento de **n** na tabela acima, a distância total tende a chegar um valor exato. Qual é esse valor?

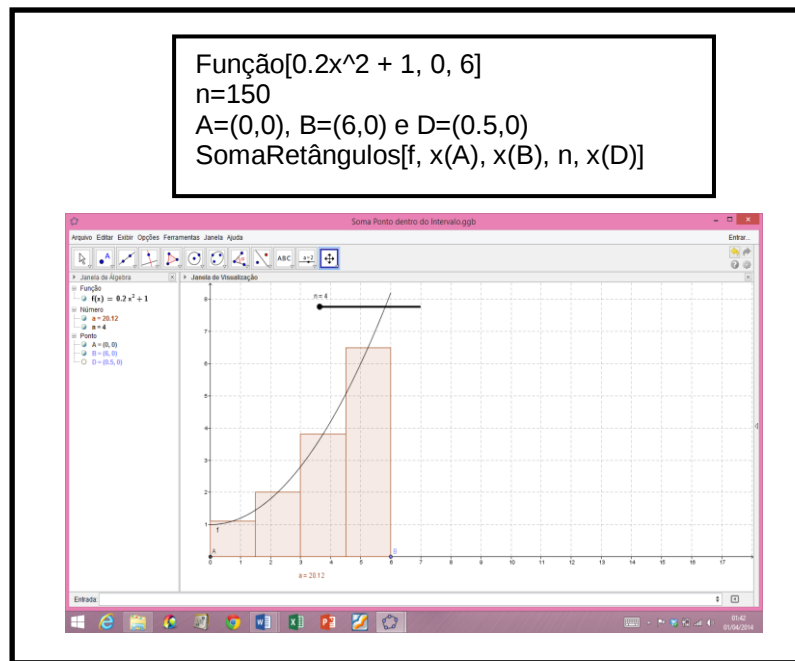
13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando **n** se torna arbitrariamente grande?

14) Comparando a questão 11 da parte I com a questão 11 da parte II, o que você acha que vai acontecer com essas distâncias quando **n** se torna arbitrariamente grande?

Parte III

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:

Figura 5: Soma dos pontos médios



Fonte: Autor 2014

1) Após a construção do gráfico, altere o número de subintervalos para 6 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

2) Altere o número de subintervalos para 12 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

O valor de t desta questão é o mesmo encontrado na questão (1)? _____

3) Altere o número de subintervalos para 24 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

O valor de t desta questão é o mesmo encontrado na questão (1) e na questão (2)? _____

4) De quantas maneiras você acha que é possível escolher o valor de t , com $t_4 < t < t_5$? Justifique sua resposta.

5) O que você observa em relação a distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

6) Baseada nas questões (1), (2) e (3) da parte III, como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

7) Analisando as partes I, II e III da atividade 4, a distância total depende do ponto t escolhido para construir os retângulos? Justifique sua resposta.

8) Comparando as partes I, II e III da atividade 4, o que você acha que vai acontecer com essas distâncias quando n se torna arbitrariamente grande?

Neste encontro, foi desenvolvida uma atividade dividida em três partes. A primeira parte com treze questões, a segunda com quatorze e a terceira com oito. As três situações apresentam função crescente. Os objetivos são comparar a construção de retângulos, utilizando, respectivamente, os extremos inferiores, os extremos superiores e os pontos médios dos intervalos da partição do intervalo de integração, para o cálculo de área; formalizar as somas de Riemann, visando à introdução do conceito de Integral.

Na primeira parte, o cálculo da distância total é feito a partir do cômputo da área de um número cada vez maior de retângulos, cujas alturas são valores da função velocidade no extremo inferior de cada intervalo da partição e as bases são os intervalos de tempo, que, neste caso, todos têm a mesma medida.

Já na segunda parte, o procedimento é o mesmo executado na primeira parte para o cálculo da distância total. Neste caso, as alturas dos retângulos são valores da função velocidade no extremo superior de cada intervalo da partição e as bases são os intervalos de tempo cujas essas medidas são todas iguais.

Na terceira parte, o procedimento para o cálculo da distância total foi o mesmo que o usado na primeira e na segunda parte, uma vez que, neste caso, as alturas dos retângulos são os valores da função velocidade nos pontos médios de cada intervalo da partição.

No que tange às partes I e II da atividade, esperamos que as duplas consigam perceber que as medidas das alturas dos retângulos são calculadas pelos extremos do intervalo da partição, bem como na parte III esperamos que elas percebam que a medida da altura dos retângulos não é nem o valor de $f(t_i)$ nem o de $f(t_{i+1})$, mas sim do ponto médio do i -ésimo intervalo.

Esperamos que as duplas consigam perceber que quanto maior a frequência com que medimos a velocidade, mais precisa ficará nossa estimativa para a distância total, ou seja, conforme aumentamos o número de retângulos utilizados para fazer o cálculo da distância total, melhor será a aproximação obtida para a distância total desejada. Além disso, esperamos que as duplas consigam formalizar o limite da soma das áreas dos n retângulos, com n tendendo para o infinito.

A atividade é uma adaptação da atividade 3 da dissertação Andersen (2011, p. 40).

4º Encontro

Atividade 5

- 1) Como você acharia a área sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$? Justifique sua resposta.
- 2) Se usarmos a partição do intervalo $[0,4]$, cujos sub-intervalos tenham medida $\Delta x_i = 1$, qual será o valor do número de subintervalos n e a medida da área da região sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$?
- 3) Responda a mesma pergunta utilizando o procedimento da questão 2, tomando agora $\Delta x_i = 0,5$.
- 4) Você teria como melhorar o resultado da medida da área dessa região? Justifique sua resposta.

Antes da realização da Atividade 6, os participantes receberam um texto para leitura que reproduzimos a seguir.

TEXTO PARA LEITURA

Se f representa a taxa de variação de alguma quantidade, então a soma inferior e a soma superior são aproximações da variação total da quantidade. Para procurar exatamente a variação total, tomamos n cada vez maior e olhamos os valores a que se aproximam as somas à esquerda e à direita.

Se f for contínua para $a \leq t \leq b$. A integral de f entre a e b , denotada por $\int_a^b f(t) dt$, é o limite da soma inferior ou da soma superior, com n subdivisões de $[a, b]$, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma inferior}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta t \right)$$

e

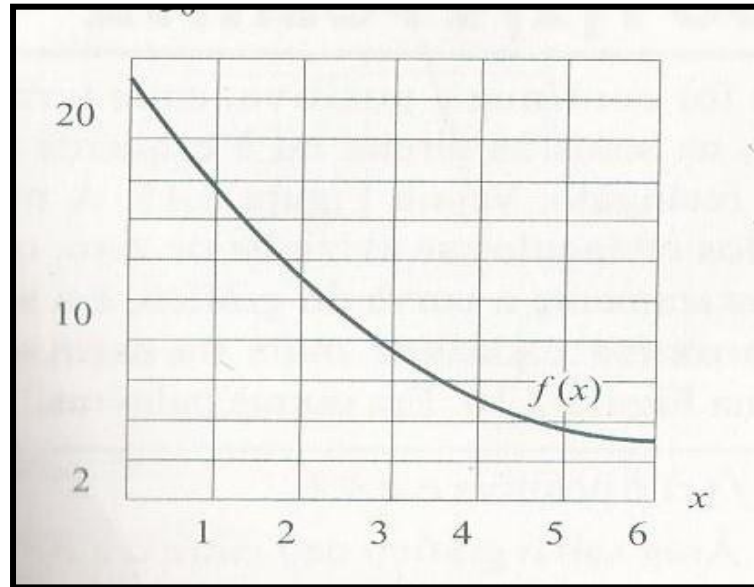
$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma superior}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t \right)$$

Cada uma destas somas chama-se uma soma de Riemann, f se chama função integranda, a e b chamam-se limites de integração. (HUGHES-HALLETT et al, 2009, p. 121).

Atividade 6

1) O gráfico da função f é dado na figura abaixo. Avalie a integral $\int_0^6 f(x) dx$

Figura 6: Gráfico da função f .



Fonte: Extraído do livro HUGHES-HALLETT et al, 2009, p. 123

- Represente no gráfico acima a soma inferior de Riemann e superior, com $n = 3$.
 - Escreva os termos da soma, mas não a calcule.
 - Podemos melhorar a precisão da área? Justifique sua resposta.
- 2) Usando uma calculadora, determine as somas inferior e superior, com $n = 4$ para $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.
- 3) Baseado na questão (2) como se comparam estas somas com o valor exato da integral?
- 4) Represente a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ como área

5) Explique, com suas palavras, o que significa a integral da função f no intervalo $[a, b]$, ou seja, $\int_a^b f(x) dx$.

Atividade 7

1) Suponha que uma população de bactérias cresça à taxa de $f(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora.

a) Dê “uma integral” que represente a variação total na população de bactérias durante as duas horas, de $t = 0$ a $t = 2$.

b) Faça uma representação de como você calcularia a variação total na população de bactérias durante as duas horas de $t = 0$ a $t = 2$.

Neste encontro, foram apresentadas três atividades. A atividade cinco com quatro questões, a seis com cinco e, a sete, com uma questão que está dividida em (a) e (b). Os objetivos com essas atividades são utilizar a formalização da definição de Integral, como limite da soma das áreas dos n retângulos, quando n tende ao infinito; avaliar uma Integral, após a institucionalização da soma de Riemann; e aplicar o conceito de Integral em algumas outras áreas de conhecimentos.

Na atividade cinco, a intenção é que as duplas possam compreender a relação entre a área de uma região plana sob uma curva e calcular a medida dessa área.

Na primeira questão da atividade seis, a intenção é fazer com que as duplas avaliem a integral $\int_0^6 f(x) dx$, representando-a no gráfico e escrevendo uma descrição para ela, baseada no gráfico.

Já na segunda, terceira, quarta e quinta questões da atividade seis, a intenção é verificar se as duplas conseguem calcular, com o auxílio das somas

inferior e superior, a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$; além disso, explicar o que significa a integral da função f no intervalo $[a,b]$ ou seja, $\int_a^b f(x) dx$.

Na atividade sete, a intenção é instigar os estudantes a realizar uma transferência do conhecimento já adquirido para outra área de conhecimento.

No que diz respeito à atividade cinco, esperamos que as duplas determinem n que é o número de partes em que o intervalo fora dividido; esperamos que elas compreendam as parcelas $f(x_i) \cdot 1$ e $f(x_i) \cdot 0,5$ como a área de retângulos, em que as medidas da base são 1 e 0,5 e $f(x_i)$ é a altura de um retângulo e que descrevam como método de cálculo de área a divisão da região em retângulos e considerem a área sob a curva como a soma da área dos retângulos considerados.

Na primeira questão da atividade seis, esperamos que as duplas consigam representar no gráfico a soma de Riemann, bem como escrevê-la com base no gráfico.

Nas outras questões da atividade seis, espera-se que as duplas consigam calcular, com o auxílio da soma Riemann, a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ e que percebam que valor encontrado é a medida da área da região sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1,2]$.

Já na atividade sete, esperamos que as duplas consigam usar o conceito de integral em outra área de conhecimento.

Na próxima seção, relatamos como se deram os encontros, ressaltando os principais eventos ocorridos em cada um deles.

3.2.5 - O experimento

Como mencionado anteriormente, os participantes desta pesquisa são 32 estudantes, organizados em 16 duplas, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), que não haviam estudado o conceito de Integral.

A sequência de ensino compostas por sete atividades tem a intenção de oferecer a possibilidade de experimentação, observação, análise e compreensão do conceito de Integral por parte dos alunos, pois acreditamos que essas atividades possam ajudar as duplas a se tornarem o elemento principal do processo de aprendizagem, levando-os a agir de forma autônoma. Nesse sentido, procuramos atuar apenas no acompanhamento e na observação durante o desenvolvimento das atividades e interferir apenas quando fosse extremamente necessário. Articulamos a função de pesquisador com a de mediador, de consultor e de incentivador da aprendizagem, sem que isso comprometa o processo de aprendizagem das duplas.

Essas atividades se realizaram no turno vespertino, fora do horário de aula. Cada encontro teve duração de três horas e ocorreu em sala de aula comum, com exceção do terceiro [encontro], que foi realizado no laboratório de informática e durou quatro horas. Esse acréscimo de tempo se deveu à necessidade de se realizar um trabalho de familiarização com o Geogebra antes da implementação das atividades.

Foram usados os gravadores dos celulares dos próprios alunos para captarem as discussões geradas entre cada dupla a respeito da resolução das questões e, também, foi usada uma filmadora para registrar os comportamentos e as interações entre os pesquisados e a socialização das soluções dos problemas na lousa feitas pelas duplas.

Ao primeiro encontro, compareceram 32 alunos, os quais, por livre escolha, dividiram-se em duplas. Para fins de análise dos protocolos, as duplas foram representadas pelos códigos D_A , D_B , D_C , D_D , D_E , ..., D_Q . Foi apresentado e discutido um roteiro dos procedimentos norteadores dos trabalhos em todos os

encontros, que é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas.

Em seguida, foram entregues a cada dupla as questões que constituem as atividades 1 e 2 para que fossem lidas e depois discutidas entre os alunos de cada dupla. A maioria das duplas respondeu todas as questões, somente cinco delas realizaram, no tempo disponível, até a terceira questão da atividade 2. Durante todo esse encontro, os alunos mostraram-se interessados na solução das questões, discutindo entre si cada dúvida surgida. Constatamos o que consideramos natural, um pouco de timidez por parte dos estudantes, no momento de socialização das suas soluções na lousa e na plenária para discutir as respectivas soluções dadas pelas duplas.

No segundo encontro estiveram presentes apenas 13 duplas. Ele se iniciou com a retomada dos principais resultados atingidos no encontro anterior. Os participantes desenvolveram a atividade 3; a maioria das duplas respondeu todas as questões, apenas uma delas trabalhou até a questão 17 e outra não respondeu nenhuma questão. Durante esse encontro, algumas duplas estavam com dificuldade para entender as questões: 2, 5, 6, 7 e 9. Foi necessária a intervenção do pesquisador para o esclarecimento dessas questões, levando em conta que ele é um mediador, consultor e incentivador da aprendizagem.

No terceiro encontro, também se iniciou retomando os principais resultados alcançados no encontro anterior. Estiveram presentes as mesmas 13 duplas do segundo encontro e, em seguida, foi solicitado que os alunos acessassem o GeoGebra para uma breve apresentação dos recursos que seriam utilizados por eles. Neste encontro foi desenvolvida a atividade 4 e a maioria das duplas não respondeu a questão 13 da parte I e II e a questão 6 da parte III, apenas duas duplas não responderam a parte III e duas não responderam as partes II e III. Durante o encontro, algumas duplas estavam com dificuldade para responder a questão 1 da parte I e para utilizar os comandos do GeoGebra, principalmente no que se refere àqueles destinados às operações básicas para a construção do gráfico.

