

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

Luis Carlos Pereira

**Educação de Jovens e Adultos: uma experiência com a
Modelagem Matemática**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

2015

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Luis Carlos Pereira

**Educação de Jovens e Adultos: uma experiência com a
Modelagem Matemática**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática** sob a orientação da **Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglori**.*

São Paulo

2015

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me fortalecido nos momentos difíceis que passei no desenvolvimento desse trabalho, e pelo dom de aprender e educar.

Agradeço muito à Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglíori, pela competência na orientação, e paciência para me apontar as diretrizes do caminho a ser percorrido.

Agradeço à Professora Doutora Ana Lúcia Manrique e ao Professor Doutor Roberto Fecchio por aceitarem fazer parte da minha banca examinadora e pelas ricas sugestões apresentadas para o desenvolvimento do trabalho.

Agradeço ao Professor Doutor Geraldo Eustáquio Moreira, pelas valiosas contribuições apresentadas.

Agradeço ao Professor e amigo Frederico Lazarini, que colaborou e contribuiu para o desenvolvimento do projeto interdisciplinar, cerne dessa pesquisa.

Agradeço ao professor e amigo Armenio, pela contribuição como observador das sessões e pelo apoio prestado.

Agradeço aos colegas do curso que proporcionaram vários momentos de compreensão e ajuda durante os trabalhos apresentados no decorrer do curso.

Agradeço a Capes, pela concessão da bolsa de estudos sem a qual a realização desse trabalho não seria possível.

Em especial, a minha esposa Carla, pela compreensão quanto às minhas ausências e, sobretudo, por haver sempre participado e me apoiado em todos os momentos do trabalho.

O trabalho faz parte de estudos que visam a utilização da Modelagem Matemática como estratégia de ensino. Apresenta uma proposta de Modelagem Matemática desenvolvida com uma turma do 1.º ano do Ensino Médio, alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), na qual a Modelagem foi utilizada como estratégia de ensino. A proposta tem como alvo investigar a potencialidade da Modelagem Matemática, buscando identificar quais os aspectos que são favoráveis para o ensino da Matemática para esse público. O trabalho, de cunho qualitativo, apresenta uma atividade de modelagem para o ensino de tópicos da Função Quadrática, e foi desenvolvido por meio da observação participante, sendo que os dados foram coletados a partir de atividades contextualizadas com a utilização de modelos. Teve como referencial teórico as concepções de modelagem de Dionísio Burak e Maria Eli Puga Beltrão, e a teoria de aprendizagem de David Paul Ausubel. A atividade de modelagem foi desenvolvida, utilizando como âncora noções de função e áreas de figuras planas, objetivando uma aprendizagem significativa. Como resultado, observa-se que a utilização da Modelagem Matemática no ensino da EJA é promissora, porém constata-se a necessidade de se transpor obstáculos relativos tanto ao contrato didático quanto à gestão de sala de aula, pois não é uma tarefa simples, uma vez que exige uma postura diferenciada, tanto do professor quanto dos alunos acerca da produção do conhecimento. Nesse contexto, destaca-se que o interesse e a participação dos alunos são fundamentais diante dessa metodologia, e que a Modelagem permite aos alunos estabelecerem uma relação entre o conteúdo aprendido e situações reais, favorecendo os seus protagonismos durante o processo de aquisição do conhecimento.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Educação de Jovens e Adultos. Ensino e aprendizagem.

The work is part of researches that aims the use of Mathematical Modeling as a strategy of teaching. A proposal of Mathematical Modeling is herein presented; it was developed along with the first-year high school students from EJA (Teens and Adults Education Program) in which the modeling was used as a teaching strategy. This proposal aims to investigate the Mathematical Modeling prospective, trying to identify which are the positive aspects for teaching Mathematics to this audience. This qualitative study shows a modeling activity for teaching Quadratic Function threads; it was developed by means of participant observation, being that the data were collected from contextualized activities using templates. As a reference, theoretical conceptions of modeling from Dionísio Burak & Maria Eli Puga Beltrão, as well as learning theory from David Paul Ausubel were used. The modeling activity was developed using as basis, the functions notions and flat figures areas, aiming a significant learning. As a result, it was observed that using Mathematical Modeling in EJA program is promising, however it needs to overcome barriers such as didactic contract and class management, for it is not an easy task, once it requires a differentiated approach, both from teacher and students around the growing production. In this context, we highlighted that the participation and interest from students are essentials before this methodology, and that the Modeling allows students to establish a relation between the learned content and real situations, thus favoring their protagonisms during the knowledge acquisition process.

Keywords: Mathematical Modeling; Teens and Adults Education Program; Teaching and learning.

Lista de Figuras

Figura 1- Etapas da Modelagem conforme Almeida; Silva; Vertuan (2012).	31
Figura 2- Etapas da Modelagem segundo Bassanezi (2002).	32
Figura 3- Processos de Modelagem segundo Burak (1987).	33
Figura 4- Etapas da Modelagem segundo Biembengut (1999).	34
Figura 5- Representação da Teoria da Assimilação segundo Moreira (1999).	48
Figura 6- Diagrama sobre a aprendizagem significativa por Cruz (2002).	49
Figura 7- Determinação da concavidade da parábola.	64
Figura 8- Indicação do eixo de simetria na parábola.	65
Figura 9- Representação gráfica da solução do problema 1.	68
Figura 10- Representação gráfica da solução do problema 2.	70
Figura 11- Representação gráfica da solução do problema 3.	71
Figura 12- Etapas para construção dos foguetes.	73
Figura 13- Confecção dos foguetes.	73
Figura 14- Imagens do simulador.	74
Figura 15- Etapas para os lançamentos.	76
Figura 16- Lançamentos dos projéteis.	76
Figura 17- Lançamentos dos projéteis.	77
Figura 18- Gráficos de $v \times t$	81
Figura 19- Sistema de coordenadas cartesianas.	82
Figura 20- Protocolo da questão 1, realizada pelo grupo 2.	89
Figura 21- Protocolo da questão 2, realizada pelo grupo 4.	90
Figura 22- Protocolo da questão 3, realizada pelo grupo 5.	90
Figura 23- Protocolo da questão 4, realizada pelo grupo 1.	90
Figura 24- Protocolo da questão 5, realizada pelo grupo 3.	91
Figura 25- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 1.	93
Figura 26- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 2.	93
Figura 27- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 3.	94
Figura 28- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 4.	95
Figura 29- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 5.	95
Figura 30- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 6.	96

Figura 31- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 1.....	101
Figura 32- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 2.....	103
Figura 33- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 3.....	105
Figura 34- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 4.....	107
Figura 35- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 5.....	109
Figura 36- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 6.....	110
Figura 37- Protocolo da questão 8, realizada pelo grupo 6.....	113
Figura 38- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 6.....	113
Figura 39- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 1.....	114
Figura 40- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 2.....	115
Figura 41- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 4.....	116
Figura 42- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 6.....	118
Figura 43- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 2.....	118
Figura 44- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 5.....	118
Figura 45- Protocolo do grupo 1, tempo de lançamento: 4 segundos.....	124
Figura 46- Protocolo do grupo 2, tempo de lançamento: 6 segundos.....	125
Figura 47- Protocolo do grupo 3, tempo de lançamento: 4 segundos.....	126
Figura 48- Protocolo do grupo 4, tempo de lançamento: 4 segundos.....	127
Figura 49- Protocolo do grupo 6, tempo de lançamento: 3 segundos.....	128

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1	16
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.1 A Modelagem no cenário internacional e brasileiro	16
1.2 A Modelagem no ensino de Matemática na EJA	21
1.3 Algumas contribuições para o ensino de função	24
CAPÍTULO 2	29
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	29
2.1 Algumas concepções acerca da Modelagem Matemática	29
2.2 Características do público da EJA	36
2.3 Princípios que podem nortear o trabalho com Modelagem Matemática numa turma de EJA	38
2.3.1 Aspectos motivacionais e relações com as aplicações da Matemática	40
2.3.2 A realização de trabalhos cooperativos	42
2.4 Teoria da Aprendizagem Significativa	45
2.5 Concepções de modelagem utilizadas na pesquisa	52
CAPÍTULO 3	56
FUNDAMENTOS DA PESQUISA	56
3.1 Problemática	56
3.1.1 Objetivo	58
3.1.2 Hipóteses da Pesquisa	58
3.2 Metodologia	59
3.3 Procedimentos Metodológicos	60
3.4 O Cenário onde ocorreu a pesquisa	61
3.4.1 Caracterização do grupo de alunos	62
3.5 O objeto matemático estudado	63

CAPÍTULO 4	66
A PESQUISA EMPÍRICA	66
4.1 Primeiro Momento	67
4.2 Segundo Momento	75
4.3 Terceiro Momento	77
4.3.1 Atividades propostas	77
4.3.2 Atividades do 1º encontro	79
4.3.3 Atividades do 2º encontro	80
CAPÍTULO 5	85
A ATIVIDADE DE MODELAGEM	85
5.1 Desenvolvimento e Análise das atividades	86
5.1.1 Análise da atividade do 1º encontro – Parte I	88
5.1.2 Análise da atividade do 1º encontro – Parte II	91
5.1.3 Análise da atividade do 2º encontro – Parte I	97
5.1.4 Análise da atividade do 2º encontro – Parte II	111
5.1.5 Análise da atividade do 2º encontro – Parte III	117
5.2 Desenvolvimento e análise do modelo produzido pelos alunos	119
CONSIDERAÇÕES FINAIS	129
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134

Introdução

No âmbito da Educação de Jovens e Adultos (EJA), no Brasil, estudos vêm sendo desenvolvidos com objetivo de conhecer mais os indivíduos que compõem esse grupo, suas características humanas e sociais, buscando compreender as necessidades desse público na esfera escolar.

De acordo com Fonseca (2012), os jovens e adultos que frequentam essa modalidade de ensino são, em sua maioria, pessoas que, por motivos diversos, principalmente de ordem social e econômica, tiveram que interromper suas atividades escolares. Assim, a Educação de Jovens e Adultos promove um modelo educacional que tem como meta dar garantias de um direito que anteriormente foi negado a esses indivíduos: a escolaridade básica.

Nesse contexto, a Proposta Curricular da Educação de Jovens e Adultos (Brasil, 2002), importante documento desenvolvido pelo Ministério da Educação – MEC – traz algumas orientações acerca do público da EJA, com o intuito de orientar os professores que trabalham com essa modalidade de ensino.

Sobre essas orientações, o referido documento alerta para a importância da escola e dos professores valorizarem a bagagem, vivência e conhecimentos, que os alunos jovens e adultos trazem consigo para a escola, e ressalta que:

Os alunos jovens e adultos, devido ao seu percurso de vida, experiências pessoais, interpessoais e, muitas vezes, profissionais, apresentam uma diversidade de conhecimentos prévios [...]. É a partir desses conhecimentos que se dá o contato com o novo conteúdo, atribuindo-lhe significado e sentido, que são fundamentais para a construção de novos significados (BRASIL, 2002a, p. 99).

A atuação do pesquisador como professor da Educação de Jovens e Adultos (EJA) tem ensejado conhecer um pouco mais desse grupo de estudantes, no que diz respeito aos seus objetivos e expectativas frente aos estudos, e também suas dificuldades de aprendizagem, principalmente, Matemática.

Assim, a elaboração desta pesquisa foi motivada pela experiência deste pesquisador com a EJA, e também pelo pouco número de trabalhos que relacionam a Modelagem a este público.