O quarto encontro iniciou-se com uma síntese de tudo que foi produzido nos encontros anteriores e, em seguida, foram realizadas as atividades 5, 6 e 7. Cinco duplas não responderam a atividade 7 e seis deixaram de responder a questão 5 da atividade 6. No final desse encontro, foi realizado um debate para avaliarmos a sequência de ensino e a metodologia utilizada para o processo de introdução do conceito de Integral.

O próximo capítulo será dedicado à análise e à apresentação dos resultados alcançados.

ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise de dados relativos ao desempenho de três duplas durante o desenvolvimento da sequência de ensino. Os critérios utilizados para essa escolha foram a *produção*, a *participação* e a *frequência*, dos componentes das duplas.

Por um lado, a *produção* diz respeito ao fato de essas duplas terem fornecido uma quantidade maior de dados nos protocolos examinados; por outro lado, a *participação* diz respeito à quantidade e à qualidade dos diálogos mantidos no binômio pesquisador/dupla; por fim, a *frequência* diz respeito ao fato dessas duplas terem atingido 100% de presença, participando, portanto, de todas as atividades.

Em função da adoção desses três critérios – *produção*, *participação* e *frequência* –, consideramos o material fornecido por essas três duplas suficiente para identificar as evidências de aprendizagens mediadas pela Resolução de Problemas.

A análise foi produzida considerando os pressupostos teóricos e os objetivos de cada uma das atividades propostas, escolhendo aqueles itens que, em cada uma delas, foram consideradas mais relevantes para nossa pesquisa.

O que fazemos efetivamente nessa análise de dados foi cruzar os indícios de aprendizagens (mobilizados e em processo de mobilização), observados a partir de três campos analíticos, quais sejam :

- As proposições articuladas pelas atividades escritas e mediadas pela resolução de problemas;
- As estratégias desenvolvidas pelas duplas na solução dos problemas que irão contribuir para introdução do conceito de Integral;
- A verificação da existência ou não de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos nas respostas das duplas nos protocolos, presentes em algumas questões da sequência de ensino.

Durante a realização das atividades, orientamos as duplas quanto à realização das mesmas e procuramos esclarecer as possíveis dúvidas.

Após todas as duplas terem finalizado as atividades, realizamos as socializações de suas respostas no quadro com o intuito de fazermos uma análise de suas respostas. As duplas que foram analisadas são D_F , D_L e D_P .

4.1 – PRIMEIRO ENCONTRO

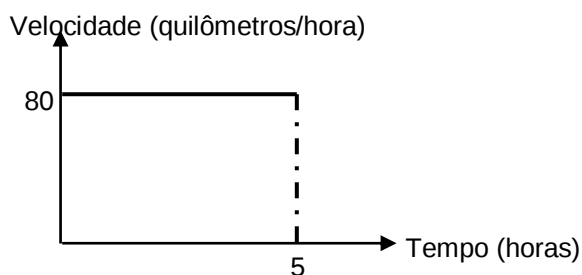
No dia 15/5/2014, ocorreu o primeiro encontro; aplicamos as atividades 1 e 2, subdivididas, a primeira em três questões e a segunda em quatro, que detalharemos a seguir:

Atividade 1

A questão 1 dessa atividade tem como enunciado:

- 1) O gráfico abaixo representa uma viagem realizada por uma pessoa em seu carro durante 5 horas. Observando-o, descubra qual foi a distância total percorrida por essa pessoa?

Gráfico 1: Velocidade x Tempo

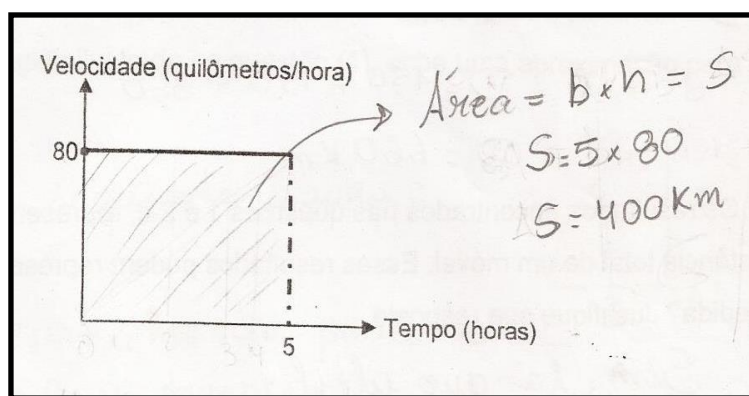


Fonte: Autor, 2014

O objetivo da questão é verificar se os estudantes identificam intuitivamente, com o recurso da visualização a distância percorrida.

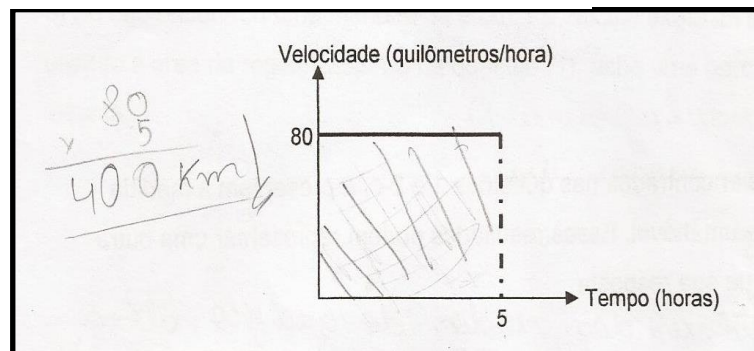
A expectativa era que eles conseguissem associar a área do retângulo com a distância total, pois a altura representa a medida da velocidade, a largura é a medida do intervalo do tempo. O conhecimento matemático necessário para o entendimento da questão é o de leitura e interpretação de gráfico e o de conceito de área. Apresentamos, abaixo, dois protocolos produzidos pelas duplas:

Figura 7: Produção da dupla D_F para questão 1



Fonte: Autor 2014.

Figura 8: Produção da dupla D_P para questão 1



Fonte: Autor 2014

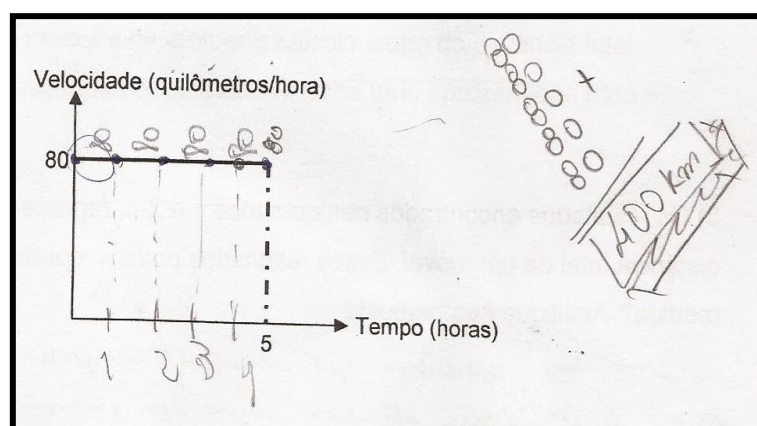
A estratégia utilizada pelas duplas D_F e D_P foi o uso do significado de área para encontrar a distância total, pois, como que estavam diante de uma região plana, optaram por utilizar o algoritmo para o cálculo da área de um retângulo, determinando a distância total.

Na socialização da sua resposta no quadro, a dupla D_F, mostrou como pensou na sua solução. Apresentamos o trecho da socialização do procedimento D_F:

D_F: *Toda vez que tivermos um gráfico da velocidade pelo tempo podemos encontrar a distância por meio da fórmula da área.*

Observamos, na sua defesa oral, que houve uma coerência entre os registros escritos e as suas argumentações orais. A dupla D_P utilizou essa mesma justificativa no momento da socialização.

Figura 9: Produção da dupla D_L para questão 1.



Fonte: Autor 2014.

Já a dupla D_L utilizou como estratégia uma relação hora por distância percorrida para o cálculo da distância total.

Na socialização da sua resposta no quadro esta dupla mostrou como pensou na sua solução. Apresentamos o trecho da socialização da resposta dada:

D_L: *A questão mostra uma velocidade constante de 80 km/h em um tempo de 5 horas, vamos dividir o gráfico em cada hora. Pois, em cada hora sua distância é de 80 km, então na 1ª hora, 80 km, na 2ª hora 80 km, na 3ª hora 80 km, na 4ª hora 80 km e 5ª hora 80 km. Depois somamos todos, e deu um total de 400 km, representando assim a distância total.*

Observamos, também, na defesa oral desta dupla, que houve uma coerência entre os registros escritos e as suas argumentações orais. Além disso, percebemos uma ideia intuitiva de partição no momento em que a dupla representa no seu protocolo a região dividida em cinco partes.

Nos protocolos das duplas D_F e D_P , percebemos que a componente formal e algorítmica contribui para as suas respostas. Já no protocolo da dupla D_L , percebemos que a componente intuitiva contribuiu para a sua resposta.

A questão 2 dessa atividade tem o enunciado:

2) Uma pessoa em seu carro viajou a 50 km/h durante 3 horas, depois a 75 km/h por 2 horas, depois a 90 km/h por 4 horas.

a) Esboce um único gráfico ilustrando as três situações da velocidade para a viagem descrita

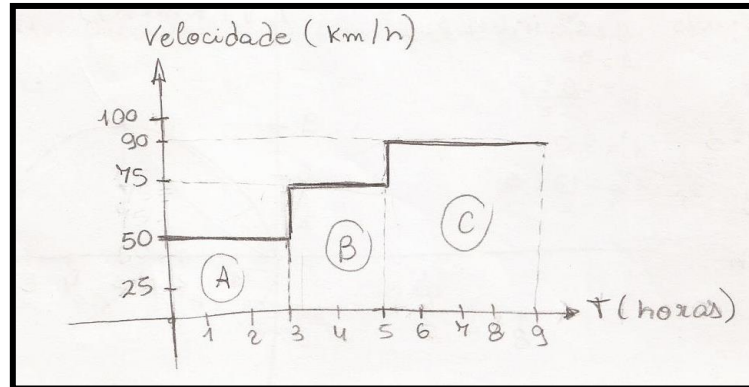
b) Determine a distância percorrida para cada intervalo de tempo, apenas observando o gráfico.

c) Determine de acordo com o que foi feito no item (b) a distância total percorrida.

O objetivo da questão era verificar se os alunos conseguiam esboçar gráfico da função velocidade e determinar a distância percorrida para cada intervalo de tempo e a distância total.

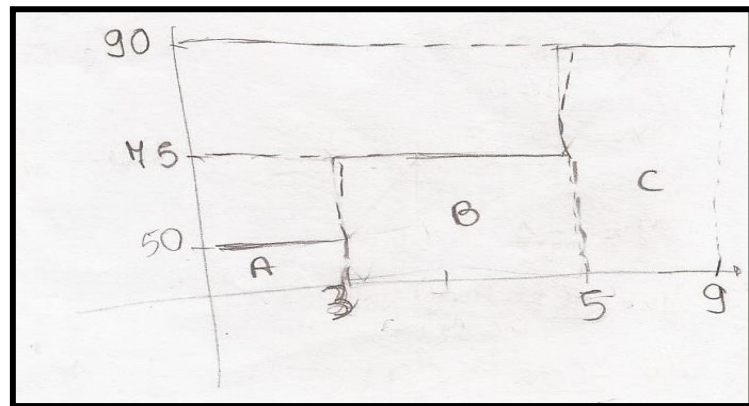
Esperávamos que as duplas conseguissem construir o gráfico da função velocidade, bem como que determinassem, por meio do procedimento utilizado na questão 1, a medida da distância percorrida para cada intervalo de tempo e a distância total. O conhecimento matemático necessário para o entendimento da questão é saber esboçar um gráfico de função constante por partes e usar os conhecimentos matemáticos utilizados na questão 1.

Figura 10: Produção da Dupla D_F , para o item (a)



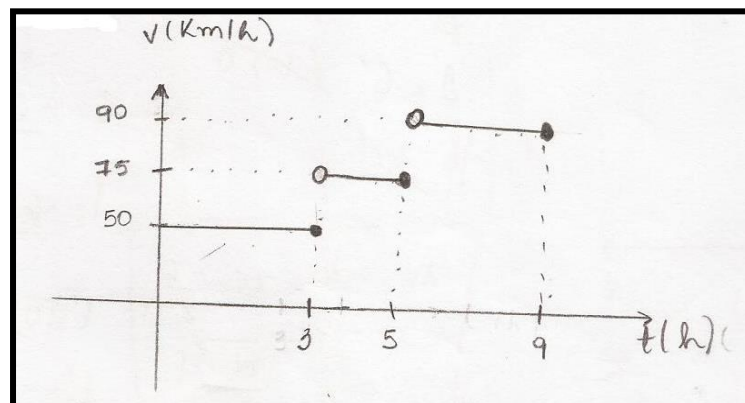
Fonte: Autor 2014.

Figura 11: Produção da dupla D_P , para o item (a)



Fonte: Autor 2014

Figura 12: Produção da dupla D_L , para o item (a)



Fonte: Autor 2014

As três duplas utilizaram como estratégia o gráfico de função constante, por partes, sendo que a D_P uniu os pontos indevidamente, caracterizando um gráfico que não representa função. Possivelmente isso tenha ocorrido dada a preocupação de indicar que o gráfico representaria um percurso contínuo do veículo. Já a D_L aparentemente demonstrou o cuidado de não atribuir dois valores para um mesmo ponto, para garantir que se tratava de uma função.

No entanto, quando questionados, os estudantes desta última dupla apresentaram argumentos que não condizem com o protocolo.

P: Porque vocês representaram no gráfico alguns pontos ‘cheios’ e outros não?

D_L: É para mostrar que no intervalo de 50km/h até 75km/h a velocidade varia.

P: Como assim?

D_L: Neste intervalo podemos ter a velocidade de 60km/h, 70km/h e outras. Assim, como no intervalo de 75km/h até 90km/h, podemos ter as velocidades de 80km/h, 85km/h e outras.

O que deu para perceber no diálogo foi que esses estudantes estavam interpretando que a velocidade variava no intervalo de 50km/h até 75km/h, assim como 75km/h até 90km/h, numa clara contradição com o gráfico apresentado.

No protocolo das duplas D_F e D_P , percebemos que as componentes formal e intuitiva contribuíram para a sua resposta. Já a dupla D_L , apesar de esboçarem o gráfico corretamente, a sua argumentação foi diametralmente oposta ao que registraram no protocolo.

Nos itens (b) e (c), em que se pedia para determinar as distâncias percorridas em cada intervalo e também a distância total, as três duplas apresentam respostas corretas. Observamos que todas elas apresentaram aquelas mesmas estratégias da questão 1. O componente algorítmico se revelou nas

respostas dadas duplas D_F e D_P , e o componente intuitivo foi predominante na resposta da dupla D_L , conforme mostram as produções a seguir:

Figura 13: Produção da dupla D_F

Item (b)

Calcula-se a área para determinar o D .

D para 50 km/h durante 3h.

(A) $D = 3 \times 50 = 150 \text{ km}$

D para 75 km/h durante 2h.

(B) $D = 2 \times 75 = 150 \text{ km}$

D para 90 km/h durante 4h.

(C) $D = 4 \times 90 = 360 \text{ km}$

Item (c)

Soma-se as distâncias encontradas.

$$D_A + D_B + D_C = D$$
$$D = 150 + 150 + 360$$
$$D = 660 \text{ km}$$

Fonte: Autor 2014.

Figura 14: Produção da dupla D_L

Item (b)

3h	-	50 Km/h	$\Rightarrow$	150 Km
2h	-	75 Km/h	$\Rightarrow$	150 Km
4h	-	90 Km/h	$\Rightarrow$	360 Km

Item (c)

$$150 \text{ Km} + 150 \text{ Km} + 360 \text{ Km}$$
$$300 \text{ Km} + 360 \text{ Km}$$
$$\underline{660 \text{ Km}}$$

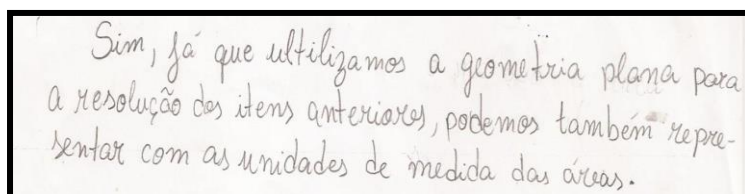
Fonte: Autor 2014.

A questão 3 assim se enunciava: Os resultados encontrados nas questões 1 e 2-c, representam a medida da distância total percorrida pelo móvel. Esses resultados podem representar uma outra medida? Justifique sua resposta

O objetivo era observar se os alunos percebiam a relação entre a distância total e a área de uma região plana.

As duplas D_F e D_P relacionaram suas respostas à medida de área de uma região. Isto mostrou que, por meio de um processo intuitivo, essas duplas conseguiram chegar a essa relação. Já a dupla D_L teve dificuldade em perceber tal relação, como se pode verificar em sua produção.

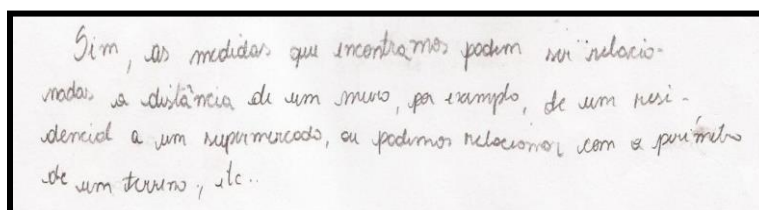
Figura 15: Produção da dupla D_F .



Sim, já que utilizamos a geometria plana para a resolução dos itens anteriores, podemos também representar com as unidades de medida das áreas.

Fonte: Autor 2014.

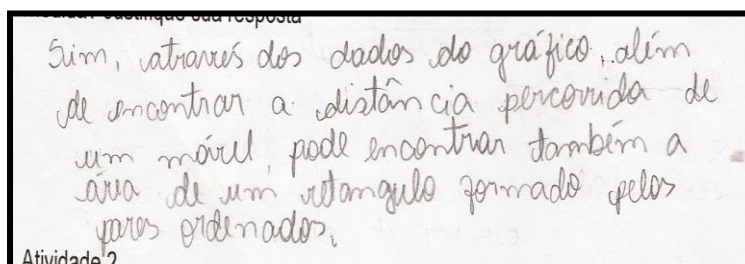
Figura 16: Produção da dupla D_P



Sim, as medidas que encontramos podem ter relação com a distância de um movimento, por exemplo, de um residencial a um supermercado, ou podemos relacionar com o comprimento de um terreno, etc..

Fonte: Autor 2014.

Figura 17: Produção da dupla D_L



Sim, através dos dados do gráfico, além de encontrar a distância percorrida de um móvel, pode encontrar também a área de um retângulo formado pelos pares ordenados.

Fonte: Autor 2014.

Apresentamos o diálogo que ocorreu entre a dupla D_L e o pesquisador na socialização da questão:

P: *Gostaria que vocês explicassem melhor as suas respostas.*

D_L: *Como professor?*

P: *Vocês estão relacionando a medida da distância total ao comprimento do muro ou a área dele?*

D_L: *Ao comprimento do muro.*

Esse diálogo evidencia que a dupla não conseguiu relacionar a medida da distância total com a medida da área da região plana fechada e limitada.

Atividade 2

Com a atividade 2, trabalhando-se com o gráfico de uma função (velocidade) contínua ‘limitando’ uma região plana não poligonal, pretendia-se investigar quais procedimentos matemáticos poderiam ser utilizados para buscar um valor aproximado da área da região e que estratégias seriam usadas para melhorar o cálculo da distância total.

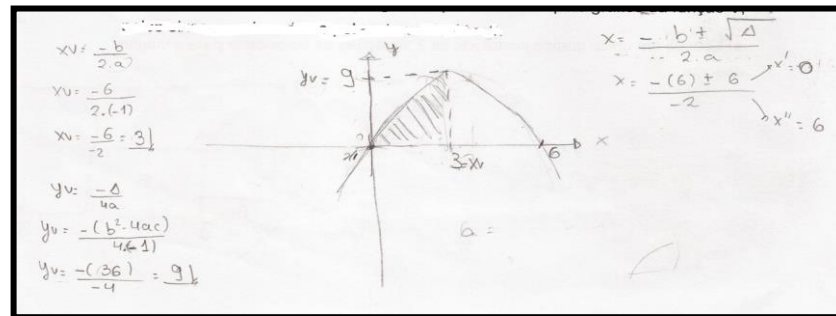
A questão 1 dessa atividade tem como enunciado:

1) Faça um esboço do gráfico da função velocidade dada por $V(t) = -t^2 + 6t$, em km/h, em que t representa o tempo em horas. Ilustre a região do plano limitada pelo gráfico da função V , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 3$.

O objetivo com essa questão era verificar se as duplas conseguiam esboçar o esboço do gráfico da função velocidade, identificar a região plana. Além disso, disso pretendia-se que os próprios estudantes construíssem subsídios para o posterior cálculo de áreas aproximadas.

Seguem os protocolos apresentados pelas duplas.

Figura 18: Produção da dupla D_P



Fonte: Autor 2014.

A estratégia trabalhada pela dupla D_P para o esboço do gráfico da função foi, percebendo que se tratava de uma parábola, utilizar fórmulas conhecidas para encontrar as raízes da função e o vértice da parábola. Revela-se aqui a componente algorítmica, associada a conhecimentos algébricos anteriores. Isto se explicita com muita força ao observar que as variáveis V e t foram substituídas por x e y em suas notações.

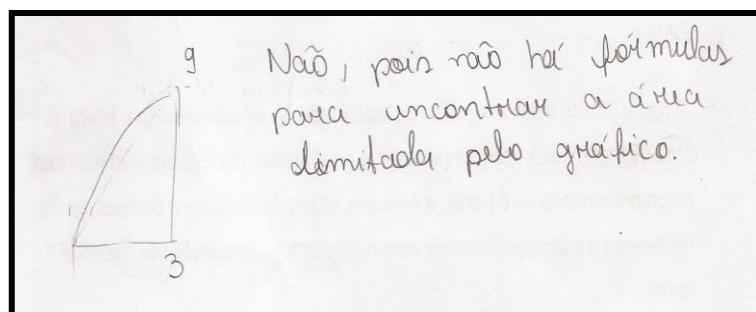
A dupla D_L utilizou a mesma estratégia para o esboço do gráfico da função que a D_P, porém mantendo as variáveis t e V , salvo nas notações das coordenadas do vértice da parábola. A dupla D_F também utilizou a mesma estratégia.

Pelos protocolos das três duplas, percebemos que a componente formal e a componente algorítmico prevaleceu na construção do esboço do gráfico.

Na questão 2 perguntava-se se é possível usar fórmulas da geometria para calcular a distância total exata usando a área da região assinalada na primeira questão.

Como era esperado, as três duplas responderam que não era possível calcular a distância total exata utilizando fórmulas da geometria. Ilustramos, a título de exemplo, a produção da dupla D_P.

Figura 19: Produção da dupla D_P



Fonte: Autor 2014.

Na socialização da sua resposta no quadro, a dupla D_P relatou como pensou para dar a sua resposta:

D_P: Não dá para usar uma fórmula da geometria, mas se usarmos uma fórmula da geometria teríamos uma área aproximada.

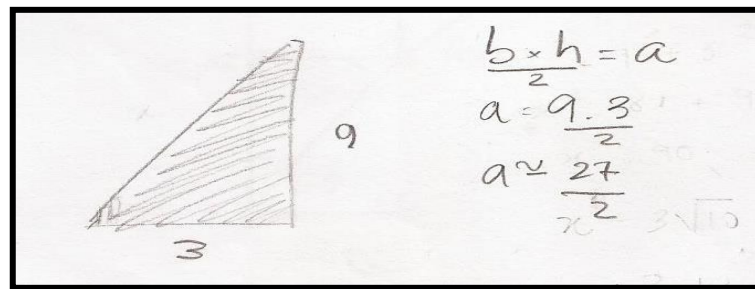
Observamos, na sua defesa oral, que houve uma diferença entre os registros escritos e as suas argumentações. Acreditamos que essa diferença se deu por influência do enunciado da terceira questão, que é:

3) Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da distância total usando a área da região ilustrada, ache uma aproximação para a mesma.

O objetivo da questão é investigar quais procedimentos matemáticos os alunos indicam que poderiam ser utilizados para melhorar o cálculo da distância total. Esperávamos que, para isso, as duplas conseguissem utilizar fórmulas que permitissem calcular a área de regiões conhecidas.

Apresentamos as produções desenvolvidas pelas duplas:

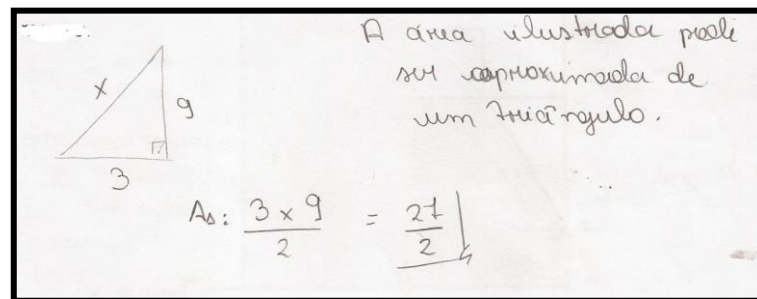
Figura 20: Produção da dupla D_L



Fonte: Autor 2014.

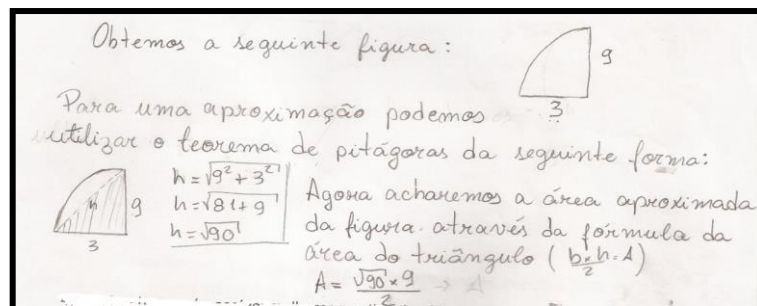
Esta dupla não apresentou qualquer explicação discursiva recorrendo apenas ao aspecto algorítmico, mas teve o cuidado de grafar sempre o sinal indicando 'aproximadamente'. Já as outras duas acrescentaram algum tipo de texto, como se pode observar em seus protocolos.

Figura 21: Produção da dupla D_P



Fonte: Autor 2014

Figura 22: Produção da dupla D_F



Fonte: Autor 2014

Observamos que a dupla D_F, apesar de indicar a utilização da área do triângulo, não conseguiu encontrar corretamente a medida.

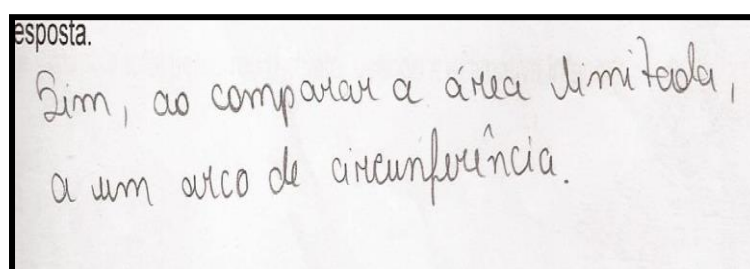
As três duplas utilizaram a mesma estratégia para o cálculo aproximado da distância total que foi a utilização da fórmula da área do triângulo.

Percebemos que a componente intuitiva e a componente algorítmico estiveram presentes nas respostas as três duplas.

A quarta questão objetivava investigar como os sujeitos poderiam buscar estratégias para melhorar a estimativa feita na questão (3).

Observamos que das três duplas, apenas duas responderam a essa questão. Nos protocolos e na socialização da questão, elas compararam a região gerada pelo gráfico como sendo uma aproximação de uma região circular, como se vê, por exemplo, na resposta reproduzida a seguir:

Figura 23: Produção da dupla D_F



Fonte: Autor 2014

Após a realização dessas atividades, analisamos juntamente com os estudantes as respostas que estavam no quadro, identificando os acertos e os erros que as duplas tiveram em suas resoluções e esses erros foram corrigidos. Após essa etapa de socialização, foi feita a formalização do conteúdo presente nas atividades, pois, os mesmos constituem o primeiro passo para a introdução do conceito de Integral.

Nesse primeiro encontro, no desenvolvimento das atividades, fomos percebendo algumas indicações sobre o processo de aprendizagem dos alunos, que se mostrou lento no início, pois os alunos sentiam dificuldades em expressar as conclusões nos protocolos e na socialização das respostas. Isso é explicitado por Melo (2002) que em sua pesquisa constatou, ao comparar as respostas escritas dadas pelos alunos com os comentários orais,

que eles apresentam grandes dificuldades em expressar seus argumentos por escrito, utilizando-se da linguagem matemática.

4.2 – SEGUNDO ENCONTRO

No dia 16/05/2014, ocorreu o segundo encontro; estiveram presentes 13 duplas, o pesquisador iniciou retomando os principais resultados atingidos no encontro anterior.

Neste encontro, foi realizada a atividade 3 cujo objetivo é iniciar a introdução, ainda que de maneira intuitiva, de procedimentos que poderão conduzir ao conceito de partição de um intervalo e encaminhar para o cálculo de soma de Riemann.