Durante o percurso de trabalho, pode-se perceber que as aulas expositivas, apesar de serem bem aceitas pelos alunos da EJA, tinham pouca eficácia no que diz respeito à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, especialmente, as funções. Mesmo o fato de o professor muitas vezes lançar mão de problemas vinculados ao cotidiano dos alunos, essa prática não apresentou resultados exitosos para a aprendizagem dos conceitos tratados em sala de aula.

Diante de tais percepções, têm surgido constantemente vários questionamentos a respeito de como trabalhar com esse público, considerando que este possui características diferenciadas, conhecimentos prévios diversos e o fato de que é preciso considerar fatores como: “o contrato didático, a gestão do tempo, a organização do espaço, os recursos didáticos, a interação e a cooperação, e a interação da escola com as práticas sociais.” (BRASIL, 2002a, p. 80).

Dessa forma, a problemática desta pesquisa situa-se na circunscrição de dificuldades – tanto do professor quanto dos alunos da EJA – geradas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente acerca do ensino de tópicos de função.

Na concepção do autor desta pesquisa, a identificação e compreensão de dificuldades, nesse âmbito de escolaridade, podem contribuir de forma positiva, transpondo obstáculos epistemológicos e didáticos, que possam surgir.

Assim, a presente pesquisa sugere uma proposta de ensino que considere os fatores expostos pela Proposta Curricular da EJA, e também, favoreça a participação do estudante no processo de aquisição do conhecimento contribuindo para uma aprendizagem significativa, segundo a Teoria de David Ausubel. Além disso, propõe a possibilidade de incorporar algumas tendências atuais da área de Educação Matemática e promover a articulação dos conhecimentos matemáticos com outros campos disciplinares e com experiências do cotidiano.

Ante esse desafio e partindo das contribuições que a Modelagem tem trazido para a Educação Matemática, surgiu o interesse em realizar esta pesquisa, e

desenvolver uma investigação numa turma de 1ª série do Ensino Médio da EJA, visando construir um ambiente de modelagem para intervir no ensino e aprendizagem de tópicos da função quadrática.

A atividade de modelagem deu-se por meio de um projeto interdisciplinar entre os professores de Matemática e de Física sobre lançamento de projéteis, com vistas a estabelecer um cenário para o desenvolvimento do modelo esperado.

A intenção foi avaliar a aprendizagem propondo aos alunos da EJA uma tarefa segundo os moldes sugeridos por Ausubel apud Moreira (1999) – uma situação de aprendizagem, diferente da que os alunos estão habituados, que seja sequencialmente dependente de outra e que não possa ser executada sem um perfeito domínio da precedente.

Fundamentado nos objetivos propostos, pretende-se, a partir da análise qualitativa das informações coletadas no percurso da pesquisa, encontrar subsídios que possibilitem responder a seguinte questão: *quais são os resultados obtidos, a partir de uma experiência com a Modelagem Matemática, no ensino e aprendizagem do conceito de função quadrática numa turma de EJA?*

Optou-se por utilizar a Modelagem Matemática na perspectiva desta gerar um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001; CHAVES, 2005), que contribua para a formação intelectual do alunado, estimulando seu pensamento, permitindo fazer abstrações de propriedades, generalizações e aplicar conhecimentos já adquiridos em novas situações, como sugere a Proposta Curricular Nacional voltada para a EJA.

A decisão em desenvolver o trabalho de Modelagem a partir de um projeto interdisciplinar se deu pelo fato do Colégio, em que foi aplicada a atividade, apoiar atividades que permitam integração entre as diferentes disciplinas, possibilitando uma maior articulação dos conhecimentos por parte dos alunos.

Os procedimentos de modelação utilizados nesta pesquisa estão pautados:

a) Nas etapas propostas por Burak (2004) que entende, assim como Barbosa (2001), que a escolha do tema de estudo pode advir do professor ou dos alunos.

b) Nas fases e etapas sugeridas por Beltrão (2009), que, a saber, têm como foco despertar a motivação nos alunos a partir do contexto histórico relacionado ao tema e aplicações do conteúdo a ser estudado, finalizando com a construção de um modelo matemático visando à solução de um problema, advindo da matemática ou de fora dela, proposto inicialmente.

Os pesquisadores foram escolhidos por conta de suas concepções e sugestões convergirem para um tipo de trabalho com Modelagem que, o autor deste trabalho, acredita ser possível de se desenvolver numa turma de EJA.

Espera-se que os resultados possam contribuir para o avanço da pesquisa na área da Educação Matemática, sobretudo na Educação de Jovens e Adultos.

A pesquisa foi dividida em cinco capítulos mais as considerações finais.

No primeiro capítulo, buscou-se apresentar um breve estudo sobre a inserção da Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática, principalmente no Brasil. Foram expostas, também, orientações de documentos oficiais que corroboram para o uso da Modelagem Matemática na Educação de Jovens e Adultos, além de contribuições acerca do ensino de função.

O segundo capítulo traz, inicialmente, os fundamentos teóricos utilizados nesta pesquisa, que assinalam para o potencial de um trabalho com Modelagem numa turma de EJA. Potencial que é verificado a partir da ocorrência, ou não, de aprendizagens significativas, segundo a Teoria de David P. Ausubel. Em seguida apresentam-se algumas características desses alunos e princípios que nortearam o trabalho com Modelagem Matemática.

No terceiro capítulo, expõem-se a problemática, os procedimentos metodológicos e as concepções de Modelagem utilizadas na pesquisa. Finaliza-se esse capítulo com uma explanação sobre o objeto matemático explorado: a função quadrática.

No quarto capítulo, apresentam-se, detalhadamente, as etapas da pesquisa empírica.

O quinto, e último capítulo, compreende a descrição da atividade de modelação que foi aplicada aos alunos, além de uma análise dos resultados obtidos pelos alunos durante o processo de modelagem.

Ao final do trabalho, são exibidas as considerações finais acerca dos resultados encontrados e conclusão.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A proposta inicial deste capítulo é apresentar uma revisão bibliográfica que permita investigar alguns princípios norteadores do ensino da Matemática, mais especificamente na Educação de Jovens e Adultos, a fim de buscar justificativas para a ótica que se pretende abordar, que é a utilização da modelagem no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, inicia-se este estudo tratando da inserção da Modelagem no ensino da Matemática nos cenários internacional e brasileiro. Em seguida, expõem-se algumas orientações acerca do ensino de matemática na EJA que apontam para a Modelagem Matemática como estratégia de ensino, e finaliza-se com a apresentação de algumas pesquisas cujo foco foi o estudo de funções.

1.1 A Modelagem no cenário internacional e brasileiro

No Brasil, as discussões relativas ao ensino de Matemática aumentaram durante a década de 1970, devido principalmente à realização dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino de Matemática. Na década de 1980, a Educação Matemática ampliou ainda mais seu espaço no cenário educacional, com a fundação, em 1988, da Sociedade Brasileira de Matemática – SBEM.

Desde então as discussões no campo da Educação Matemática têm ganhado forças e inúmeras pesquisas passaram a ser desenvolvidas com foco no ensino de Matemática, sobretudo estudos direcionados à Modelagem Matemática.

Segundo Biembengut (2009), o termo “modelagem matemática” como método para escrever, formular, modelar e resolver problemas advindos de alguma área do conhecimento, já se encontrava desde o início do século XX em literaturas, por exemplo, de Engenharias e Ciências Econômicas. A autora relata que tais literaturas

já traziam em seu corpo problemas que se utilizavam da Modelagem Matemática como a “atividade” em busca da solução.

Quanto à inserção da Modelagem Matemática na Educação Matemática, é importante ressaltar que de início não se deu no âmbito da Educação Matemática, mas sim na área que se convencionou chamar Matemática Aplicada.

De acordo com Beltrão (2009), foi no domínio da Matemática Aplicada que surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática. Nesse aspecto, Beltrão cita Henry Pollak como um dos pioneiros na área de Aplicações e Modelagem no ensino da Matemática, a partir da segunda metade do século XX.

Naquele período, Pollak acreditava que o ensino de Matemática devia estar relacionado com a Ciência e realidade por meio de aplicações. Dessa forma, a busca por soluções de problemas dos mais variados campos do conhecimento, fez com que o ramo da Matemática, conhecido até então por Matemática Aplicada, passasse a descrever intrinsecamente um processo de modelagem.

Foi então por intermédio dessa “importação” da Matemática Aplicada para o ensino da disciplina, que a conceituação e a caracterização da modelagem na Educação Matemática tem se desenvolvido.

A Modelagem Matemática tem tido diferentes abordagens, e, sido realizada segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas, e, as estruturações teóricas das pesquisas científicas.

Biembengut (2009), relata que as primeiras discussões acerca da modelagem na Educação Matemática ocorreram, no cenário internacional, em meados de 1960, por meio de um movimento que ficou conhecido como “utilitarista” que visava à aplicação da Matemática em outros campos como a ciência e a resolução de problemas da própria sociedade.

Esse movimento em prol da Modelagem Matemática teve, como elemento propulsor, discussões sobre a necessidade de abordar a Matemática por meio de situações ligadas à realidade dos estudantes e não por métodos e técnicas, que,

ainda hoje, são vistos em livros, que pouco motivam o estudante e quase não permitem que o ele desenvolva habilidade de matematizar problemas reais.

Após ser discutida amplamente nos Estados Unidos e Europa, a Modelagem Matemática voltada para a educação passou a ser abordada também no Brasil, e sua utilização como ação pedagógica inaugurou um novo caminho na forma de como transmitir os conhecimentos. O fato ocorreu por intermédio de professores brasileiros, representantes na comunidade internacional de Educação Matemática, que ainda hoje são tidos como referências para a consolidação da modelagem como parte a integrar o ensino da Matemática.

Dentre os principais precursores pode-se citar Rodney Carlos Bassanezi, que contribuiu para o início de um movimento em prol da Modelagem como estratégia de ensino da Matemática, sugerindo a necessidade de se criar “um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedade”, focalizando a aplicação da Matemática em situações cotidianas que poderiam ser estudadas em sala de aula, (BASSANEZI, 2002, p. 15).

Juntamente com Bassanezi, pode-se citar Aristides Camargo Barreto e Ubiratan D’Ambrosio, pesquisadores da Educação Matemática, que também contribuíram para o início de um movimento pela modelagem, por volta de 1970, e passaram a difundi-la por intermédio de cursos para professores e ações em sala de aula.

Esse movimento pela modelagem tem adquirido adeptos desde então, e hoje, diversos trabalhos e pesquisas sobre o tema têm mostrado o quão fértil é esse campo da modelagem dentro da Educação Matemática, além de explicitações de diversas concepções de pesquisadores na área, que corroboram para o avanço dos estudos sobre o tema bem como para a ampliação da aplicação dentro da sala de aula.

Com o avanço das pesquisas sobre Modelagem na Educação, esta passou a ganhar espaço no currículo de cursos de licenciatura, em cursos de formação de professores e atualmente é tema de um dos grupos de pesquisa da Sociedade Brasileira de Matemática – SBEM, o que tem contribuído para a publicação de inúmeros trabalhos científicos referentes à modelagem.

Nos dias atuais, a aplicação da modelagem na Educação Matemática é vista como uma estratégia para motivar os estudantes a aprenderem Matemática, possibilitar a eles aplicar a modelagem na resolução de problemas advindos de contextos diversos, e fazer com que eles sejam protagonistas de sua própria aprendizagem e não apenas meros espectadores.