A atividade apresenta duas situações para o cálculo de área de retângulos, na busca de uma aproximação do valor da velocidade de um móvel em um intervalo de tempo, cujo gráfico é dado. A parte I apresenta o referido gráfico com uma partição do intervalo em quatro subintervalos e a parte II, com oito. As duas partes são compostas por questões, num total de vinte e duas.

Destacamos as respostas das questões que consideramos mais relevantes para nossa análise.

A questão 1 (parte I) e a questão 10 (parte II) encerram a mesma ideia. As questões têm como enunciados:

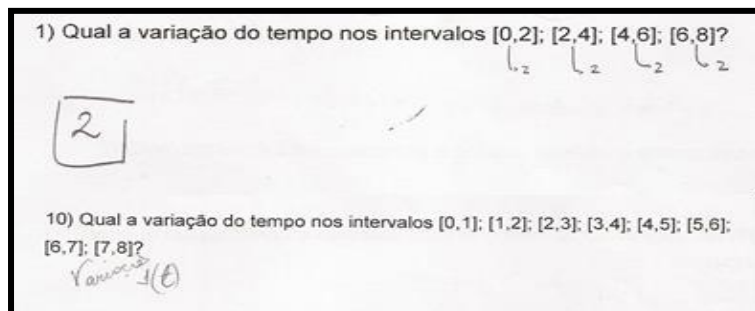
1) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,2]$; $[2,4]$; $[4,6]$; $[6,8]$?

10) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,1]$; $[1,2]$; $[2,3]$; $[3,4]$; $[4,5]$; $[5,6]$; $[6,7]$; $[7,8]$?

Com essas questões, o objetivo é que as duplas consigam perceber que em cada intervalo, a variação do tempo é igual e que o intervalo de tempo de 0 a 8 foi subdividido em quatro (na parte I) e em oito (na parte II). O conhecimento matemático necessário para a resolução da questão é o de partição de um intervalo.

Observamos as duplas conseguiram perceber que a variação do tempo é a mesma em cada intervalo. Mas nenhuma delas conseguiu perceber que estavam realizando uma partição de um intervalo. Apresentamos o protocolo de uma delas:

Figura 24: Produção da dupla D_L, para as questões 1 (parte I) e 10 (parte II)



Fonte: Autor 2014.

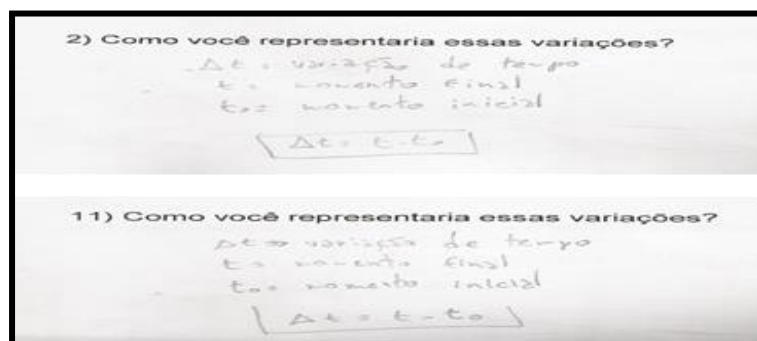
A questão 2 (parte I) e a questão 11 (parte II) tratam da mesma situação, variando apenas quanto à partição do intervalo. Seus enunciados são:

2) Como você representaria essas variações?

11) Como você representaria essas variações?

Observamos, conforme o esperado, que todas as três duplas criaram uma representação para essa variação. Apresentamos a produção desenvolvida pela dupla D_F:

Figura 25: Produção da dupla D_F, para as questões 2 (parte I) e 11 (parte II)



Fonte: Autor 2014.

Na socialização da sua resposta no quadro, essa dupla relatou como pensou na sua resposta.

D_F: Como a questão é de física, me lembrei que na física representamos a variação do tempo dessa forma.

Observamos esses estudantes mobilizaram conceitos estudados na Física para responder a essa questão. Também percebemos que a componente intuitiva estava presente nas respostas das três duplas.

As questões 5 (parte I) e 13 (parte II) têm como enunciados:

5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

13) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

O objetivo é usar o cálculo de área de retângulos para determinar a distância total por meio da estimativa inferior. Esperávamos que as duplas mobilizassem os conhecimentos já adquiridos nas atividades anteriores.

Ilustramos com as respostas dadas por duas duplas

Figura 26: Produção da dupla D_F

5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

$t = [0,2]$ $t = [2,4]$ $t = [4,6]$ $t = [6,8]$

$2 \times 4 = 8$ $2 \times 32 = 64$ $2 \times 52 = 104$ $2 \times 64 = 128$

Total = $8 + 64 + 104 + 128 = 304 \text{ Km}$

13) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

$[0,1]$ $[1,2]$ $[2,3]$ $[3,4]$ $[4,5]$ $[5,6]$

$1 \times 4 = 4$ $1 \times 19 = 19$ $1 \times 32 = 32$ $1 \times 43 = 43$ $1 \times 52 = 52$ $1 \times 59 = 59$

$[6,7]$ $[7,8]$

$1 \times 64 = 64$ $1 \times 67 = 67$

Total = $4 + 19 + 32 + 43 + 52 + 59 + 64 + 67$

$= 340 \text{ Km}$

Fonte: Autor 2014.

Observamos que a dupla D_F mobilizou conhecimentos já adquiridos nessa atividade que é o caso da representação de intervalo, bem como nas atividades anteriores que é o caso do cálculo de área e o da soma de áreas. Já a

dupla D_P assim como a D_L mobilizaram conhecimento de atividades anteriores que foi o cálculo de área e soma de áreas para determinar a distância total.

Figura 27: Produção da dupla D_P

5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \cdot 2 = 8 \\
 B &= 32 \cdot 2 = 64 \\
 C &= 52 \cdot 2 = 104 \\
 D &= 64 \cdot 2 = 128 \\
 \hline
 A_{\text{TOTAL}} &= 304 \text{ km}
 \end{aligned}$$

13) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

$$\begin{aligned}
 4 \times 1 &= \\
 19 \times 1 &= \\
 32 \times 1 &= \\
 43 \times 1 &= \\
 52 \times 1 &= \\
 59 \times 1 &= \\
 64 \times 1 &= \\
 67 \times 1 &=
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} A.T = 340$$

Fonte: Autor 2014.

Nas questões 6 (parte I) e 14 (parte II) era solicitado:

6) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

14) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

O objetivo é usar o cálculo de áreas de retângulos para determinar a distância total por meio da estimativa superior. Esperávamos que as duplas mobilizassem os conhecimentos já adquiridos nas atividades anteriores.

A seguir transcrevemos duas respostas apresentadas:

Figura 28: Produção da dupla D_F

6) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

$$\begin{aligned}
 t &= [0, 2] & t &= [2, 4] & t &= [4, 6] & t &= [6, 8] \\
 2 \times 32 &= 64 & 2 \times 52 &= 104 & 2 \times 64 &= 128 & 2 \times 68 &= 136 \\
 \hline
 \text{Total} &= 64 + 104 + 128 + 136 = 432 \text{ Km}
 \end{aligned}$$

14) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

$$\begin{aligned}
 [0, 1] & [1, 2] & [2, 3] & [3, 4] & [4, 5] & [5, 6] & [6, 7] \\
 1 \times 19 &= 19 & 1 \times 32 &= 32 & 1 \times 43 &= 43 & 1 \times 52 &= 52 & 1 \times 59 &= 59 & 1 \times 64 &= 64 & 1 \times 67 &= 67 \\
 [7, 8] & & & & & & & & & & & & \\
 1 \times 68 &= 68 & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 \text{Total} &= 19 + 32 + 43 + 52 + 59 + 64 + 67 + 68 \\
 &= 51 + 95 + 123 + 135 = 404 \text{ Km}
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor 2014.

Figura 29: Produção da dupla D_P

5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

$$A = 2.32 = 6.4$$

$$B = 2.52 = 10.4$$

$$C = 2.64 = 12.8$$

$$D = 2.88 = 13.6$$

$$A. TOTAL = 43.2 \text{ km}$$

14) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

$$19.1 = 3.2$$

$$3.2 = 4.3$$

$$4.3 = 5.2$$

$$5.2 = 6.4$$

$$6.4 = 7.6$$

$$7.6 = 8.8$$

$$8.8 = 10.4$$

$$AT = 10.4$$

Fonte: Autor 2014.

Observamos que a dupla D_F mobilizou conhecimento já adquirido nessa atividade que é o caso da representação de intervalo, bem como nas atividades anteriores que é o caso do cálculo de área e o da soma de áreas. Já as duplas D_P e D_L mobilizaram conhecimento de atividades anteriores que foi o cálculo de área e a soma de áreas para determinar a distância total.

De modo geral, nas questões 5 (parte I) e 13 (parte II) e nas questões 6 (parte I) e 14 (parte II) foi mobilizado o conhecimento de questões e de atividades anteriores em suas respostas. Podemos, também, observar que prevaleceram nas suas soluções apresentadas a componente formal e a componente algorítmico.

As questões 17 e 19 da parte II têm como enunciado:

17) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa inferior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

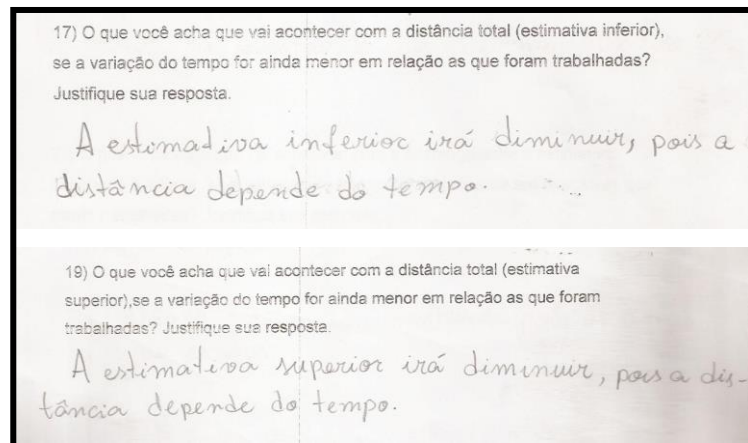
19) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa superior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

O objetivo é verificar se as duplas por meio da análise dos dados da distância total conseguem perceber que a distância total (estimativa inferior)

aumenta e a distância total (estimativa superior) diminui à medida que a variação do tempo for ainda menor.

Expomos a seguir as respostas de duas duplas.

Figura 30: Produção da dupla D_F



Fonte: Autor 2014.

No protocolo desta dupla, percebemos que na justificativa da questão 17 a dupla errou em sua resposta, mas na questão 19 sua justificativa já foi coerente com aquilo que se pedia.

Na socialização da sua resposta no quadro, a mesma dupla relatou como pensou a sua resposta da questão 17.

D_F: *Como a distância total (usando a estimativa inferior) é sempre menor quando comparamos com a distância total (usando a estimativa superior), chegamos à conclusão que ela irá diminuir.*

Observamos uma generalização do componente intuitivo, levando ao erro a sua resposta.

Figura 31: Produção da dupla D_P

17) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa inferior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

A distância total vai aproximar-se mais ainda da área percorrida pelo objeto.

19) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa superior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

relação 12

Fonte: Autor 2014.

Figura 32: Produção da dupla D_L .

17) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa inferior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

A aproximação tende a ser mais exata, pois percebemos que quanto mais reduzirmos a variação de tempo o resultado vai se tornando mais exato.

19) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa superior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

Ela vai diminuir, pois os ângulos das figuras vão reduzindo suas medidas.

Fonte: Autor 2014.

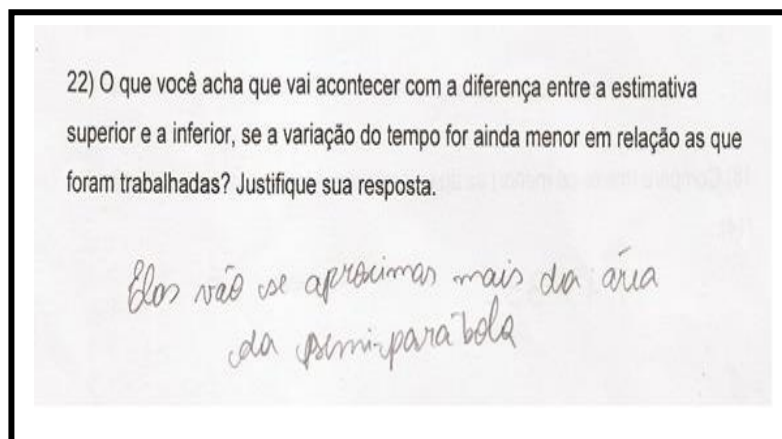
Observamos que as duplas D_P , assim com a D_L , em suas respostas, mobilizaram o conhecimento intuitivo de limite no momento que usaram as palavras “tende” e “aproxima-se”. Lira (2008) sustenta que o conceito de limite engloba muito mais que a definição. Ele envolve mecanismos cognitivos, que exercitamos desde criança tais como vizinhança, ordem, envolvimento e o contínuo. As produções dessas duplas ‘confirmam’ o pensamento de Lira. Percebemos, assim, que o componente intuitivo está presente em suas respostas.

A questão 22 da parte II pedia:

O que você acha que vai acontecer com a diferença entre a estimativa superior e a inferior, se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

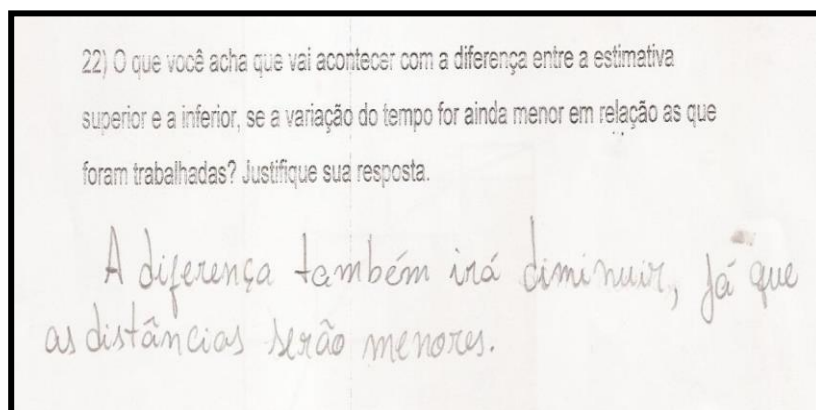
O objetivo era verificar se os estudantes conseguem perceber que a diferença entre a estimativa superior e a inferior é cada vez menor à medida que a variação do tempo for ainda menor. Apresentamos as produções desenvolvidas pelas duplas:

Figura 33: Produção da dupla D_p



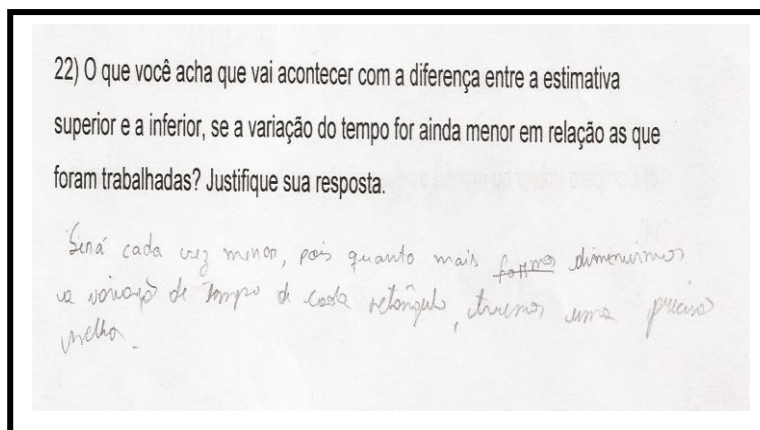
Fonte: Autor 2014.