A modelagem matemática permite que o aluno trabalhe também com a intuição sem privilegiar apenas os aspectos do formalismo da Matemática. Os alunos podem não ser capazes de provar formalmente um resultado matemático, mas são capazes, muitas vezes, de intuir e levantar hipóteses sobre esse resultado, e, para tal, é preciso uma ação pedagógica do professor. Neste ponto, cabe a concordância com Fernandes e Junior (2012, p. 22) que dizem que “as propostas pedagógicas e encaminhamentos didáticos, que ocorrem no interior das salas de aula, necessitam provocar nos alunos a participação ativa”.

Nesse aspecto, a modelagem permite que os alunos façam parte do processo de construção do conhecimento e não apenas sejam ouvintes passivos. O professor usa perguntas do tipo “O que você acha que vai acontecer...” que estimulam a participação do aluno.

Em sua tese, Beltrão (2009), complementa o trabalho de Everaldo Silveira (2007) e apresenta a relação de dissertações e teses, na temática da Modelagem, que foram defendidas desde 1976 até 2008, no Brasil. Foram relacionados 101 trabalhos no total, sendo 85 dissertações de mestrado e 16 teses de doutorado, o que mostra que o número de pesquisas sobre o tema tem-se mostrado relevante.

Entretanto, não se encontra, em meio a essas, pesquisas que articulam a modelagem com o ensino de funções e a EJA, o que impulsionou a desenvolver um trabalho que pudesse contribuir para esse campo de estudo.

Em relação ao crescimento do interesse por estudos no Brasil acerca da Modelagem Matemática, atualmente conta-se com vários centros ou grupos de estudos e pesquisas em Educação Matemática, cujo foco é a modelagem no ensino. De antemão, pode-se citar:

- Em São Paulo, universidades como a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), a Universidade Estadual Paulista (UNESP), a Pontifícia

Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) cujos pesquisadores Rodney C. Bassanezi, Marcelo C. Borba, e Sonia B.C. Iglioni respectivamente, lideram grupos de projetos que têm a modelagem como um dos focos de pesquisa.

- Em Santa Catarina, a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) que tem Ademir D. Caldeira coordenando o Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática, e a Universidade Regional de Blumenau (FURB) que conta com o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino – CREMM, que tem como fundadora a pesquisadora Maria S. Biembengut.

- Na Bahia, destaca-se o Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática – NUPEMM, grupo de pesquisa certificado pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) junto ao CNPq, que tem como coordenador Jonei C. Barbosa.

A respeito dos diversos trabalhos sobre Modelagem Matemática, direcionados ao ensino, menciona-se, principalmente: Dionísio Burak (1992, 2004); Maria Sallet Biembengut (1999); Jonei Cerqueira Barbosa (2001); Rodney Carlos Bassanezi (2002); Elaine Cristina Ferruzzi & Lourdes Werle de Almeida (2009); Maria Eli Puga Beltrão (2009) e Roberto Fecchio (2011) cujos resultados contribuíram de forma valorosa para a compreensão, fundamental, de como se dá um trabalho com Modelagem no ensino da Matemática.

Os referidos pesquisadores têm se preocupado em investigar sobre as formas de se desenvolverem atividades de modelagem em sala de aula, direcionando seus trabalhos, de acordo com suas concepções, aos ensinos Fundamental, Médio e Superior, o que corrobora com as intenções deste trabalho.

É válido ressaltar que a concepção de cada pesquisador, acerca da importância da modelagem, está relacionada à sua formação e experiências próprias com essa metodologia. Entretanto, pode-se avaliar que a Modelagem apresentada nesses estudos possui um objetivo comum que consiste basicamente em estudar, resolver e compreender um problema da realidade, que pode ser advindo da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento, o que reforça a ideia da Modelagem criar possibilidades interdisciplinares em sala de aula, além de mostrar que a Matemática não é uma ciência isolada das demais.

Ainda nesse contexto, esses pesquisadores veem a Modelagem como uma estratégia motivadora, capaz de relacionar a Matemática com fatos do cotidiano, despertando maior interesse do alunado pela Matemática, e embora tenham concepções distintas sobre o tema, concordam que a modelagem pode contribuir não só para o ensino e a aprendizagem da Matemática, mas também promover uma interação entre professores e alunos na produção de novos conhecimentos que podem extrapolar o trabalho em sala de aula.

1.2 A Modelagem no ensino de Matemática na EJA

Nesta seção, destacam-se as contribuições de alguns documentos oficiais destinados à EJA e, de pesquisadores como Fonseca (2012), que acenam para os objetivos pretendidos com o ensino da Matemática para esta modalidade, além de orientações acerca das metodologias de ensino.

A partir dos avanços dos estudos relacionados à Modelagem Matemática na Educação, tendência que passou a figurar também nos documentos oficiais do Ministério da Educação – o trabalho se atentará à *Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos*. Porém, é válido ressaltar, que a Modelagem tem ganhado espaço também em publicações de documentos específicos de algumas secretarias de educação – a pesquisa também abordará de um documento da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, denominado *Cadernos de Orientações Didáticas para EJA*.

Inferir-se-á, mais adiante, que ambos os documentos apresentam indícios de que a Modelagem é um possível caminho a trilhar no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Matemática.

O primeiro documento abordado, considerando as especificidades do curso de EJA, é a *Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos*, que foi desenvolvido com o objetivo de nortear o trabalho dos professores de EJA, trazendo algumas contribuições no sentido de selecionar e organizar sugestões coerentes com os Parâmetros Curriculares Nacionais, mas considerando as características dos estudantes que frequentam essa modalidade de ensino.

No texto, a *Proposta Curricular* consta, especificamente no volume 3 destinado ao ensino de Matemática, Ciências, Arte e Educação Física, algumas orientações, por exemplo, o desenvolvimento dos conhecimentos da área de Matemática podem propiciar boas contribuições para a formação do estudante de EJA.

Com essa finalidade, a *Proposta* ressalta, acerca do ensino de Matemática, que:

[...] um ensino baseado na memorização de regras ou de estratégias para resolver problemas, ou centrado em conteúdos pouco significativos para os alunos certamente não contribui para uma boa formação matemática. Quando, porém, estimula a construção de estratégias para resolver problemas, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios, a matemática contribui para a formação dos jovens e adultos que buscam a escola (BRASIL, 2002b, p. 11).

A esse respeito, D'Ambrosio (1986) relata que a escolha dos conteúdos que satisfaçam expectativas como as citadas é o grande desafio do professor, pois muitas vezes implica num programa de conteúdos menos rígido, aberto, que vai se delineando à medida que a prática pedagógica se desenvolve, o que segundo esse pesquisador, acarreta muitas dificuldades de ordem prática na sala de aula.

Nesse contexto, de acordo com Bassanezi (2002), é preciso que os professores façam uso de conteúdos matemáticos que se inter-relacionem com outras áreas do conhecimento, na busca de um modelo de educação menos pautado numa estrutura formal e rígida, mas sim, um modelo que seja comprometido com as realidades dos alunos e da sociedade.

Do que foi pontuado até aqui sobre modelagem, pode-se inferir que um processo de aprendizagem, que valorize os aspectos acima citados, pode ser plenamente desencadeado por meio de uma atividade de Modelagem Matemática, em que o professor oportunize aos alunos situações-problema contextualizadas, as quais podem ser propostas articuladas à interdisciplinaridade, abrangendo relações entre conteúdos da própria Matemática ou fora dela.

Entretanto, para que isso ocorra, Fonseca (2012) defende a adoção de um ensino de Matemática cuja estrutura não esteja pautada numa organização

curricular dos conteúdos, mas sim, que os temas matemáticos a serem ensinados sejam contemplados partindo-se de problemas da realidade e de projetos de trabalho, contrapondo o que alguns sistemas impõem sobre a obrigatoriedade do cumprimento do programa de ensino.

Com essa perspectiva, diversas propostas e estudos para o ensino da Matemática em todos os níveis, e principalmente para a EJA, reconhecem a necessidade de se considerar as experiências que o aluno traz de sua vida cotidiana. Nesse aspecto, o trabalho destaca (ÁVILA, 1995; CARVALHO, 1995; MAZZANTI, 2008; MONTEIRO, 1991).

O segundo documento abordado foi desenvolvido pela Secretaria Municipal de Educação de São Paulo em 2010, intitulado *Cadernos de Orientações Didáticas para EJA*, com o objetivo de subsidiar discussões e reflexões sobre a prática pedagógica na EJA, almejando construir coletivamente uma proposta curricular que atenda às finalidades e necessidades desses alunos.

Nessa ótica, é exposto no *Caderno de Matemática* que essa disciplina deve ser ferramenta, que permita aos alunos investigarem elementos da cultura e sociedade a qual estão inseridos, e que são presentes em suas vidas. O documento atribui também à Matemática, a tarefa de permitir “produzir, interpretar, comunicar e interagir conhecimentos de diversas áreas (Ciências, Química, Física)” (SÃO PAULO, 2010a, p. 28).

A fim de ressaltar alguns aspectos que devem ser considerados e explorados pelos professores, no âmbito do ensino da Matemática, o documento destaca que:

O processo de ensino e aprendizagem da matemática, em qualquer nível de ensino da educação básica, deve considerar aspectos teórico-metodológicos pautados: na história da matemática, no processo de contextualizar e problematizar, na inserção da tecnologia, no processo de modelagem, na elaboração e desenvolvimento de projetos (SÃO PAULO, 2010a, p. 50).

Especificamente a respeito do uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, é apresentada no *Caderno* uma concepção de Bassanezi (2002) sobre o assunto, e exhibe alguns conhecimentos e habilidades que os alunos devem mobilizar ao desenvolver um trabalho com modelagem. Tais conhecimentos e habilidades constituem, segundo esse documento, em: *selecionar variáveis*

relevantes ao modelo que se pretende obter, *problematizar, formular hipóteses, recorrer ao conhecimento matemático acumulado, simplificar e validar*. (Ibidem, p. 53), que concordam plenamente com as concepções de diversos pesquisadores sobre modelagem.

Assim, com essa exposição sintética desses documentos oficiais, em especial aos dizeres relacionados ao ensino da Matemática com vistas à modelagem, pretende-se, primeiramente, expor documentos – que talvez não sejam conhecidos por professores da EJA – que objetivam nortear o trabalho desses professores, na direção de um ensino que promova uma prática reflexiva, interdisciplinar e de contextualização. É pretensão da pesquisa, também, ampliar as perspectivas para o ensino de Matemática nos cursos de EJA, uma vez que a aprendizagem desses alunos deve estar ligada às transformações que ocorrem na sociedade em que vivem, e para que isso ocorra, a escola deve propor novos modos de aprender e ensinar.

1.3 Algumas contribuições para o ensino de função

Este trabalho trata do ensino de função por meio da Modelagem – mais especificamente o ensino de tópicos da função quadrática – e assim sendo procura-se expor, de maneira sintetizada, a relevância que tem sido dada ao ensino desse tópico na Educação Básica brasileira.

A esse respeito, alguns documentos têm disponibilizado informações importantes e orientações acerca do ensino de funções (BRASIL, 1999); (BRASIL, 2006) e (SÃO PAULO, 2010b).

Segundo a pesquisa de Oliveira (1997), algumas das orientações vigentes nesses documentos oficiais não são utilizadas por grande parte dos professores.

Como contribuição para o ensino de funções, Oliveira aponta em sua pesquisa alguns obstáculos epistemológicos e didáticos que têm dificultado a compreensão do conceito de função. Expõe, também, uma análise detalhada das concepções de professores e alunos acerca do assunto, o que possibilita reflexões

por parte de pesquisadores e educadores quanto à abordagem desse conteúdo matemático.