Figura 34: Produção da dupla D_f



Fonte: Autor 2014.

Figura 35: Produção da dupla D_L



Fonte: Autor 2014.

Observamos que as três duplas atenderam ao objetivo da questão. A dupla D_L mostra que essa diferença de estimativa depende da variação do tempo, quanto menor essa variação do tempo, menor a diferença entre as estimativas. Isto mostrou que a dupla mobilizou uma ideia intuitiva de limite.

Por meio dessa atividade e da socialização das soluções no quadro, percebemos que as duplas conseguiram mobilizar alguns elementos já trabalhados nas atividades anteriores e nas atuais para responder as suas questões, como, por exemplo: cálculo de área, somatória de áreas, ideia intuitiva de limite, isto é, elementos que são essenciais para a introdução do conceito de Integral.

Percebemos um avanço na comparação do primeiro encontro para o segundo. Os alunos, em sua maioria, mostraram-se muito mais motivados e participantes durante a realização da atividade. Isto reforça o que Onuchic (1999) e Pinto (2010) dizem a respeito da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio da Resolução de Problemas: Ela contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem propício para o desenvolvimento das atividades, deixando os alunos usarem as suas próprias ideias e não simplesmente seguir diretrizes, bem como passarem a acreditar em suas próprias habilidades.

4.3 – TERCEIRO ENCONTRO

No dia 29/5/2014, ocorreu o terceiro encontro; estiveram presentes 13 duplas, o pesquisador iniciou retomando os principais resultados atingidos no encontro anterior e, em seguida, solicitou que as duplas abrissem o GeoGebra e fez uma breve apresentação dos recursos que seriam utilizados por eles. Neste encontro foi aplicado a atividade 4 que está dividida em três partes.

Na atividade 4, as três partes consistem no trabalho de comparar a construção de retângulos, utilizando os pontos inferiores, superiores e médios dos intervalos de partição, no cálculo de área; de formalizar o limite da soma das áreas dos n retângulos, com n tendendo para o infinito.

Escolheremos aquelas questões que, consideramos relevantes para nossa análise.

A questão 3 (parte I) e a questão 3 (parte II) possui a mesma ideia. As questões têm como enunciados:

Parte I – questão 3

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
3º	$t_2 =$	$t_3 =$			
4º	$t_3 =$	$t_4 =$			
5º	$t_4 =$	$t_5 =$			
6º	$t_5 =$	$t_6 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

Parte II – questão 3

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
2º	t ₁ =	t ₂ =			
3º	t ₂ =	t ₃ =			
4º	t ₃ =	t ₄ =			
5º	t ₄ =	t ₅ =			
6º	t ₅ =	t ₆ =			
Distância total (D _t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

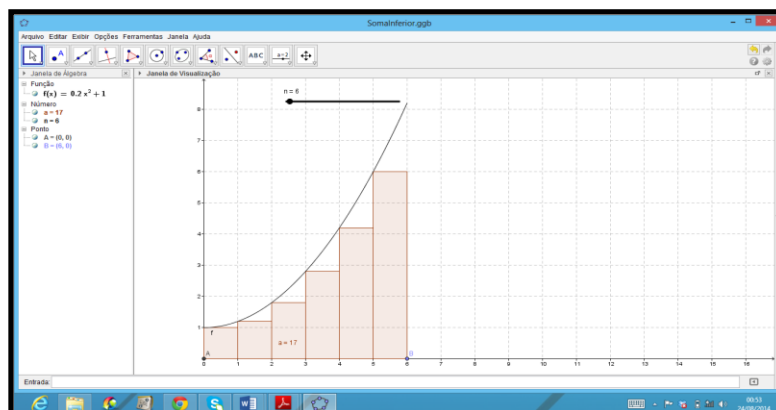
$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

Os objetivos são comparar a construção de retângulos, utilizando, respectivamente, os extremos inferiores, os extremos superiores dos intervalos da partição do intervalo de integração, para o cálculo de área.

Esperamos que as duplas consigam mostrar que a somatória das áreas dos retângulos pode ser interpretada como uma distância total, pois a altura representa a medida da velocidade, a largura é a medida do intervalo de tempo. O conhecimento matemático necessário para o entendimento da questão é leitura e interpretação de gráfico e o conceito de área. Apresentamos as produções desenvolvidas pelas duplas. Apresentamos as produções desenvolvidas pelas duplas.

O pesquisador solicitou para as duplas que lessem o comando da questão. Após a leitura do comando e a simulação no GeoGebra, obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 36: Gráfico obtido no GeoGebra da parte I – questão 3



Fonte: Autor 2014.

Figura 37: Produção da dupla D_L , para a questão 3 (parte I)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$1 - 0 = 1$	1	1
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$2 - 1 = 1$	$\approx 1,2$	$\approx 1,2$
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$3 - 2 = 1$	$\approx 1,3$	$\approx 1,3$
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	$4 - 3 = 1$	$\approx 1,8$	$\approx 1,8$
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	$5 - 4 = 1$	$\approx 2,2$	$\approx 2,2$
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	$6 - 5 = 1$	6	6
Distância total (D_L)					≈ 17

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{1 - 0}{1} = 1$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{2 - 1}{1} = 1$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = \frac{3 - 2}{1} = 1$;
 $\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \frac{4 - 3}{1} = 1$; $\Delta t_5 = t_5 - t_4 = \frac{5 - 4}{1} = 1$; $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \frac{6 - 5}{1} = 1$

Fonte: Autor 2014.

Figura 38: Produção da dupla D_F , para a questão 3 (parte I)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	1	1	1
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	1	1,2	1,2
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	1	1,3	1,3
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	1	1,8	1,8
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	1	2,2	2,2
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	1	6	6
Distância total (D_F)					17

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{1 - 0}{1} = 1$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{2 - 1}{1} = 1$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = \frac{3 - 2}{1} = 1$;
 $\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \frac{4 - 3}{1} = 1$; $\Delta t_5 = t_5 - t_4 = \frac{5 - 4}{1} = 1$; $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \frac{6 - 5}{1} = 1$

Fonte: Autor 2014.

Figura 39: Produção da dupla D_P, para a questão 3 (parte I)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	1	1	1
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	1	1,26	1,26
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	1	1,8	1,8
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	1	2,76	2,76
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	1	4,22	4,22
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	1	6	6
Distância total (D_t)					17

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 1$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 1$;
 $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = 1$

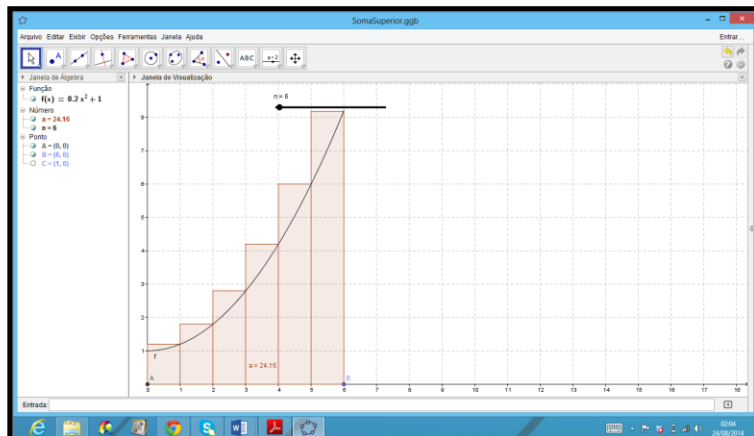
Fonte: Autor 2014.

As estratégias que essas duplas utilizaram para preencher as colunas “medida do tempo”, “medida do intervalo de tempo” e “medida da velocidade” da tabela da questão 3 (parte I), foram as informações contidas no gráfico. Bem como, para preencher a coluna “medida da distância”, as duplas utilizaram a multiplicação dos valores contidos na coluna “medida do intervalo de tempo” pelos valores contidos na coluna “medida da velocidade”. Por outro lado, para preencher a linha “distância total”, as duplas somaram todos os valores da coluna “medida da distância”.

Todas as três duplas preencheram a tabela da questão 3 (parte I). Observamos que as duplas utilizaram informações contidas no gráfico para preencher as colunas “medida do tempo”, “medida do intervalo de tempo” e “medida da velocidade”. Por outro lado, observamos também que as duplas utilizaram o algorítmico $\Delta t \cdot v$ para preencher a coluna “medida da distância” e para preencher a linha “distância total” realizaram a soma de todos os valores encontrados na coluna “medida da distância”. Isto mostra o conhecimento das duplas em trabalhar com análise gráfica e percebemos também, que elas mobilizaram conhecimentos adquiridos das atividades anteriores no preenchimento da tabela, tipo: medidas dos intervalos da partição do intervalo de integração, cálculo de área e somatória de áreas.

As duplas fizeram o que era solicitado na questão 3 (parte II) e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 40: Gráfico obtido no GeoGebra da parte II – questão 3



Fonte: Autor 2014.

Figura 41: Produção da dupla D_L para a questão 3 (parte II)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	1	1,2	1,2
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	1	1,8	1,8
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	1	2,8	2,8
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	1	4,2	4,2
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	1	6	6
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	1	8,2	8,2
Distância total (D_L)					24,2

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 1$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 1$;
 $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = 1$

Fonte: Autor 2014.

Figura 42: Produção da dupla D_P para a questão 3 (parte II)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	1	1,2	1,2
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	1	1,8	1,8
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	1	2,8	2,8
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	1	4,2	4,2
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	1	6	6
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	1	8,2	8,2
Distância total (D_P)					24,2

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 1$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 1$;
 $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = 1$

3
7
10
18
4,2
24,2

Fonte: Autor 2014.

Figura 43: Produção da dupla D_F , para a questão 3 (parte II)

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	1	1,22	1,22
2º	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	1	1,83	1,83
3º	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	1	2,8	2,8
4º	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	1	4,26	4,26
5º	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	1	6	6
6º	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	1	8,2	8,2
Distância total (D_t)					24,2

$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{1}{1}$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{1}{1}$; $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = \frac{1}{1}$;
 $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \frac{1}{1}$

Fonte: Autor 2014.

As estratégias que essas duplas utilizaram para preencher as colunas “medida do tempo”, “medida do intervalo de tempo” e “medida da velocidade” da tabela da questão 3 (parte II), foram as informações contidas no gráfico. Bem como, para preencher a coluna “medida da distância”, as duplas utilizaram a multiplicação dos valores contidos na coluna “medida do intervalo de tempo” pelos valores contidos na coluna “medida da velocidade”. Por outro lado, para preencher a linha “distância total”, as duplas somaram todos os valores da coluna “medida da distância”.

De um modo geral, as duplas repetiram as estratégias executadas nas questões 3 (parte I) e 3 (parte II) para as questões 1 (parte I), 2 (parte I), 4 (parte I), 1 (parte II), 2 (parte II) e 4 (parte II).

Na socialização das respostas das questões 1 (parte I), 2 (parte I) 3 (parte I), 4 (parte I), 1 (parte II), 2 (parte II), 3 (parte II) e 4 (parte II) no quadro nenhuma das duplas conseguiram perceber a relação existente entre o número de subintervalos e a medida Δt

No decorrer do preenchimento das tabelas, algumas duplas perceberam que o valor numérico (representado por **a**) que aparecia na janela de Álgebra do GeoGebra, tinha o mesmo valor da distância total calculado por elas.

Baseada nas estratégias utilizadas nas questões 1 (parte I), 2 (parte I) 3 (parte I), 4 (parte I), 1 (parte II), 2 (parte II), 3 (parte II) e 4 (parte II) que as duplas responderam as respectivas questões: 5 (parte I), 6 (parte I), 7 (parte I), 8 (parte I), 9 (parte I), 5 (parte II), 6 (parte II), 7 (parte II), 8 (parte II) e 9 (parte II).

A questão 11 (parte I) e a questão 11 (parte II) possuem a mesma ideia. As questões têm como enunciados:

Parte I – questão 11

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

Figura 44: Produção da dupla D_P, para a questão 11 (parte I)

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada	6	11,4	17	18,62	19,51	19,95	20,18	20,22	20,26

Fonte: Autor 2014.

Parte II – questão 11

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

Figura 45: Produção da dupla D_P, para a questão 11 (parte II)

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada	49,2	33	24,2	22,22	21,31	20,85	20,63	20,58	20,54

Fonte: Autor 2014.

A estratégia que essas duplas utilizaram para preencher a tabela foram as simulações geradas no GeoGebra. Observamos que as duplas utilizaram informações contidas nas suas simulações para o preenchimento da tabela.

A questão 13 (parte I) e a questão 13 (parte II) possuem a mesma ideia. As questões têm como enunciados:

Parte I – questão 13

13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

Figura 46: Produção da dupla D_P, para a questão 13 (parte I)

13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

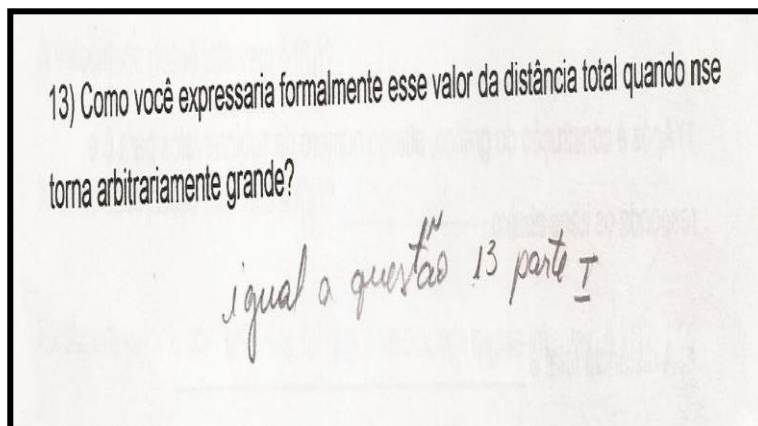
$$\sum_{i=1}^n \Delta t_n \cdot V_n$$

Fonte: Autor 2014.

Parte II – questão 13

13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

Figura 47: Produção da dupla D_P , para a questão 13 (parte II)



Fonte: Autor 2014.

Observamos nas respostas dada pelas duplas, que elas foram efetivadas de forma erradas. Mas, destacamos a resposta da dupla D_P para uma análise. Segundo Fischbein (1993) a intuição pode também trazer dificuldades para o processo de aprendizagem. Pois, a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual primitiva e limitada, porém fortemente enraizada, que anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e assim distorce ou bloqueia a reação matemática correta. Foi o que aconteceu com a dupla D_P no momento de formalizar a distância total e, no momento que afirma que a resposta da questão 13 (parte II) é igual a questão 13 (parte I).

As questões 1, 2 e 3 da parte III têm como objetivo comparar a construção de retângulos, utilizando, respectivamente, os pontos médios dos intervalos da partição do intervalo de integração, para o cálculo de área. Apresentamos a produção desenvolvida pela dupla D_P .

Figura 48: Produção da dupla D_P , para a questão 1, 2 e 3 (parte III)

1) Após a construção do gráfico, altere o número de subintervalos para 6 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é 20,3

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é 3

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? 5,05

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? 5,05

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? 5,05

2) Altere o número de subintervalos para 12 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é 20,35

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é 0,5

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? 2,02

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? 2,02

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? 2,02

O valor de t desta questão é o mesmo encontrado na questão (1)? sim

3) Altere o número de subintervalos para 24 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é 20,39

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é 0,25

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? 1,26

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? 1,26

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? 1,26

Fonte: Autor 2014.

Para responder as questões (1), (2) e (3) da parte III as três duplas utilizaram as informações contidas no gráfico. As três duplas não perceberam que a altura não era nem o valor de $f(t_4)$ nem o de $f(t_5)$, mas sim de algum valor entre os dois. Mas uma vez a intuição interferindo no processo de aprendizagem, no momento que mobilizou as mesmas ideias das atividades I e II para responder as questões (1), (2) e (3) da atividade III

Na socialização, o Pesquisador perguntou: O que vocês acham do uso do software GeoGebra no ensino de Integral? Apresentamos o trecho da socialização da resposta dada pelas duplas.

D_L : Ficou fácil acharmos a variação do tempo, a velocidade e a distância total.

D_L : Fica fácil o uso do GeoGebra na manipulação a respeito das quantidades de retângulos e o cálculo de área.

D_F : Ganhamos tempo, usando o GeoGebra, para responder as nossas respostas.

D_P: Observamos que no momento que aumentávamos o valor do n no GeoGebra o valor da somatória das áreas aumentava na atividade I e na atividade II, diminuía.

D_P: Deu para perceber por meio do GeoGebra que o valor da área na parte I, II e III da atividade 4 foram os mesmos valores na medida que aumento o número de retângulos.

Deu para perceber na fala da dupla D_P que ela percebeu que não importa o método que utilizamos para calcular esta área, obtemos sempre o mesmo valor.

Observamos nas falas das duplas a importância do uso de um software matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Estudos já realizados como de Melo (2002), Machado (2008), Ramos (2009), e Escher (2011), mostraram a importância de um software matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

4.4 – QUARTO ENCONTRO

No dia 02/6/2014, ocorreu o quarto encontro; estiveram presentes 13 duplas, o pesquisador iniciou as atividades, retomando os principais resultados atingidos no encontro anterior e, em seguida, entregou as atividades 5, 6 e 7.

Essas atividades, consistem na formalização do limite da soma das áreas dos n retângulos no cálculo da área e aplicar o conceito de integral em outras áreas de conhecimentos de forma que os alunos consigam fazer a transferência de conhecimentos.

Escolheremos aquelas questões que, consideramos relevantes para nossa análise no momento de forma que possamos atingir nossos objetivos.

A atividade 5 possui 4 questões; iremos neste momento analisar a atividade 5, com as respectivas questões 1, 2 e 4.

1) Como você acharia a área sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$? Justifique sua resposta.

2) Se usarmos a partição do intervalo $[0,4]$, cujos sub-intervalos tenham medida $\Delta x_i = 1$, qual será o valor do número de subintervalos n e a medida da área da região sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$?

3) Responda a mesma pergunta utilizando o procedimento da questão 2, tomando agora $\Delta x_i = 0,5$.

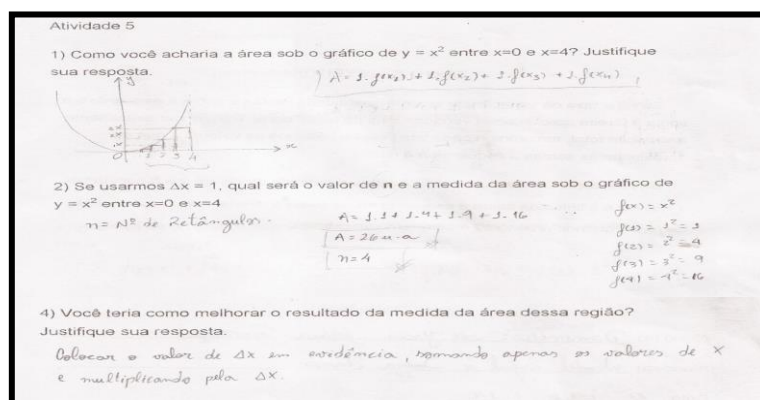
4) Você teria como melhorar o resultado da medida da área dessa região? Justifique sua resposta.

O objetivo dessa atividade é utilizar a formalização da definição de integral, como limite da soma das áreas dos n retângulos, quando n tende a infinito

Observamos que essas duplas alcançaram uma resposta coerente com aquilo que se pedia, pois na questão 1, a dupla mobilizou conhecimentos das atividades anteriores na sua resposta, fazendo o esboço gráfico e determinando as regiões (no gráfico) onde iriam calcular as respectivas áreas. Também mobilizou o processo algorítmico.

Já na questão 2, a dupla conseguiu utilizar os processos intuitivo e algorítmico, usando a ideia de área de retângulo para solução desta questão. Com relação a 4 questão, as duplas erraram as suas respostas, pois teriam que melhorar o resultado da medida da área, tornando-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de retângulos, isto é, quando $n \rightarrow \infty$

Figura 49: Produção da dupla D_P, para a questão 1, 2 e 4



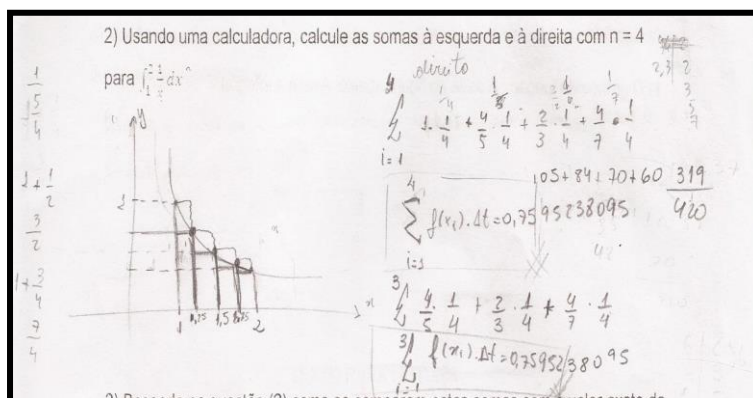
Fonte: Autor 2014.

A atividade 6 possui 5 questões; iremos neste momento analisar a atividade 6, com as respectivas questões 1, 2, 4 e 5.

Analisando a atividade 6, consideramos que o objetivo foi alcançado em parte, visto que as duplas conseguiram resolver integralmente ou parcialmente o que se propunha nas atividades, baseado em tudo que foi trabalhado nas atividades anteriores.

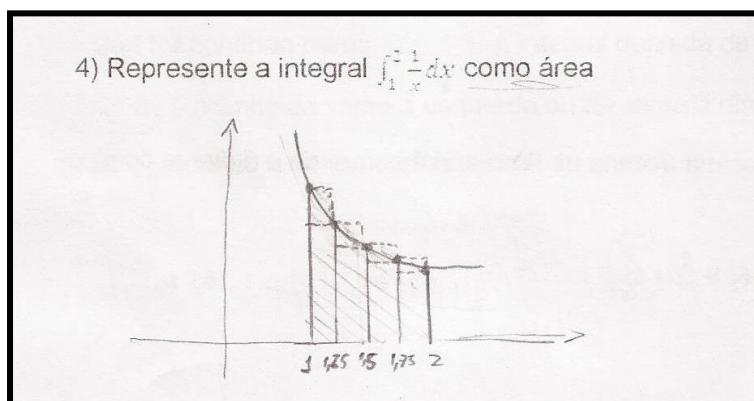
Na questão 2, a dupla D_P utilizou-se da análise gráfica, do componente algorítmico, e de cálculo de área para responder sua questão. Isto mostra que o conhecimento mobilizado nas atividades anteriores está sendo aplicado pela dupla nessa questão.

Figura 50: Produção da dupla D_P , para a questão 2



Fonte: Autor 2014.

Figura 51: Produção da dupla D_P , para a questão 4

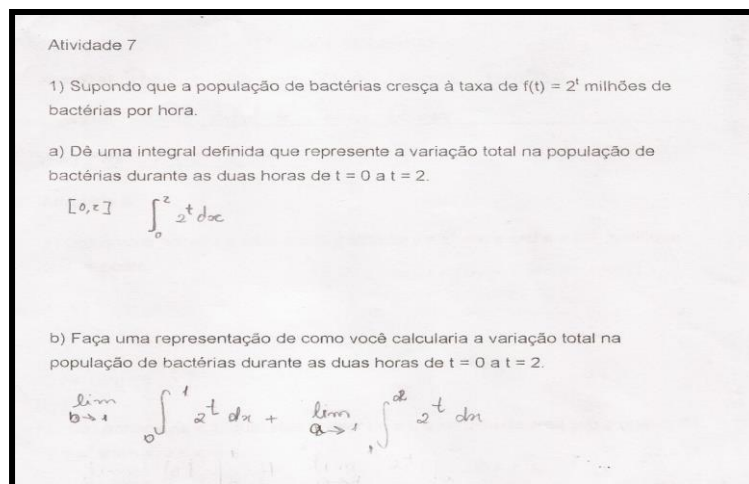


Fonte: Autor 2014.

A atividade 7 possui uma questão; iremos neste momento analisar a atividade 7, com os respectivos itens (a) e (b).

As três duplas analisadas apenas a dupla D_P respondeu essa atividade.

Figura 52: Produção da dupla D_P, para a atividade 7



Fonte: Autor 2014

Observamos que no item (a) a dupla representou corretamente a integral definida. Mas no item (b) a dupla errou a questão, pois mostra a importância da inter-relação entre categorias de Fischbein (1993), saber a definição de integral, não foi suficiente para resolver, espontaneamente a questão, pois, não foi desenvolvida na dupla uma habilidade para resolver o problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese teve por objetivo investigar o desempenho estratégico dos licenciandos em matemática frente a uma sequência de ensino que visa ao processo de introdução ao conceito de Integral por meio da Resolução de Problemas, bem como identificar em suas estratégias de resolução, observando a predominância individual e/ou simultânea dos aspectos básicos das atividades matemáticas, segundo Fischbein, quais sejam: a intuição, o algoritmo e o formal.

A sequência de ensino desenvolvida abordou alguns conceitos preliminares necessários à compreensão do conceito de Integral tais como: partição de intervalos, notações de limites e de somatória e o cálculo aproximado de áreas pela soma de Riemann. Adotamos, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, segundo Onuchic e Allevato e buscamos identificar as três categorias descritas por Fischbein presentes em uma atividade matemática, a saber: o formal, o algoritmo e o intuitivo, com o intuito de responder a nossa questão de pesquisa: *Como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para alunos de Licenciatura em Matemática, utilizando-se a metodologia da Resolução de Problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein?*

Em certos momentos foi utilizado o software GeoGebra, como ferramenta de visualização de gráficos e também para agilização de cálculos.

A estratégia do ensino da matemática por meio de resolução de problemas mostrou-se eficaz no sentido de dar oportunidade aos estudantes de discutir suas estratégias de resolução, quer no interior da dupla, quer no momento

da socialização das soluções, quer na plenária, contribuindo para que os mesmos passassem a apresentar certa autonomia e criticidade em suas produções.

Podemos observar que os sujeitos, no primeiro encontro mostraram-se tímidos, mas que, pouco a pouco, em diversas etapas propostas pelo roteiro de resolução de problemas, foram se sentindo mais seguros em apresentar suas estratégias de resolução, participando com mais autonomia das discussões, revelando assim, uma posição mais crítica quanto suas respostas e as dos colegas, começando a se tornar, de fato, agente de sua aprendizagem. Este fato se revelou nas oportunidades em que os estudantes apresentavam uma estratégia de solução na lousa e, na argumentação oral, já acrescentavam outros elementos.

No primeiro encontro, do desenvolvimento das atividades, fomos percebendo algumas indicações sobre o processo de aprendizagem dos alunos, que se mostrou lento no início, pois eles sentiam dificuldade em produzir as conclusões nos protocolos e na socialização das respostas. Esse fato já havia sido explicitado por Melo (2002) que em sua pesquisa constatou, ao comparar as respostas escritas dadas pelos alunos com os comentários orais, que eles apresentam grandes dificuldades em expressar seus argumentos por escrito, utilizando da linguagem matemática.

Ao final, é possível apontar as seguintes contribuições da metodologia de ensino de Onuchic e Allevato (2004) e as três categorias de Fischbein (1993) na nossa pesquisa.

Observamos, ainda, que a discussão em grupo é de fundamental importância e traz grandes contribuições para a aprendizagem de um conceito, haja vista que se torna viável a reflexão do caminho a percorrer para se à solução de um problema, além de conferir autonomia para as duplas no momento de discussão das estratégias planejadas. Percebemos um avanço na medida em que os encontros iam acontecendo, nos quais os alunos em sua maioria mostravam-se mais motivados e participantes durante a efetivação da atividade. Isto corrobora com que Onuchic afirma a respeito da metodologia de ensino e aprendizagem da matemática por meio da Resolução de Problemas: que

contribue para criação de um ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento das atividades, permitindo que os alunos usem as suas próprias ideias e que não, simplesmente, sigam diretrizes pré-estabelecidas, estimulando-os a acreditarem em suas competências e habilidades para construir seu conhecimento.

Percebemos, por meio da sequência de ensino, que as duplas conseguiram mobilizar conhecimento de uma atividade para outra, como é o caso da representação da partição de intervalo e do cálculo e soma de áreas.

A maioria dos alunos conseguiu superar os obstáculos que apresentavam nas dificuldades da aprendizagem de ideias iniciais envolvidas no conceito de Integral, enfatizando certos aspectos comprobatórios nas respostas dadas. Observamos também que nos protocolos eram visíveis os aspectos de Fischbein, predominantemente o algoritmo, e com menor frequência o aspecto intuitivo se manifestavam em suas soluções.