Nesse contexto, diversos estudos têm sido desenvolvidos com o objetivo de contribuir para o trabalho com funções em sala de aula, e também, respaldar o uso da Modelagem como metodologia de ensino. O trabalho procurou se inteirar sobre quatro destes estudos, que, segundo a visão do autor desta pesquisa, trazem informações valiosas para a discussão proposta. São eles: Chaves (2005); Maia (2007); Ardenghi (2008) e Beltrão (2009).

Chaves (2005), partindo de reflexões feitas sobre a prática do professor em sala de aula, desenvolveu um trabalho sobre o ensino de funções polinomiais do 1º e 2º grau, exponenciais e logaritmos, com alunos da 1ª série do Ensino Médio regular, tendo a Modelagem como estratégia de ensino.

A autora atenta para a necessidade de um ensino cuja abordagem seja contextualizada, isto é, que o professor procure apresentar situações que relacionem o conteúdo com o cotidiano dos alunos.

Nesse aspecto, Chaves (2005, p. 133) apresenta a Modelagem Matemática como:

Um ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência a realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático previsto no planejamento escolar.

A pesquisadora reforça, ainda, a dificuldade do professor em cumprir o programa de conteúdos da série dentro do tempo previsto, o que muitas vezes implica em abordagens superficiais.

Frente a isso, por meio de estudos de alguns resultados de pesquisas sobre Modelagem, Chaves elaborou uma sequência de 14 atividades, com o objetivo de tornar a relação ensino e aprendizagem da Matemática mais atraente e prazerosa, objetivando à produção de aprendizagens significativas.

O tema central para o desenvolvimento de seu trabalho com modelagem foi questões ambientais relacionadas à água.

Acerca dos resultados obtidos, Chaves assinala que o ensino por modelagem pode levar o aluno a tornar-se copartícipe de sua aprendizagem tornando-a significativa.

Na pesquisa, decidiu-se trabalhar com Modelagem como estratégia de ensino, considerou-se relevante a importância de se gerar um ambiente de aprendizagem, como o proposto por Chaves e apontado também por Barbosa (2001).

Já Ardenghi (2008), apresentou um estudo do tipo estado da arte com o objetivo de expor as dificuldades de aprendizagem acerca do conceito de função, partindo de experiências próprias, como professor, e de dados de pesquisas nacionais.

A pesquisa feita por Ardenghi pode orientar a respeito das dificuldades mais sentidas pelos alunos no processo de aprendizagem de funções, o que foi de grande valia, pois entende-se que o conhecimento de tais dificuldades guiou em relação ao tipo de abordagem de ensino, abordada pela pesquisa, no desenvolvimento do trabalho com função.

Dos resultados de sua investigação, desse autor pode-se inferir que:

- professores e livros didáticos, de maneira geral, apresentam a noção de função numa linguagem técnica e distante da realidade do aluno;
- os resultados obtidos em pesquisas não são incorporados nos livros didáticos;
- obstáculos de aprendizagem podem ser suscitados se as abordagens de ensino não favorecerem as conversões de representação. Essa última constatação corrobora com a pesquisa de Maia (2007).

O trabalho de Maia buscou complementar estudos já realizados sobre o ensino da função quadrática, tomando como objeto principal de investigação a construção gráfica dessa função a partir de *software* gráfico. O público alvo desse trabalho foi um grupo de alunos da oitava série do Ensino Fundamental regular.

Em sua pesquisa, a autora expôs tópicos importantes como:

- *a influência do livro didático na prática docente*: analisou o conteúdo em alguns livros didáticos, além de tarefas que envolviam construção de gráficos, procedimentos de construção, características dos gráficos (concauidade, simetria, intersecções com eixos), exercícios de aplicação e família de curvas, atentando-se também para alguns erros conceituais contidos nesses materiais.

- *o uso do computador no ensino*: apresentou resultados consistentes de pesquisas que corroboram com o uso do computador para o ensino da matemática, principalmente, tópicos de funções;

Segundo Maia, os resultados obtidos permitiram concluir que houve um avanço por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função quadrática, propiciado pela compreensão e articulação entre as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas.

Considera-se relevante o trabalho apresentado por Maia, pois:

- orienta quanto aos tipos de abordagem que se faz ao tratar do ensino da função quadrática – algumas construtivas outras não;

- reforça a necessidade de se buscar alternativas para ensinar o conteúdo de função quadrática – no caso de Maia, a alternativa foi utilizar o computador, nesta pesquisa optou-se pela Modelagem;

Finalmente, as informações apresentadas no trabalho dessa pesquisadora contribuíram para a construção de conceitos e a sequência de atividades de Modelagem neste trabalho.

Beltrão (2009) apresenta um procedimento para o desenvolvimento da Modelagem por meio de *fases* e *etapas*, fazendo-se adaptações conforme o público alvo, o que apresentou resultados positivos em sua tese, e em pesquisas posteriores como a de Ricardo Ferreira dos Santos (2014).

Desenvolvendo um trabalho com alunos do curso superior, Beltrão apresentou uma relação, fundamentada e consistente, entre problemas de aplicação da Matemática e a Modelagem, o que em suas conclusões, apresentou-se positiva e assertiva. Segundo essa pesquisadora:

[...] desde o princípio, devem ser utilizadas as aplicações, os exemplos práticos, de modo que o aluno não só compreenda as regras, como aprenda a realizar algo com elas. E ainda que é interessante reunir exemplos do cotidiano do aluno, exemplos práticos e de fácil assimilação (BELTRÃO, 2009, p. 263).

A pesquisa citada orientou as etapas que este trabalho poderia seguir no desenvolvimento de atividade de Modelagem, além de corroborar com o estudo, que propõe a resolução de um problema de aplicação da Matemática por meio da Modelagem.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando se investiga na literatura assuntos de Modelagem Matemática, infere-se que não existe uma única definição, mas sim diferentes concepções para o tema.

Neste capítulo, pretende-se apresentar as ideias centrais que fundamentam a proposta de trabalho com a Modelagem. Inicialmente há a visão de alguns pesquisadores acerca da Modelagem Matemática, objetivando ampliar a compreensão sobre essa metodologia, e também, suas particularidades. Em seguida, procura-se dissertar, de forma sucinta, sobre o público da EJA, destacando algumas de suas características, além de apontar alguns princípios que podem nortear o trabalho com Modelagem Matemática na EJA, segundo algumas pesquisas. Finalmente, o capítulo trabalhará com a apresentação da teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel.

2.1 Algumas concepções acerca da Modelagem Matemática

A história esclarece que as Ciências, em especial a Matemática, têm se desenvolvido impulsionadas pela busca de respostas para questões advindas da própria Matemática ou mesmo, por tentativas de compreender os fenômenos naturais, sociais e até culturais que envolvem o homem.

Partindo desse pressuposto, o homem e sua procura por soluções de problemas, mediada pela construção de modelos, não é recente e remete ao próprio desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações.

A função de um modelo matemático é descrever ou explicar, por meio de estruturas matemáticas, o comportamento de um sistema, permitindo, às vezes, a realização de previsões acerca desse sistema. As estruturas que compõem um

modelo estão associadas a diferentes sistemas de representação, como uma equação, uma tabela ou mesmo um gráfico.

Sobre o modelo matemático, D'Ambrosio (1986) o trata como uma estratégia que permite analisar a realidade.

Para Bassanezi (2002), "*Modelo Matemático* é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" (p. 20).

Stewart (2011) define modelo como uma descrição matemática de um fenômeno do mundo real, cujo propósito é entendê-lo, fazendo, quando possível, previsões sobre seu comportamento futuro.

Portanto, infere-se que um modelo matemático é uma representação da realidade sob a ótica daqueles que a investigam, sendo que sua formulação visa fomentar a solução de algum problema e possibilitar análises e previsões sobre esta realidade.

Se o modelo matemático é o que "dá forma" à solução do problema, a modelagem matemática é a "atividade" ou processo que se desenvolve em busca da solução. Sendo assim, pode-se afirmar que a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas diversos, e o faz por meio de modelos matemáticos.

Para D'Ambrosio (1986), a Modelagem é um processo rico que permite a busca de soluções para problemas reais, que vão além de formalizações e artificialismos, que acabam limitando o acesso e a utilização da Matemática a alguns estudantes, em alguns níveis de ensino.

Almeida, Silva e Vertuan (2012), no livro *Modelagem Matemática na educação básica*, consideram que uma atividade de modelagem matemática se origina de uma situação problemática e sua principal característica é a possibilidade de envolver o cotidiano, ou ainda, a relação com aspectos externos à Matemática. Assim, a atividade de Modelagem assinala-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.

Ainda de acordo com esses autores, uma atividade de Modelagem Matemática, nesse contexto, compreende basicamente três etapas: a primeira é a

definição do problema que se propõe investigar, que eles chamam de situação inicial; a segunda, envolve os procedimentos necessários para se configurar, estruturar e resolver o problema proposto; e a terceira é a situação final desejada, a solução do problema; é o modelo matemático.

Os pesquisadores apresentam estas etapas por meio do seguinte diagrama:

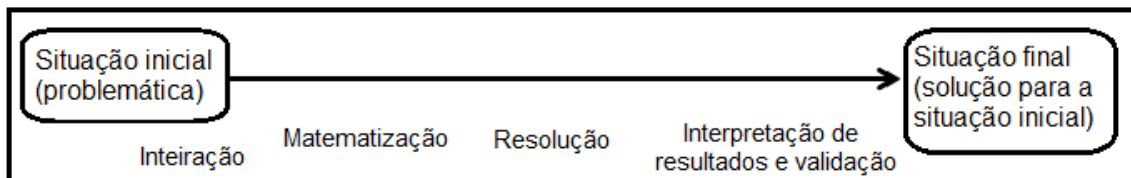


Figura 1- Etapas da Modelagem conforme Almeida; Silva; Vertuan (2012, p. 12).

A respeito da Modelagem Matemática, Bassanezi (2002, p. 27) a apresenta como sendo um método dinâmico aplicado à obtenção e validação de modelos matemáticos. Para ele, a essência da modelagem está na transposição de situações reais em problemas matemáticos, e para que ocorra tal transposição, sugere as seguintes etapas:

I) Problema não matemático – consiste em um problema do cotidiano, que não explicita o conteúdo matemático a ser explorado e seja sugerido pelos alunos;

II) Dados experimentais – etapa relacionada à pesquisa e/ou experiências, cujo objetivo é coletar dados acerca do problema em estudo;

III) Modelo Matemático – compreende um objeto matemático – que pode ser uma equação, função, gráfico, etc. – obtido a partir do tratamento dos dados coletados, tendo como foco a tentativa de descrever o problema;

IV) Solução – esta etapa caracteriza-se pela solução efetiva do problema sugerido.

A articulação dessas etapas pode ser mais bem compreendida a partir do seguinte diagrama:

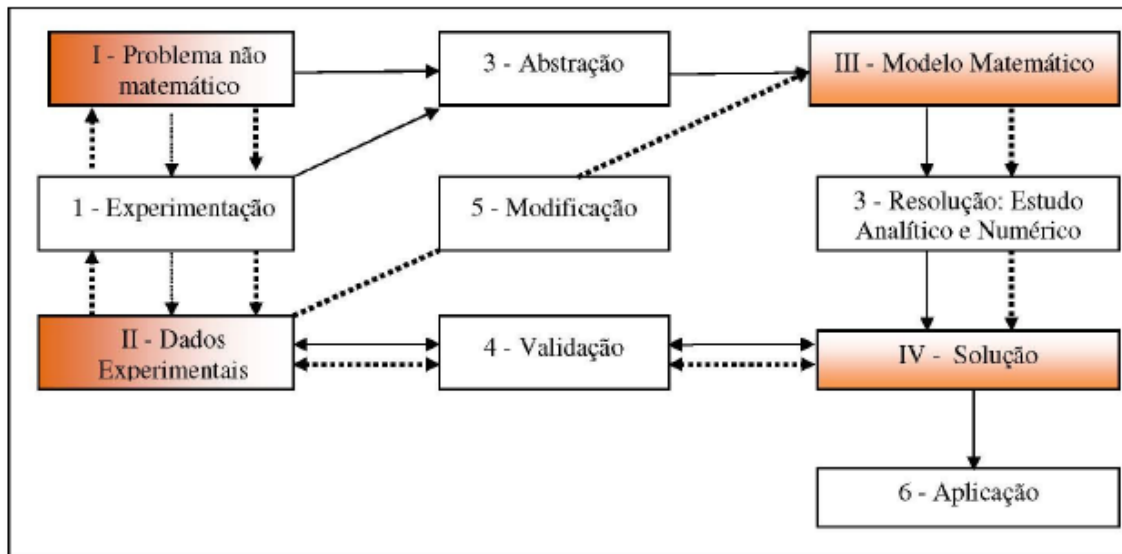


Figura 2- Etapas da Modelagem segundo Bassanezi (2002, p. 27).

Burak (1992) entende a Modelagem como um “conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando a fazer previsões e a tomar decisões” (p. 62).

Nesse contexto, esse pesquisador descreve a modelagem em cinco etapas, consideradas pelo interesse do aluno ou do grupo e pelas necessidades do nível de ensino trabalhado, são elas:

1) *escolha do tema* – com o intuito de suscitar o interesse nos alunos, o professor pode apresentar alguns temas ou os próprios alunos podem expor sugestões do que querem pesquisar;

2) *pesquisa exploratória* – consiste na busca de informações acerca do que se pretende pesquisar. As informações podem advir de pesquisa bibliográfica ou mesmo de uma pesquisa de campo;

3) *levantamento dos problemas* – nessa etapa, o professor, como mediador, incentiva os alunos a elaborarem questões que, para eles, mereçam ser investigadas e que possam ter relação com a matemática, permitindo-os aprenderem e aplicarem conceitos matemáticos;

4) *resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema* – nessa etapa ocorre a busca por respostas aos problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático. Aqui, o pesquisador sugere que o

conteúdo matemático seja apresentado de maneira acessível, para posteriormente ser sistematizado;

5) *análise crítica das soluções* – essa etapa incita a criticidade dos alunos. É o momento em que se reflete sobre o resultado obtido, sua viabilidade e coerência para com a situação em estudo, e como esse resultado pode contribuir com a comunidade na qual os alunos estão inseridos (BURAK, 2004).

O diagrama a seguir sintetiza as ideias de Burak acerca dos processos envolvidos numa atividade de modelagem:

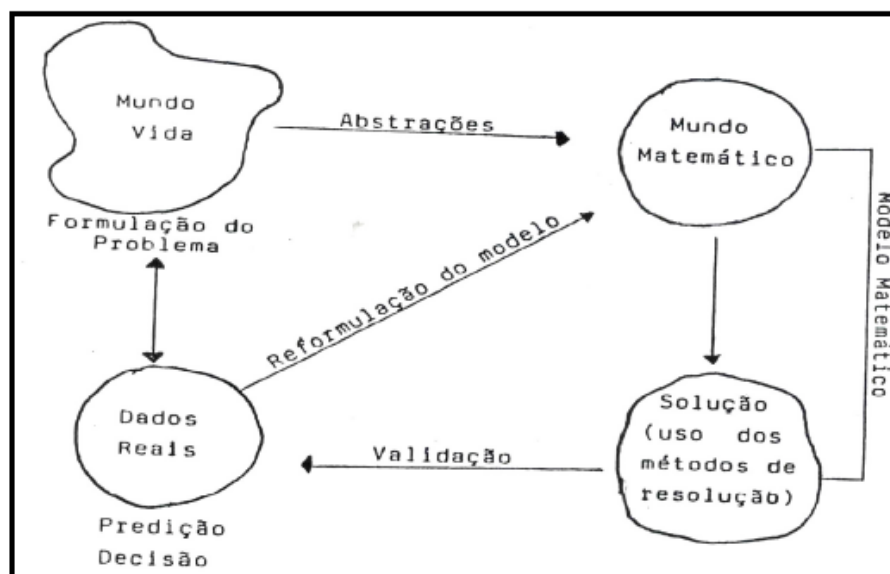


Figura 3- Processos de Modelagem segundo Burak (1987, p. 38).

Para Biembengut (1999, p. 20), a modelagem é “o processo que envolve a obtenção de um modelo” e para isso, sugere etapas que seguem os moldes usuais da modelagem, usados na Matemática Aplicada, que são:

1) *interação* – representa um primeiro contato com a situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado; se dá por meio de pesquisa;

2) *matematização* – caracteriza-se pela transição de linguagens, isto é, o pesquisador busca traduzir a situação-problema da linguagem natural para a linguagem matemática;

3) *Modelo matemático* – compreende a interpretação dos resultados e validação do modelo.

O próximo diagrama resume as fases da modelagem expostas por Biembengut.

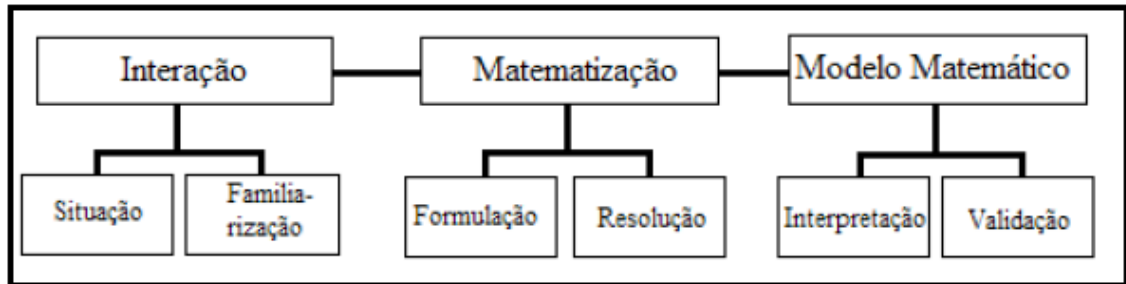


Figura 4- Etapas da Modelagem segundo Biembengut (1999, p. 21).

Barbosa assume que “a Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”, (BARBOSA, 2001, p. 6).

O autor ressalta que esse ambiente de aprendizagem pode ter configurações diferentes, dependendo do público escolar a que se destina, bem como da experiência e confiança do professor em trabalhar com a modelagem. Partindo desse pressuposto, Barbosa sugere que tais configurações podem ser vistas como casos, para referenciar as possibilidades de se trabalhar com a modelagem em sala de aula, e os descreve como:

Caso 1 – o professor expõe um problema aos alunos com as informações necessárias à sua resolução, cabendo aos alunos resolvê-lo. Nesse caso todo o trabalho de modelagem se dá a partir do problema oferecido pelo professor;

Caso 2 – o professor apresenta um problema real, que pode estar associado a outras áreas do conhecimento, e aos alunos designa a tarefa de coletar as informações necessárias acerca do problema e resolvê-lo;

Caso 3 – Partindo de temas não matemáticos, os alunos são responsáveis por formular o problema, coletar as informações relevantes sobre ele e apresentar sua resolução. Segundo Barbosa, esse último caso pode ser aplicável ao se trabalhar com projetos. O autor enfatiza que em todos os casos apresentados o professor é um “*co-partícipe*” no processo, podendo atuar de maneira mais, ou menos direta dependendo da proposta.

Para Ferruzzi e Almeida (2009, p. 120), “a Modelagem Matemática está associada à busca de uma representação matemática para um objeto ou fenômeno, que pode ser matemático ou não”. Nesse sentido, segundo as pesquisadoras, nas atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, os envolvidos realizam um conjunto de ações que estão associadas:

a) *à formulação de um problema* – os envolvidos na atividade se apropriam de um problema e definem metas para sua resolução;

b) *a um processo investigativo* – processo que remete a pesquisa e a busca de informações acerca do problema que se propõe resolver;

c) *à busca por uma representação matemática* – tal representação é o próprio modelo matemático, que se configura pela necessidade de se traduzir a situação-problema apresentada, geralmente em linguagem natural para a linguagem matemática;

d) *à análise de uma resposta para o problema* – essa etapa sugere uma validação do modelo associado ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação do modelo para a situação;

e) *a comunicação dos resultados aos outros* – esse momento implica a elaboração de argumentos, por parte dos envolvidos, que demonstrem que a solução encontrada é razoável e consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática (modelo) quanto da adequação a situação investigada.

Por fim, para desenvolver um trabalho com Modelagem, Beltrão (2009, p. 119) apresenta uma sugestão em que descreve a Modelagem por meio de fases e etapas que são indicadas como:

Fase I – *A apresentação do conteúdo pelo professor*: compreende a exposição do conteúdo por abordagem histórica; exploração do professor sobre algumas aplicações desse conteúdo; apresentação de definições, propriedades importantes acerca do tema em estudo.

Fase II – *A apresentação pelo aluno de situações que envolvem o conteúdo matemático em estudo*: propõe pesquisas sobre modelos e aplicações sobre o assunto;

Fase III – *A elaboração pelo aluno de situações expressas por modelos ou aplicações*: contempla o desenvolvimento da Modelagem Matemática partindo dos aspectos que foram escolhidos para serem investigados sobre o tema.

A perspectiva desta pesquisadora para o uso da Modelagem, como alternativa metodológica para o ensino de Matemática, está pautada nas concepções de Hans Freudenthal acerca da Matemática Realística, que ressaltam a importância da resolução de problemas reais, com significado, e não só enfatizar o ensino de regras abstratas que não se relacionam com o cotidiano dos estudantes.

A partir dos estudos desenvolvidos por Beltrão e por outros pesquisadores anteriores, percebe-se que a utilização da modelagem no espaço educacional pode ser feita e organizada de diferentes formas. Comumente, as atividades são organizadas partindo da escolha de um tema de interesse dos alunos ou selecionado pelo próprio professor.

Apesar das concepções sobre Modelagem Matemática terem suas distinções e particularidades, convergem quanto ao entendimento de que as atividades de modelagem podem, além de aprimorar o ensino e aprendizagem da Matemática, contribuir para a uma relação produtiva entre professores e alunos na construção do conhecimento, que surtirá efeitos no contexto social.

Assim, compreende-se que a pesquisa de literaturas acerca da Modelagem Matemática permitiu perceber algumas ações intrínsecas dessa metodologia, como: observar, explorar, investigar, levantar hipóteses e analisá-las de forma crítica, além de buscar um modelo que possa validar a solução para o fenômeno investigado, e também, o importante papel do professor enquanto mediador nesse processo. Diante dessa exposição, verifica-se que essas ações carecem de procedimentos, muito bem articulados, que podem nortear o trabalho com modelagem em sala de aula, o que foi de grande valia para o desenvolvimento do modelo proposto neste trabalho.

2.2 Características do público da EJA

As literaturas consultadas possibilitaram apresentar de forma sucinta algumas características sociais daqueles que compõem esse grupo bem como concepções de alguns teóricos, apresentar registros de documentos oficiais acerca da EJA e expor algumas pesquisas em Educação Matemática que corroboram com a pretensão de utilizar a Modelagem Matemática como abordagem de ensino para esse público.

A exposição sobre a EJA se inicia intermediada pela concepção de Fonseca (2012), importante pesquisadora sobre assuntos relacionados à Educação de Jovens e Adultos. De acordo essa pesquisadora, a Educação de Jovens e Adultos é uma “ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que ocorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude”, (p. 14).