Percebemos também, nas falas das duplas a importância do uso de um *software* matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Estudos já realizados como de Melo (2002), Machado (2008), Ramos (2009), e Escher (2011), mostraram a importância de um *software* matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Acredita-se que, o uso de um *software* matemático deve ser um caminho a ser seguido pelos educadores comprometidos com a educação.

Observamos, alguns erros na solução dos problemas dados pelas duplas, pois esses erros mostraram a importância da inter-relação entre categorias de Fischbein (1993), saber a definição de um conteúdo matemático, não é suficiente para resolver, espontaneamente a questão, pois, não foi desenvolvida no sujeito uma habilidade para resolver o problema.

Respondendo especificamente a questão de pesquisa como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para alunos de Licenciatura em Matemática, utilizando-se a metodologia da Resolução de Problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein, os resultados de pesquisa permitem concluir que os alunos

conseguiram identificar as ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral na perspectiva dos aspectos de Fischbein , por meio da Resolução de Problemas.

Enfim, esperamos que os resultados alcançados nesta pesquisa possam contribuir com a Educação Matemática no sentido de avançar na compreensão das dificuldades para melhor ensinar e aprender Integral.

O trabalho também contribuiu para nossa prática pedagógica, no sentido de refletir sobre a possibilidade/necessidade de oferecer ao futuro professores oportunidades para vivenciar uma metodologia que concorra para a sua formação inicial, colaborando no desenvolvimento de sua autonomia, criticidade e conscientização de sua capacidade de construir os seus próprios conhecimentos; e aos professores que trabalham com Cálculo Diferencial e Integral, fica a sugestão de uma sequência de ensino a ser utilizada, como as modificações consideradas necessárias, na introdução do conceito de Integral.

Como expectativa de pesquisas futuras, sugere-se a possibilidade de outros temas matemáticos como: a introdução do conceito de limite e derivada envolvendo os aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein e como podemos identificar as inter-relações dos aspectos de Fischbein nas atividades matemáticas.

REFERENCIAS

ABDELMALACK, A. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Derivada para o Curso de Engenharia Através da Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado, UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL, 175 p, 2011.

ANDERSEN, E. **As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 128 p, 2011.

ASSIS, L. S. **Uma aproximação prática no ambiente de trabalho: Resolução de Problemas em Matemática e Processo de Manutenção de Sistemas Computacionais**. Tese de Doutorado, PUC/SP, 170 p, 2011.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado, FE-USP, 219 p, 1999.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. **A PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução de Magda França Lopes. 3ª.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DALL'ANESE, C. **Argumentos e Metáforas Conceituais para a Taxa de Variação**. Tese de Doutorado, PUC-SP, 131 p, 2006

D'AMBRÓSIO, U. **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas**. (In:http://www.rc.unesp.br/serp/apresentacoes/reflexoes_sobre_rp_ubiratan_dambrosio.pdf, em 16/03/2013 as 10:56

DIETRICH, P. S. **Ensino e Aprendizagem da Integral Definida: Contribuições da Engenharia Didática**. Dissertação de Mestrado, UNIFRA, 125 p, 2009.

ESCHER, M. A. **Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem.** Tese de Doutorado, UNESP/Rio Claro, 222 p, 2011.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics.** An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel, 1987.

_____. **THE INTERACTION BETWEEN THE FORMAL, THE ALGORITHMIC, AND THE INTUITIVE COMPONENTS IN A MATHEMATICAL ACTIVITY.** In: BIEHLER, R. et al. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. V. 13. New York: Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 231-245.

FROTA, M.C.R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo.** In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (Org.). Educação Matemática: a pratica educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5ª edição. São Paulo: Editora Atlas. 2010.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. **Local magnification and theoretical-computational conflicts.** Atas do PME-16, Vol. 1, p. 277, UK, 2002.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** 8ª edição. Rio de Janeiro: Editora Record. 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** 2ª edição. São Paulo: Editora Livros Técnicos e Científicos Editora. 1987.

GUIMARÃES, O. L. C. **Cálculo Diferencial e Integral: do algebrismo às representações múltiplas.** Grupo de trabalho GT-19 Educação Matemática – 25ª reunião, 2002 (In: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/home.php?id=25>, em 13/10/2012 as 1:27)

HENRIQUES, Afonso. **L'enseignement et l'apprentissage des integrales multiples: analyse didactique integrant l'usage du logiciel Maple** (Thèse de Doctorat), Grenoble: Université Joseph Fourier, IMAG, 320p, 2006.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática na e além da sala de aula.** Dissertação de Mestrado, UNESP, 253 p, 2006.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo e aplicações.** 4ª edição. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 186 p, 2008.

KLINE, Morris. **Why Jonhny can't add: The failure of the new Mathematics.** New York: St. Martin's Press, 1973.

LEME, J.C.M; IGLIORI, S.B.C. **A compreensão conceitual da noção de derivada: uma leitura no livro didático.** II SIPEM, 2003

LIMA, G. L. **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994.** Tese de Doutorado, PUC/SP, 445 p, 2012

LIRA, A. F. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais.** Tese de Doutorado, UFRGS, 191 p, 2008.

MACHADO, R. M. **A visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP.** Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 287 p, 2008.

MARINCEK, V. **Aprender Matemática resolvendo problemas.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: Uma proposta computacional para seu Ensino e Aprendizagem.** Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 180 p, 2002.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília: Ministério da Educação, 1998.

Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: Ministério da Educação, 2001.

NASSER, L. **AJUDANDO A SUPERAR OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO.** SBEM, 2007

(In: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Mesa/Artigo%20Lilian%20MR13.doc, em 10/05/2013 as 20:20)

OLIVEIRA, A. H. **A noção de Integral no contexto das concepções operacional e estrutural.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 98 p, 2004.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer Pesquisa Qualitativa.** 3ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes. 2010.

ONUICHIC, L. R.; BOERO, M. L. Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa. **Bolema**, Rio Claro, n. 27, p. 93-139. 2007. Traduzido do original:

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap. 3, p. 49-64.

ONUICHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.(Org) Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUICHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C (Org). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 213-231.

Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011 (In: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223514005>, em 05/03/2012 as 17:30)

A SALA DE AULA, A PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A PRODUÇÃO CIENTÍFICA DO GTERP; SBEM (In: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:E2iAe3WLn4J:www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO47973757953T.rtf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br, em 05/04/2013 as 16:15)

PINTO, S. P. W. **Ensino e Aprendizagem de Derivada na Educação Matemática a Distância por meio da Metodologia da Resolução de Problemas.** Dissertação de Mestrado, UNIFRA, 130 p, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência. 2006.

RAMOS, V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 85 p, 2009

REIS, F.S. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 302 p. 2001

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** In MACHADO, N.; CUNHA, M.(org) *Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática*. Escrituras, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, M.V. **O Ensino do Conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas.** Dissertação de Mestrado, UNESP-RIO CLARO, 327 p, 2010

ROMBERG, T. A. **Perspectives on scholarship and research methods.** In: GROUWS, D. A. *Handbook research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64

SALLEH, T. S. A.; ZAKARIA, E. **The Effects of Integrating Technology on Students' Conceptual and Procedural Understandings in Integral Calculus;** Asian Social Science; vol. 8, n.16, p. 16, 2012 (In: <http://www.ccsenet.org/journal/index.php/ass/article/view/22678>, em 10/03/2013 as 00:47)

SANGOI, E. **Contribuições da Resolução de Problemas e do Software Maple para a Aprendizagem Significativa dos Conceitos e Propriedades da Derivada**. Dissertação de Mestrado, UNIFRA, 152 p, 2010

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 03, p. 393-413. 2011

SCHROEDER, T. L. & LESTER jr., F. K. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**. In TRAFTON, P. R. & SHULTE, A. P. (eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston: NCTM, pp. 31-42, 1989.

SPIVAK, M. **Calculus**. London: W. A. Benjamin, 1965.

STEWART, J. **Cálculo**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum**. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *the teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

TALL, D. (Ed.): **Advanced Mathematical Thinking**. 289 p., Kluwer, 1991.

TALL, D; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular Reference to Limits and Continuity**. *Educational Studies in Mathematics*, 12, p.151-169, 1976.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, ed.4, 2001. 478 p.

VAZ, L. C. **Os conceitos de Limite, Derivada e Integral em Livros Didáticos de Cálculo e na perspectiva de Professores de Matemática e de disciplinas específicas em Cursos de Engenharia**. Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, 177 p, 2010.

VIANNA, C.S.: **Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery**, Tese de doutorado apresentada à Universidade de Londres, 1998.

VIDIGAL, L. F. **Conhecimentos Mobilizados por alunos sobre a noção de Integral no contexto das concepções operacionais e estruturais**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 143 p, 2007.

ANEXOS

ANEXO - 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: **“O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS IDEIAS PRELIMINARES ENVOLVIDAS NO CONCEITO DE INTEGRAL, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”**, desenvolvida por ***Gilberto Emanuel Reis Vogado***.

Fui informado (a) que:

- a) A pesquisa é orientada pelo ***Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva***;
- b) O uso das informações por mim fornecidas está de acordo com as normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos;
- c) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de coleta de dados elaborados pelo pesquisador,
- d) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e seu orientador.

Por fim, fui esclarecido (a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Belém (PA), _____ de _____ de 2014.

Assinatura do (a) participante:

Assinatura do Pesquisador:

ANEXO – 2

QUESTIONÁRIO

Aluno

(a) _____

Aluno

(a) _____

Data: ____ / ____ / ____

Atividade 1

1) O gráfico abaixo representa uma viagem realizada por uma pessoa em seu carro, durante 5 horas. Observando o gráfico, descubra qual foi a distância total percorrida por essa pessoa?

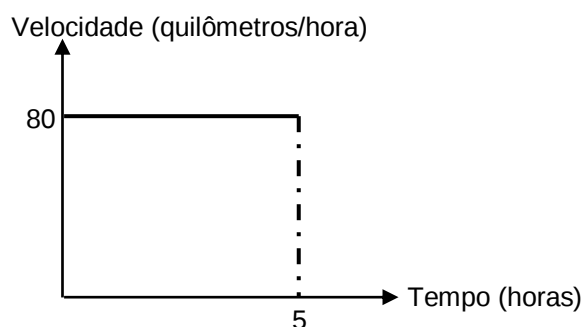


Figura 1: Autor, 2014

2) Uma pessoa em seu carro viajou a 50 km/h durante 3 horas, depois a 75 km/h por 2 horas, depois a 90 km/h por 4 horas.

a) Esboce um único gráfico ilustrando as 3 situações da velocidade para a viagem descrita.

b) Determine a distância percorrida para cada intervalo de tempo, apenas observando o gráfico.

c) Determine, de acordo com o que foi feito no item (b) a distância total percorrida.

3) Os resultados encontrados nas questões 1 e 2-c, representam a medida da distância total percorrida pelo móvel. Esses resultados podem representar uma outra medida? Justifique sua resposta

Atividade 2

1) Faça um esboço do gráfico da função velocidade dada por $V(t) = -t^2 + 6t$ em km/h, em que t representa o tempo em horas. Ilustre a região do plano limitada pelo gráfico da função V , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 3$.

2) É possível usar fórmulas da geometria para calcular a distância total exata usando a área da região acima ilustrada? Justifique sua resposta.

3) Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da distância total usando a área da região ilustrada na questão (1), ache uma aproximação para a mesma.

4) Você acha que é possível melhorar a estimativa feita na questão (3)? Justifique sua resposta.

QUESTIONÁRIO

Aluno

(a) _____

Aluno

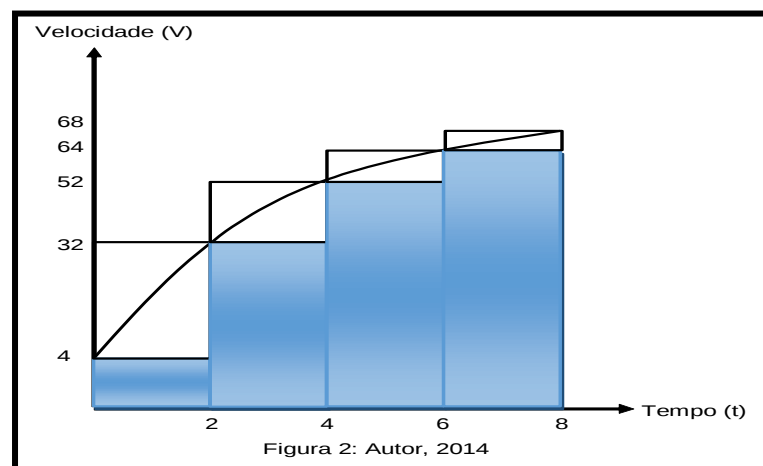
(a) _____

Data: ____/____/____

Atividade 3

Parte I

A figura abaixo mostra o gráfico da velocidade, V , de um objeto (em km/h), representada pela função f . A área dos retângulos escuros representa a estimativa inferior para distância total percorrida pelo objeto durante as 8 horas, e a área dos retângulos escuros e brancos, juntos, representa a estimativa superior para distância total percorrida nas mesmas 8 horas.



- 1) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,2]$; $[2,4]$; $[4,6]$; $[6,8]$?
- 2) Como você representaria essas variações?
- 3) No gráfico acima calcule $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ e $f(8)$

4) Os valores de $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ e $f(8)$ podem ser identificados das seguintes formas:

a) No campo da função esses valores são identificados como:

b) No campo da física eles são identificados como:

c) No campo da geometria são identificados como:

5) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?

6) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?

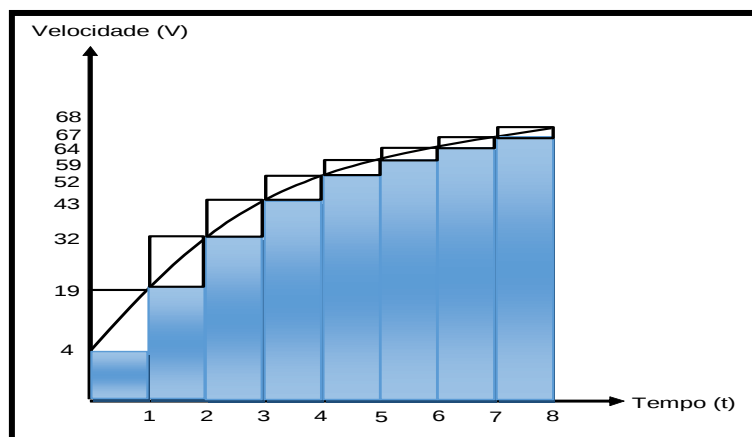
7) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões (5) e (6).

8) Qual a diferença entre a estimativa superior e a inferior nas questões (6) e (5)

9) Você acha que é possível melhorar as estimativas feitas nas questões (5) e (6)? Justifique sua resposta.