Os jovens e adultos que frequentam a modalidade de ensino da EJA são, em sua maioria, pessoas que, por motivos diversos, principalmente de ordem social e econômica, tiveram que interromper suas atividades escolares, ou ainda, foram impedidos de sequer iniciarem a trajetória escolar.

A *Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos*, por meio de um estudo feito no âmbito nacional, na tentativa de traçar um perfil desses alunos jovens e adultos que retornam aos estudos, apresenta dentre outros resultados, que a grande parte dos alunos da EJA tem responsabilidades profissionais e domésticas, pouco tempo de lazer e expectativas de melhorar sua situação de vida (BRASIL, 2002a).

Um estudo feito por Horta (1999) com alunos ingressantes no Ensino Fundamental da EJA apresenta algumas razões, declaradas pelos alunos, que justificam o regresso à escola. Dentre elas, destacam-se aquelas em que o autor definiu como *motivações externas ou pressões da vida social*, que incluíam: “oportunidade de ascensão na empresa, maior exigência de escolaridade, entrar no mercado de trabalho, conquistar melhor emprego, incentivo da firma, melhoria de salário” (p. 42), entre outras.

A pesquisa apontou também aspectos apresentados pelo autor como sendo *motivações internas* e que abarcam justificativas como: “preciso de um objetivo na

vida”, “quero acompanhar meus filhos na escola, pra não ficar pra trás”, “sempre tive vontade de ter o 2º grau”, “quero me sentir útil”, “quero ler e escrever melhor”, (Ibidem, p. 42).

Diante das perspectivas apresentadas e concordando com Fonseca, é importante e necessário que as escolas de EJA acolham esses alunos jovens e adultos e promovam ações políticas e pedagógicas direcionadas às especificidades desse público. Na visão dessa pesquisadora, não se pode desenvolver um trabalho pedagógico na EJA a partir de meras adaptações ou reduções de conteúdos do ensino regular. Há de se fazer adequações, por exemplo, no projeto político pedagógico, currículo, cargas horárias, avaliações, etc.

Em consonância com a visão de Fonseca, a pesquisa ressalta os trabalhos de Januário (2012) e Freitas (2013) que se preocuparam em investigar, de maneira profunda, aspectos da EJA relacionados diretamente a Educação Matemática. Aspectos que englobam desde orientações sobre situações de aprendizagem e atividades que promovam relações entre os participantes e entre saberes de outras áreas à análise do currículo e avaliações da EJA.

2.3 Princípios que podem nortear o trabalho com Modelagem Matemática numa turma de EJA

Em sala de aula, o professor muitas vezes tem dificuldades em responder aos seus alunos que questionam: “Para que serve este conteúdo que estamos aprendendo?” ou “Por que temos que estudar este assunto?”. Nem sempre o professor tem uma explicação satisfatória, e às vezes utiliza-se de respostas nada convincentes, como por exemplo: “Você precisa aprender isso agora, pois é fundamental para o que vai aprender mais tarde”.

Em situações como essa, a curiosidade do aluno, por uma justificativa adequada das coisas que lhe são ensinadas é mais do que natural. Ele precisa de respostas claras que satisfaçam sua curiosidade e estimulem sua mente inquisitiva ou ainda levá-lo à discussão de que conhecimento nem sempre deve ter uma utilidade imediata. Para D’Ambrosio (1986), essa é uma “característica da espécie

humana que deve ser cultivada, estimulada, auxiliada pelo processo educacional, e não estrangulada pela ministração de conteúdos programáticos”, (p. 64). Só assim o professor poderá transformar o desinteresse do aluno pela Matemática numa ativa participação em seu aprendizado.

Entretanto, muitas dessas perguntas não têm respostas fáceis nem breves, cabendo ao professor a tentativa de explicitar a relevância daquilo que ensina. É importante que cada novo tópico a ser tratado seja devidamente motivado. Para esse fim, o professor certamente pode, com frequência, formular problemas práticos interessantes e trazer à aula pequenas histórias e aplicações que ajudem a despertar a curiosidade dos alunos.

Quando se trata da Educação de Jovens e Adultos – EJA – não é diferente. Os alunos dessa modalidade de ensino sentem uma grande necessidade de relacionar o conteúdo que aprendem à realidade que vivenciam. Dessa forma, o professor, enquanto educador, tem a difícil tarefa de constantemente propor atividades que provoquem um desequilíbrio nos alunos, isto é, uma situação que os leve a pensar, raciocinar e que tenha por objetivo, também, incentivá-los a pesquisarem e buscarem novas descobertas.

Nesse contexto, acredita-se que a Modelagem, como estratégia de ensino da Matemática, pode contribuir e favorecer esse papel do professor de proporcionar uma aprendizagem que seja motivadora e desperte no aluno o interesse em aprender a disciplina.

Ao trabalhar com a modelagem, o professor, muitas vezes, acaba integrando vários assuntos referentes à Matemática, o que contribui para o aluno perceber que essa ciência não é estanque nem compartimentalizada, e sim, que existem momentos em que os diversos assuntos apreendidos podem ser relacionados. Não obstante a isso, a Modelagem pode contribuir de maneira expressiva para a percepção e compreensão do aluno sobre a Matemática ser tão importante no cotidiano.

Das diversas hipóteses e argumentações que sustentam a incorporação de atividades de Modelagem Matemática no ensino, e que serão tratadas adiante, dispõe-se uma hipótese inicial, subjacente à proposta de Modelagem Matemática na

Educação, que a abordagem de questões reais, provenientes do âmbito de interesses dos alunos, pode motivar e contribuir para a compreensão de métodos e conteúdos matemáticos, além de mostrar a eles aplicações da Matemática em outras áreas de conhecimento (ALMEIDA; BRITO, 2005).

Em contrapartida, há tempos a Matemática é vista como um objeto a ser ensinado e o professor como o sujeito principal desse processo. Professores dizem “hoje eu ensinei Teorema de Tales”; “Na próxima aula eu iniciarei semelhança de triângulos”, etc., nessas falas, em nenhum momento o professor considera o aluno como sujeito nesse processo. O aluno passa a ser um mero coadjuvante e as falas do professor não demonstram qualquer preocupação com o aprendizado dos alunos.

Ao se trabalhar com Modelagem, isso não acontece, pois o aluno passa a ser o foco do processo e todas as atenções estão voltadas para ele. As atividades de modelagem permitem que os alunos atribuam significados aos conceitos aprendidos por si próprios. Nesse caso o professor passa a ser, não o ator principal, mas um orientador e mediador do conhecimento.

Nesse contexto, um dos objetivos dos professores que trabalham com Modelagem Matemática é desenvolver autonomia dos alunos. É desejo desses professores que seus alunos sejam capazes de estudar, formular, manipular objetos matemáticos, resolver e tomar decisões acerca de problemas que são propostos.

Em conformidade com o exposto acima apresentam-se apontamentos feito por Bassanezi, Burak, Barbosa e Beltrão em suas pesquisas, que legitimam a possibilidade do trabalho com modelagem, em sala, favorecer: a ativação de aspectos motivacionais, maior afinidade do aluno com a aplicação da Matemática e a realização de trabalhos cooperativos.

2.3.1 Aspectos motivacionais e relações com as aplicações da Matemática

Como argumentos a favor da incorporação da Modelagem no ensino de Matemática, Bassanezi (2002) cita que a Modelagem pode proporcionar ao aluno: o desenvolvimento de capacidades que o permitam compreender melhor os conceitos

matemáticos, resolver e interpretar os resultados obtidos na resolução de problemas, e com isso levá-lo a valorizar a própria Matemática; desenvolvimento da competência crítica, bem como da habilidade de utilizar a Matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

Para Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática empregada como estratégia de ensino e aprendizagem é um dos caminhos a seguir para tornar qualquer curso de Matemática – independente do nível – mais atraente e agradável.

Ainda sob a ótica desse pesquisador, a Modelagem Matemática pode se adequar como metodologia alternativa às diversas realidades socioculturais, pois segundo ele, é um processo que combina teoria e prática e motiva seus usuários em tentar entender a realidade que o circunda e até mesmo buscar meios de agir sobre ela e transformá-la.

Para Burak (1987), o professor como mediador do conhecimento tem o papel de ajudar o aluno a suprir suas dificuldades relacionadas à Matemática e, para isso, deve proporcionar ao aluno situações que o leve a pensar, que o permita fazer conexões com suas vivências anteriores e o mais importante, as situações propostas pelo professor devem ser motivadoras, desafiadoras e devem despertar nos alunos o desejo em buscar uma solução para elas.

Barbosa (2004) aponta a motivação que as atividades de modelagem podem proporcionar aos alunos aliadas a facilitação da aprendizagem; o fato da modelagem poder ser utilizada em diferentes áreas, promovendo o desenvolvimento de habilidades explorativas e permitindo ao aluno compreender o papel sociocultural da matemática, como argumentos favoráveis à integração da modelagem no currículo escolar.

Em conformidade com Barbosa (2004), Beltrão (2009) também apresenta a motivação dos alunos no engajamento dos estudos, como um argumento para a aprendizagem da Matemática, utilizando a modelagem. Segundo a autora, o desenvolvimento de atividades que permitam os alunos perceberem o importante papel da Matemática, por meio da sua aplicabilidade na resolução de problemas diversos, pode proporcionar a eles a motivação.

Diante do que foi discutido até aqui, infere-se que a motivação seja, talvez, um dos aspectos mais evocados na literatura que corroboram com a inclusão de atividades de Modelagem Matemática na prática escolar, baseando-se em argumentos que defendem que situações de ensino que permitem ao aluno relacionar o conteúdo e a realidade, podem motivá-lo para o envolvimento nas atividades e para a construção de conhecimento.

Nesse contexto, a questão motivacional e as relações entre a Matemática e a realidade, pautadas na aplicação da Matemática e mediadas pela Modelagem Matemática, estão intimamente ligadas.

2.3.2 A realização de trabalhos cooperativos

A interação é um componente essencial à vida dos seres humanos que vivem em sociedade. Entende-se as interações como ações que indivíduos realizam entre si, com ou sem a finalidade de transferir algum conhecimento, mas com o intuito de estabelecer uma relação, um entendimento entre os envolvidos.

No âmbito educacional, as interações ganham maior importância, uma vez que, “ensinar” e “aprender” são ações eminentes da comunicação e interação.

Diversos autores, entre os quais destaca-se Ole Skovsmose, têm tratado, em suas pesquisas, da importância das interações no processo de ensino e aprendizagem. Skovsmose (2001) pondera que aprender é uma experiência pessoal, porém ocorre em contextos sociais e é mediada pelas relações interpessoais. Em decorrência disso, a aprendizagem depende, em grande parte, desses contatos nas relações interpessoais que ocorrem durante a comunicação entre os participantes.

Ferruzzi e Almeida (2012,) em um artigo intitulado “*Interações dialógicas em atividades de Modelagem Matemática*”, apresentam a importância da interação para a aprendizagem e o quanto ela é enfatizada por diversos pesquisadores.

Durante suas pesquisas para construção do artigo, as autoras argumentaram que se depararam com diversos estudos embasados nas considerações de Vygotsky, os quais defendem que a aprendizagem está associada à interação.

Após um rico levantamento de referências que tratam da relevância da interação no processo de ensino e aprendizagem, as autoras apresentam um trabalho de modelagem, desenvolvido por elas, com alunos do curso de Engenharia Ambiental. No decorrer da atividade, na busca pela solução do problema proposto, as autoras relatam que as interações entre professor-aluno e entre os próprios alunos se mostraram evidentes e contribuíram essencialmente para a construção do conhecimento que se pretendia.

Ferreira e Lorencini Jr atribuem importância à atitude do professor no desenvolvimento do indivíduo e na mediação entre aluno e conhecimento, quando entendem que a aprendizagem do aluno depende, entre outros fatores, de como é orientado nas interações em sala de aula, “[...] a fim de que possam existir situações onde se formule perguntas e respostas que sustentem o seu interesse e motivação no decorrer do processo cognitivo” (FERREIRA; LORENCINI JR, 2005, p. 02, *apud* FERRUZZI; ALMEIDA, 2012, p. 37).

Na finalização do presente estudo, as pesquisadoras concluíram que as características da Modelagem Matemática em sala de aula, de fato, propiciam a participação ativa do aluno, contribuindo para o estabelecimento de interações geradoras de aprendizagem. Nesse sentido, se a interação se mostrou determinante para a aprendizagem, propiciar atividades que oportunizem a interação, como pôde se observar, pode auxiliar o aluno em seu aprendizado e deve ser, portanto, um dos interesses do professor.

Apesar desse estudo, feito pelas pesquisadoras, não ter a intenção de discutir de maneira aprofundada sobre a influência dos aspectos sociais na aprendizagem, fortalece a concepção de que a interação social tem um lugar importante na construção do conhecimento, e a escolha em trabalhar com a Modelagem está em conformidade com essa concepção.

Nessa perspectiva de interação em sala de aula, aborda-se a possibilidade de se realizar trabalhos que estejam inseridos em projeto, que é uma alternativa que se articula bem com a Modelagem Matemática (BRASIL, 2006). Sobre o conceito de projeto, o *Caderno de Orientações Didáticas para EJA* apresenta a seguinte definição:

O projeto é um plano de ação em que os professores e alunos tem uma situação real ou um problema significativo a resolver. Diferencia-se de uma atividade isolada de ensino e aprendizagem pela *intencionalidade* que o orienta, pela *organização*, pelo *tempo* de realização e pelos *efeitos* que produz (SÃO PAULO, 2010a, p. 54).

Ainda de acordo com esse documento, o trabalho com projeto pode assumir um papel relevante no ensino e aprendizagem da Matemática, pois permite que os alunos construam e socializem conhecimentos relacionados a situações problemas, a partir de suas vivências, observações, inferências e interpretações, como também sugere um trabalho com Modelagem Matemática.

Nesse sentido, diversas pesquisas têm evidenciado que o trabalho com modelagem e/ou projetos representa outra forma – diferente da prática escolar cotidiana – de se organizar o trabalho da escola, além de considerarem ambas as atividades como metodologias dedicadas a dar vida ao conteúdo, tornando a escola mais atraente.

Argumentando sobre projetos na escola, a pesquisa concorda com a ideia de Hernández (1998), que acredita estar no trabalho com projetos a possibilidade de fazer com que a participação dos alunos, no processo de construção do conhecimento, seja intensificada. Para esse pesquisador, ao trabalhar com projetos em sala de aula, o conhecimento deixa de estar centrado no professor, que passa a ser um facilitador no processo de ensino e aprendizagem, orientando os alunos à pesquisa e não fornecendo respostas sistemáticas e prontas, como habitualmente se observa.

Tratando-se da articulação proposta, entre trabalho com projetos e Modelagem Matemática, é possível e justificável analisar alguns elementos que comumente orientam essas atividades, como: partir do interesse daqueles que vão participar de seu desenvolvimento, a descoberta de algo novo, que sejam desenvolvidas a partir de problemas cotidianos, além da desfragmentação do conhecimento, já que, tanto o trabalho com modelagem quanto com projeto, estão intimamente ligados à uma perspectiva interdisciplinar.

Em contextos de sala de aula, o volume de comunicação depende, em grande parte, da forma como são organizadas as situações de ensino e aprendizagem, bem como das interações que subsidiam as ações do professor, dos alunos e as relações

interpessoais. Nesse sentido, pode-se afirmar que o formato das atividades desenvolvidas em sala de aula influirá diretamente na qualidade das interações dos participantes.

A intenção ao desenvolver um estudo com Modelagem, a partir de um projeto interdisciplinar, se deu pelo fato do Colégio, em questão, apoiar atividades que permitam integração entre as diferentes disciplinas, possibilitando uma maior articulação dos conhecimentos por parte dos alunos. Outro fator importante está relacionado ao que a Proposta Curricular Nacional da EJA trata como “uma boa situação de aprendizagem”. De acordo com esse documento:

[...] uma boa situação de aprendizagem é aquela em que as pessoas podem interagir coletivamente, permitindo a circulação de informações, em que os alunos tenham de colocar em jogo tudo o que sabem e pensam sobre o objeto de conhecimento, tenham problemas a resolver e decisões a tomar em função do que será aprendido, que se coloquem desafios ao mesmo tempo “difíceis e possíveis” e que o objeto a ser apreendido mantenha suas características de objeto sociocultural real, sem se transformar em um objeto escolar vazio de significado (BRASIL, 2002a, p. 102).

O mesmo documento acena para a importância de se trabalhar com projetos na EJA, porém ressalta que o tema escolhido deve partir do interesse dos alunos ou de um problema que seja motivador. Expõe também que ao organizar os conteúdos escolares por meio de projetos, a escola e os professores possibilitam aos alunos a “aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes que lhes possibilitem organizar as informações, descobrindo as relações que podem estabelecer a partir de um tema ou problema.” (BRASIL, 2002b, p. 57).

Sob essa ótica, a Modelagem Matemática pode promover de forma positiva essa interação entre os alunos e entre o professor e o aluno, por ser uma atividade de princípio cooperativo - uma vez que tem como objetivo produzir um produto final comum ao grupo - em que a cooperação e a interação entre os envolvidos têm um importante papel na construção do conhecimento.

2.4 Teoria da Aprendizagem Significativa

David P. Ausubel (1918-2008) foi um grande psicólogo da educação estadunidense. Dentre suas contribuições, a maior foi a proposição de uma teoria

explicativa do processo de aprendizagem humana, embasada nos princípios organizacionais da cognição, que ele chamou de *teoria da aprendizagem significativa*.

Essa teoria tem como foco principal a *aprendizagem cognitiva*, que é a responsável pelo armazenamento, de forma organizada, de informações na mente do aluno, constituindo um conjunto complexo de conceitos, que são representações de suas experiências, conhecido por estrutura cognitiva.

Para Ausubel (1980), é nessa estrutura cognitiva que ocorre a organização e integração entre as informações processadas pelo sujeito aprendiz, permitindo que esse adquira e utilize o seu conhecimento. Nesse aspecto, seus estudos são constantemente direcionados para a aprendizagem em sala de aula, buscando compreender como se dá a aprendizagem dos alunos.

Em sua *teoria da aprendizagem significativa*, Ausubel defende que o fator que mais influencia na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe, isto é, a bagagem de conhecimentos que o aluno traz consigo para a escola. Assim, o professor fica responsável por identificar quais são esses conhecimentos e resgatá-los, relacionando-os aos conteúdos que pretende ensinar. De acordo com Moreira (1999, p. 152):

Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos.

Com essa percepção, Ausubel reforça o que alguns estudos na área da Educação Matemática, como Burak (1987) e a *Proposta Curricular para a educação de jovens e adultos* (BRASIL, 2002a), têm referenciado acerca da importância do professor partir dos conhecimentos prévios dos alunos:

As dificuldades no ensino de matemática serão superadas quando, pacientemente, o professor ajudar seu aluno a recuperar as deficiências nos conceitos básicos da disciplina, propiciando-lhe a oportunidade de colocar sua própria forma de pensar, ao aproveitar suas experiências anteriores [...] (BURAK, 1987, p. 17).

Para que a aprendizagem significativa possa acontecer, é necessário investir em ações que potencializam a disponibilidade do aluno para a aprendizagem, o que se traduz, por exemplo, no empenho em estabelecer relações entre seus conhecimentos prévios sobre um assunto e o que está aprendendo sobre ele (BRASIL, 2002a, p. 101).

Assim, ao partir de conhecimentos prévios dos alunos para “ancorar” o conteúdo a ser abordado, o professor está possibilitando que a aprendizagem seja de fato significativa, pois segundo Ausubel (1980, p. 34):

A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum *aspecto relevante existente* na estrutura cognitiva do aluno.

O conhecimento contido na estrutura cognitiva do aluno, que serve de “âncora” para a compreensão da nova informação, Ausubel define como conceito *subsunçor*, e reforça que a aprendizagem significativa só ocorre quando a nova informação ancora-se nos conceitos subsunçores.

Em se tratando da Modelagem Matemática o professor deve prever quais conhecimentos os alunos deverão mobilizar para resolver o problema em jogo, pois a manipulação desses conhecimentos terá grande influência nas interações que os alunos deverão fazer – entre seus conhecimentos prévios e o problema – durante o processo de modelação, se colocando como protagonista do processo.

Nesse sentido, Ausubel propõe ao professor formular situações-problema que sejam diferentes das tradicionalmente conhecidas pelos alunos, situações que necessitem de uma mobilização de conhecimentos anteriores do aluno – conceitos subsunçores –, permitindo que ele, professor, evidencie a ocorrência, ou não, de uma aprendizagem significativa. Para esse fim, acredita-se que a modelagem possa proporcionar uma problemática que exija do aluno a mobilização sugerida por Ausubel.

Ausubel (1980) aponta duas condições para que a aprendizagem significativa ocorra:

1) *Disposição do aluno para a aprendizagem significativa*, ou seja, uma disposição para relacionar de forma não arbitrária e substantiva o novo material à sua estrutura cognitiva, uma vez que, se a intenção do aluno for de memorizar o novo material, a aprendizagem será automática e não significativa.

2) O material aprendido deve ser potencialmente significativo, pois segundo Ausubel, deve existir uma relação lógica entre o novo material e outros conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Considerando a importância dessa relação entre o novo saber e o cognitivo do aluno, Ausubel recomenda o uso de *organizadores prévios*, que são materiais introdutórios apresentados pelo professor, antes do objeto que pretende ensinar. De acordo com Ausubel, esses organizadores servem de “ponte cognitiva” entre os saberes e, portanto, corroboram para a aprendizagem significativa.

Nesse aspecto, Moreira (1999, p. 162) apresenta alguns pontos a serem considerados pelo professor, acerca da organização do conteúdo que pretende ensinar, que possibilitam a facilitação da aprendizagem significativa. São eles:

- Estabelecer uma ordem de exploração do conteúdo em relação ao seu potencial significativo, com o objetivo de favorecer a assimilação do aluno.
- Identificar os subsunçores relevantes à aprendizagem do conteúdo.
- Diagnosticar as informações que o aluno já sabe, prevendo possíveis relações entre o novo conteúdo e sua estrutura cognitiva.
- Utilizar uma estratégia de ensino que priorize associações entre os conceitos subsunçores do aluno, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

Com o objetivo de explicitar, de forma clara e precisa, o processo de aquisição, assimilação e organização de significados na estrutura cognitiva do aprendiz, Ausubel (1980, p. 57) propõe a “teoria da assimilação”, representada por Moreira (1999) por meio do seguinte esquema:

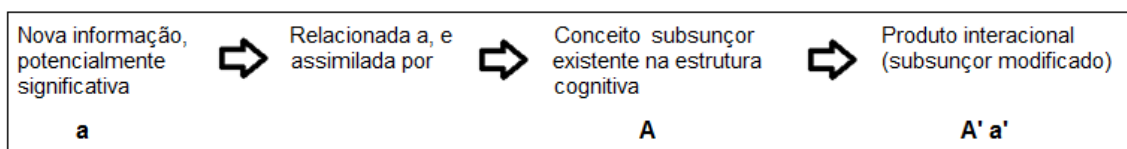


Figura 5- Representação da Teoria da Assimilação segundo Moreira (1999, p. 157).