Parte II

O gráfico abaixo mostra medidas mais frequentes da velocidade



- 10) Qual a variação do tempo nos intervalos $[0,1]$; $[1,2]$; $[2,3]$; $[3,4]$; $[4,5]$; $[5,6]$; $[6,7]$; $[7,8]$?
- 11) Como você representaria essas variações?
- 12) No gráfico acima calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ e $f(8)$.
- 13) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa inferior?
- 14) Que distância total percorreu o objeto, usando a estimativa superior?
- 15) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões (13) e (14).
- 16) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões 5 e (13).
- 17) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa inferior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

18) Compare (maior ou menor) as duas distâncias encontradas nas questões 6 e (14).

19) O que você acha que vai acontecer com a distância total (estimativa superior), se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

20) Qual a diferença entre a estimativa superior e a inferior nas questões (14) e (13)

21) Compare (maior ou menor) os resultados encontrados nas questões 8 e (20)

22) O que você acha que vai acontecer com a diferença entre a estimativa superior e a inferior, se a variação do tempo for ainda menor em relação as que foram trabalhadas? Justifique sua resposta.

QUESTIONÁRIO

Aluno

(a) _____

Aluno

(a) _____

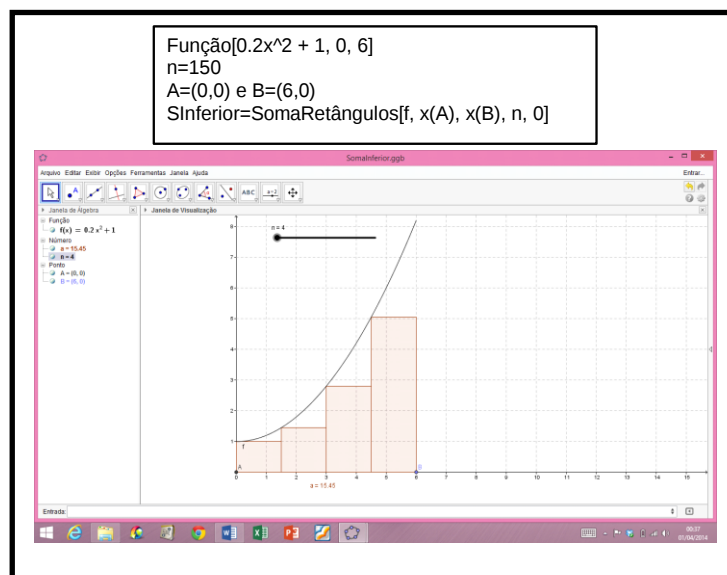
Data: ____/____/____

Atividade 4

Utilize o Geogebra para construir o gráfico da função velocidade de um móvel, dada por $V(t) = 0,2t^2 + 1$ em km/h, com o tempo t em horas. Ilustre a região do plano limitada pelo gráfico da função V , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 6$.

Parte I

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:



1) Preencha a tabela abaixo, usando as informações do gráfico

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
Distância total (D _t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}$$

2) Repita o procedimento da questão 2, alterando o número de subintervalos para 2.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
2º	t ₁ =	t ₂ =			
Distância total (D _t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}$$

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
2º	t ₁ =	t ₂ =			
3º	t ₂ =	t ₃ =			
4º	t ₃ =	t ₄ =			
5º	t ₄ =	t ₅ =			
6º	t ₅ =	t ₆ =			
Distância total (D _t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

4) altere o número de subintervalos para 12.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
3º	$t_2 =$	$t_3 =$			
4º	$t_3 =$	$t_4 =$			
5º	$t_4 =$	$t_5 =$			
6º	$t_5 =$	$t_6 =$			
7º	$t_6 =$	$t_7 =$			
8º	$t_7 =$	$t_8 =$			
9º	$t_8 =$	$t_9 =$			
10º	$t_9 =$	$t_{10} =$			
11º	$t_{10} =$	$t_{11} =$			
12º	$t_{11} =$	$t_{12} =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \text{-----}; \Delta t_{12} = t_{12} - t_{11} = \text{-----}$$

5) Se alterarmos o número de subintervalos para 24, qual será a distância total?

6) Se alterarmos o número de subintervalos para 48, qual será a distância total?

7) Se alterarmos o número de subintervalos para 96, qual será a distância total?

8) Se alterarmos o número de subintervalos para 120, qual será a distância total?

9) Se alterarmos o número de subintervalos para 150, qual será a distância total?

10) Baseadas nas questões anteriores, como você poderia formalizar a distância total, sabendo que $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ são as extremidades dos subintervalos?

11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

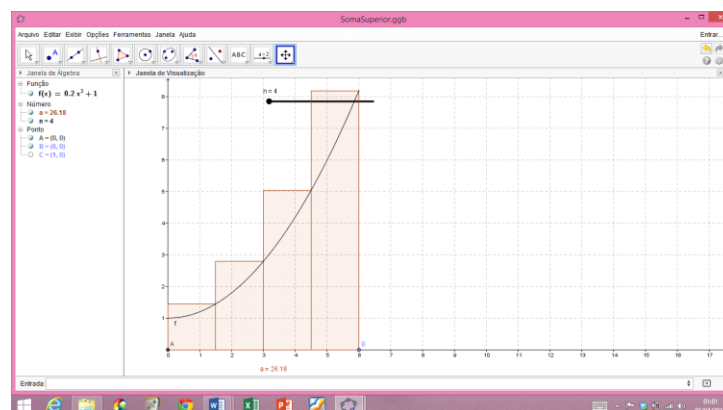
N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada									

12) Com o crescimento de **n** na tabela acima, a distância total tende a chegar um valor exato. Qual é esse valor? 13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando **n** se torna arbitrariamente grande?

Parte II

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:

```
Função[0.2x^2 + 1, 0, 6]
n=150
A=(0,0), B=(6,0) e C=(1,0)
SSuperior=SomaRetângulos[f, x(A), x(B), n, x(C)]
```



1) Preencha a tabela abaixo, usando as informações do gráfico

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}$$

2) Repita o procedimento da questão 2, alterando o número de subintervalos para 2.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	$t_0 =$	$t_1 =$			
2º	$t_1 =$	$t_2 =$			
Distância total (D_t)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}$$

3) altere o número de subintervalos para 6.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
2º	t ₁ =	t ₂ =			
3º	t ₂ =	t ₃ =			
4º	t ₃ =	t ₄ =			
5º	t ₄ =	t ₅ =			
6º	t ₅ =	t ₆ =			
Distância total (D _i)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \text{-----}$$

4) altere o número de subintervalos para 12.

Retângulo	Medida do tempo (t)		Medida do intervalo de tempo (Δt)	Medida da velocidade (V)	Medida da Distância (D)
1º	t ₀ =	t ₁ =			
2º	t ₁ =	t ₂ =			
3º	t ₂ =	t ₃ =			
4º	t ₃ =	t ₄ =			
5º	t ₄ =	t ₅ =			
6º	t ₅ =	t ₆ =			
7º	t ₆ =	t ₇ =			
8º	t ₇ =	t ₈ =			
9º	t ₈ =	t ₉ =			
10º	t ₉ =	t ₁₀ =			
11º	t ₁₀ =	t ₁₁ =			
12º	t ₁₁ =	t ₁₂ =			
Distância total (D _i)					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{-----}; \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{-----}; \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \text{-----};$$

$$\Delta t_4 = t_4 - t_3 = \text{-----}; \Delta t_{12} = t_{12} - t_{11} = \text{-----}$$

- 5) Se alterarmos o número de subintervalos para 24, qual será a distância total?
- 6) Se alterarmos o número de subintervalos para 48, qual será a distância total?
- 7) Se alterarmos o número de subintervalos para 96, qual será a distância total?
- 8) Se alterarmos o número de subintervalos para 120, qual será a distância total?
- 9) Se alterarmos o número de subintervalos para 150, qual será a distância total?
- 10) Baseadas nas questões anteriores, como você poderia formalizar a distância total, sabendo que $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ são as extremidades dos subintervalos?
- 11) A tabela seguinte representa o valor aproximado da distância total em função do tempo. Preencha a tabela com as informações das questões anteriores.

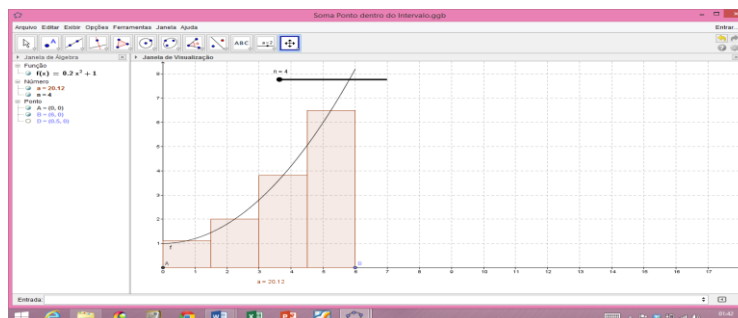
N	1	2	6	12	24	48	96	120	150
Distância total aproximada									

- 12) Com o crescimento de n na tabela acima, a distância total tende a chegar um valor exato. Qual é esse valor?
- 13) Como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?
- 14) Comparando a questão 11 da parte I com a questão 11 da parte II, o que você acha que vai acontecer com essas distâncias quando n se torna arbitrariamente grande?

Parte III

Execute no GeoGebra as seguintes ações para construção do gráfico:

Função[$0.2x^2 + 1, 0, 6$]
 $n=150$
 $A=(0,0)$, $B=(6,0)$ e $D=(0.5,0)$
S.P.D.I:=SomaRetângulos[f, x(A), x(B), n, x(D)]



1) Após a construção do gráfico, altere o número de subintervalos para 6 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

2) Altere o número de subintervalos para 12 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

O valor de t desta questão é o mesmo encontrado na questão (1)? _____

3) Altere o número de subintervalos para 24 e responda os itens abaixo.

a) A distância total é _____

b) Observe o 5º retângulo.

O intervalo de tempo é _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_4)$? _____

A velocidade nesse intervalo é $f(t_5)$? _____

Existe um valor t , com $t_4 < t < t_5$, tal que a velocidade nesse intervalo é $f(t)$? ____

O valor de t desta questão é o mesmo encontrado na questão (1) e na questão (2)? _____

4) De quantas maneiras você acha que é possível escolher o valor de t , com $t_4 < t < t_5$? Justifique sua resposta.

5) O que você observa em relação a distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

6) Baseada nas questões (1), (2) e (3) da parte III, como você expressaria formalmente esse valor da distância total quando n se torna arbitrariamente grande?

7) Analisando as partes I, II e III da atividade 4, a distância total depende do ponto t escolhido para construir os retângulos? Justifique sua resposta.

8) Comparando as partes I, II e III da atividade 4, o que você acha que vai acontecer com essas distâncias quando n se torna arbitrariamente grande?

QUESTIONÁRIO

Aluno

(a) _____

Aluno

(a) _____

Data: _____ / _____ / _____

Atividade 5

- 1) Como você acharia a área sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$? Justifique sua resposta.
- 2) Se usarmos a partição do intervalo $[0,4]$, cujos sub-intervalos tenham medida $\Delta x_i = 1$, qual será o valor do número de subintervalos n e a medida da área da região sob o gráfico de $y = x^2$ entre $x=0$ e $x=4$?
- 3) Responda a mesma pergunta utilizando o procedimento da questão 2, tomando agora $\Delta x_i = 0,5$.
- 4) Você teria como melhorar o resultado da medida da área dessa região? Justifique sua resposta.

TEXTO PARA LEITURA

Se f representa a taxa de variação de alguma quantidade, então a soma inferior e a soma superior são aproximações da variação total da quantidade. Para procurar exatamente a variação total, tomamos n cada vez maior e olhamos os valores a que se aproximam as somas à esquerda e à direita.

Se f for contínua para $a \leq t \leq b$. A integral de f entre a e b , denotada por $\int_a^b f(t) dt$, é o limite da soma inferior ou da soma superior, com n subdivisões de $[a, b]$, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma inferior}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta t \right)$$

e

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma superior}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t \right)$$

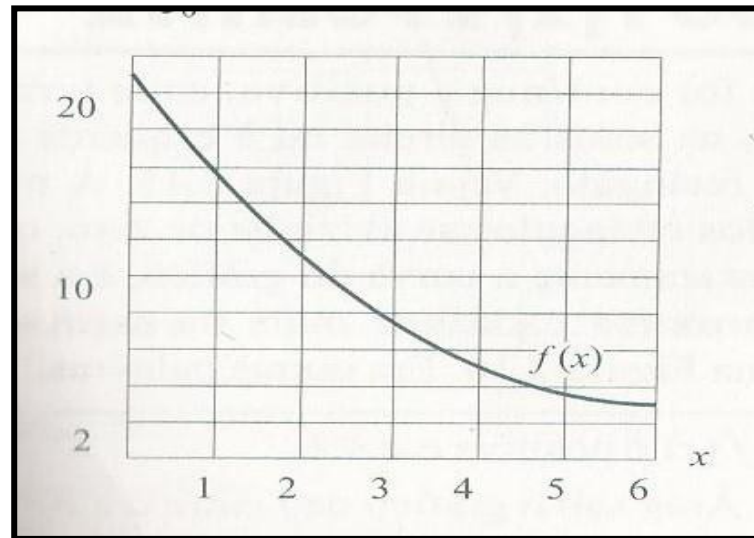
Cada uma destas somas chama-se uma soma de Riemann, f se chama função integranda, a e b chamam-se limites de integração. (HUGHES-HALLETT et al, 2009, p. 121).

Atividade 6

Objetivo: Nesta atividade após a institucionalização do conceito de integral pela construção de retângulos espera-se que os grupos sejam capazes, de avaliar uma integral.

1) O gráfico da função f é dado na figura abaixo. Avalie a integral $\int_0^6 f(x) dx$

Figura 6: Gráfico da função f .



Fonte: Extraído do livro HUGHES-HALLETT et al. 2009. p. 123

a) Represente no gráfico acima a soma inferior de Riemann e superior, com $n = 3$.

b) Escreva os termos da soma, mas não a calcule.

c) Podemos melhorar a precisão da área? Justifique sua resposta.

2) Usando uma calculadora, determine as somas inferior e superior, com $n = 4$ para $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

3) Baseado na questão (2) como se comparam estas somas com o valor exato da integral?

4) Represente a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ como área

5) Explique, com suas palavras, o que significa a integral da função f no intervalo $[a, b]$, ou seja, $\int_a^b f(x) dx$.

Atividade 7

1) Suponha que uma população de bactérias cresça à taxa de $f(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora.

a) Dê “uma integral” que represente a variação total na população de bactérias durante as duas horas, de $t = 0$ a $t = 2$.

b) Faça uma representação de como você calcularia a variação total na população de bactérias durante as duas horas de $t = 0$ a $t = 2$.