O esquema nos permite identificar como se dá a relação entre a nova informação e um conceito subsunçor, e também, o produto final dessa relação, que segundo Ausubel é um conceito subsunçor modificado.

Como exemplo dessa relação, pode-se citar um aluno que já possui o conceito de força (conceito subsunçor) em sua estrutura cognitiva, e quando lhe é apresentado o conceito de força nuclear, por exemplo, este aluno o assimilará a partir do conceito de força já adquirido, passando a reter em sua estrutura cognitiva o que Ausubel chama de conceito subsunçor modificado.

Para situações de aprendizagem em que não ocorram as interações propostas no esquema, Ausubel define como *aprendizagem mecânica* (ou automática). De acordo com esse pesquisador, é um tipo de aprendizagem que contrasta com a significativa, pois nesse caso as novas informações (conhecimentos) não se ligam a conceitos subsunçores e, portanto, ficam armazenados de maneira arbitrária.

Ainda sobre a aprendizagem mecânica, segundo Moreira (1999), Ausubel não acredita que essa e a aprendizagem significativa sejam disjuntas, mas que a ocorrência da primeira pode cooperar com a segunda. Para Moreira (1999, p. 154), Ausubel considera que:

A aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire informações em uma área de conhecimento completamente nova para ele, isto é, a aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados. À medida que a aprendizagem começa a ser significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações.

Nesse contexto, os principais conceitos relativos à teoria ausubeliana se articulam, como sugere o esquema de Faria (1989) *apud* Cruz (2002):

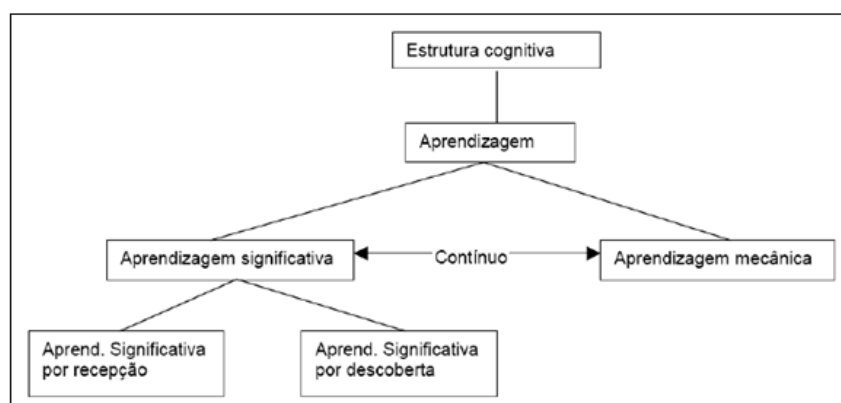


Figura 6- Diagrama sobre a aprendizagem significativa por Cruz (2002, p. 56).

De acordo com o esquema, a aprendizagem significativa pode ocorrer por meio da *recepção* ou da *descoberta*.

Para Ausubel (1980, p. 20), a aprendizagem por *recepção* ocorre quando o aprendiz recebe de forma pronta o que deve ser aprendido, cabendo a ele fazer relações entre as novas informações e àquelas contidas em sua estrutura cognitiva. Em contrapartida, a aprendizagem por *descoberta* supõe que o aluno descubra “sozinho” determinado conceito e seja capaz de conectá-lo a conceitos subsunçores preexistentes em sua mente.

Na aprendizagem receptiva o conteúdo é apresentado sob a forma de uma proposição que não exige raciocínio e que necessita apenas ser compreendida ou memorizada. Na aprendizagem por descoberta, por sua vez, o aluno deve primeiramente descobrir este conteúdo através da produção de proposições que representem ou a solução para problemas sugeridos ou a sequência de etapas para a sua solução (Ibidem, p. 51).

Em ambos os casos, uma vez que a nova informação incorporou-se de forma não arbitrária à estrutura cognitiva do aprendiz, pode-se dizer que, segundo a teoria de Ausubel, houve uma aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa é distinguida por Ausubel (1980), em três tipos básicos:

- *Aprendizagem representacional*: envolve a atribuição de significados e valores aos símbolos ou palavras, que permitirão ao aprendiz estabelecer ligações entre os símbolos e seus referentes – que podem ser objetos matemáticos, conceitos, etc.

- *Aprendizagem de conceitos*: é uma ampliação da aprendizagem representacional. Esse tipo de aprendizagem está centrado nas regularidades que caracterizam os referentes.

- *Aprendizagem proposicional*: O cerne dessa aprendizagem consiste no aprendiz ir além dos significados das palavras que formam a proposição, isto é, refere-se ao aprendizado do significado de ideias expostas por meio de proposição ou combinação de palavras.

Uma vez conhecido os tipos de aprendizagem significativa que contribuem para a articulação, de maneira não arbitrária, de novas ideias à estrutura cognitiva

do aprendiz, Ausubel (1980) sugere três formas distintas de tal articulação ocorrer: por *subordinação*, por *superordenação* e de forma *combinatória*.

A aprendizagem por *subordinação* ocorre quando a nova informação é um exemplo ou uma especificação, de algo que o aprendiz já sabe. Existe uma relação de dependência entre a nova informação e um conhecimento adquirido anteriormente.

A aprendizagem por *superordenação* acontece quando um conceito *potencialmente significativo* é assimilado a partir de conceitos menos inclusivos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Diferentemente das anteriores, a aprendizagem de forma *combinatória* ocorre em menor escala, e advém de conceitos que não guardam relações, de subordinação ou superordenação, com o conhecimento que serviu de âncora para a nova informação integrar a estrutura cognitiva do aprendiz. Nesse caso, a nova informação é mais ampla, e se relaciona de forma bem geral ao cognitivo do aprendiz, contrário do que ocorre nos outros dois casos.

Durante a ocorrência de aprendizagem significativa, Ausubel apresenta dois processos que estão relacionados a esse tipo de aprendizagem. O primeiro, chamado de *diferenciação progressiva*, está mais ligado à aprendizagem subordinada, e o segundo, conhecido por *reconciliação integrativa*, às aprendizagens superordenada e combinatória.

Segundo Moreira (1999, p. 160), Ausubel faz uma referência a esses dois processos do ponto de vista instrucional, que pode auxiliar o trabalho do professor, e os define:

a) *Diferenciação progressiva*: é o programa de ensino propriamente dito, segundo o qual o professor expõe ideias, conceitos mais gerais e inclusivos acerca do conteúdo e, posteriormente, atenta para diferenciação em relação aos detalhes e especificidades do assunto.

b) *Reconciliação integrativa*: esse é um princípio na qual o professor explora relações entre as ideias acerca do conteúdo abordado, apontando similaridades e

diferenças importantes, que permitam ao aprendiz identificar algumas desconexões existentes ou aparentes.

Assim, a partir dessa explanação acerca da teoria de Ausubel, considera-se essa teoria como um referencial onde é possível analisar o impacto que uma atividade de Modelagem Matemática, a partir de um trabalho com projeto, pode promover no aprendizado dos alunos da EJA.

2.5 Concepções de modelagem utilizadas na pesquisa

Aliado ao referencial teórico de Ausubel, adota-se como centrais, as concepções de Dionísio Burak e Maria Eli Puga Beltrão acerca do uso da modelagem como metodologia de ensino.

Para Burak (2007), existem cinco pontos que, em sua concepção, são contemplados em atividades de modelagem no ensino. Esses pontos são explicitados como:

1. Construção e o desenvolvimento de conceitos e dos conteúdos matemáticos – a qual ocorre de forma dinâmica e procura a relação de cooperação entre professor e aluno.
2. Contextualização das situações – entendida como a relação entre os conteúdos e temas nos diversos contextos, sejam eles, o social, o econômico, o cultural.
3. Integração com outras áreas do conhecimento – muito próxima a uma atitude interdisciplinar, pois permite o diálogo da matemática com outros campos.
4. Socialização favorecida pelo trabalho em grupo – compreendida como o processo de interação entre os alunos, o professor e a sociedade como um todo.
5. Ruptura com o currículo linear – que constitui em uma das características mais importantes da Modelagem, pois com ela, não são os conteúdos que determinam o problema, mas o contrário (BURAK, 2007, p. 1).

O que este trabalho propõe desenvolver, com os alunos da EJA, a partir dos expostos nos documentos oficiais do MEC, que orientam o trabalho dos professores dessa modalidade de ensino, está em concordância com os pontos apresentados por Burak (2007). Assim, a pesquisa considera a concepção desse pesquisador como norteadora do trabalho com modelagem.

Contudo, para que seja possível explorar os pontos explicitados por Burak (2007), é necessário que o professor desenvolva atividades que permitam contemplá-los. Nesse aspecto, busca-se no trabalho de Beltrão alternativas que nos permitissem alcançar o objetivo.

Em sua Tese, Beltrão (2009) buscou explorar a modelagem matemática por meio de problemas reais que carecem da matemática aplicada para serem resolvidos. Sua pesquisa intitulada *Ensino de Cálculo pela Modelagem e Aplicações: Teoria e Prática* foi desenvolvida com alunos da disciplina de Cálculo, em um curso Superior de Tecnologia de Alimentos, de uma Faculdade do Estado de São Paulo. Segundo a pesquisadora, seu trabalho “teve como alvo a implementação da Modelagem e Aplicações como abordagem de ensino de Cálculo” (p. 8).

Para esse fim, Beltrão propõe a materialização da modelagem em sala de aula por meio de *fases e etapas*, as quais esta pesquisa trabalha e descreve a seguir, pela inspiração nas sugestões da pesquisadora e, considerando serem possíveis de se desenvolver ao pensar na modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática.

As *fases e etapas* sugeridas por Beltrão são:

a) **Fase I – Apresentação do conteúdo pelo professor** – De acordo com a pesquisadora essa fase desenvolve-se em três *etapas*, em que a primeira consiste na exposição do conteúdo por abordagem histórica.

Alguns autores (ALMEIDA; FERRUZI, 2012; BARBOSA, 2004; MAIA, 2007) têm mostrado o quão é importante que o professor se preocupe com o tipo de abordagem que fará sobre o conteúdo que pretende ensinar, pois a forma como o professor apresenta o conteúdo pode instigar mais, ou menos, os alunos a estudarem-no. Pautados em orientações expostas em documentos oficiais do MEC, este trabalho concorda com Beltrão acerca da utilização de tópicos da história da matemática na apresentação do conteúdo. A esse respeito os *Cadernos de Orientações Didáticas para EJA* expõem que:

A história da matemática deve fazer parte das aulas de matemática na EJA, para possibilitar aos estudantes o conhecimento sobre as contribuições da matemática para a compreensão e resolução de problemas do homem através dos tempos e das civilizações (SÃO PAULO, 2010a, p. 50).

A segunda etapa, proposta por Beltrão (2009), tem como foco a exploração, feita pelo professor, de algumas aplicações do conteúdo que será estudado.

As aplicações da matemática permitem ao aluno compreender a importância da matemática no mundo contemporâneo. Se exploradas em sala de aula, as aplicações podem estimular o aprendizado dos alunos, despertando curiosidades e interesses em conhecer mais dessa ciência, que possibilita ao ser humano resolver inúmeras situações, relativas a diversas áreas do conhecimento humano.

Segundo Beltrão (2009), é importante que o professor trabalhe resolução de problemas reais, com significado, ao invés de apenas enfatizar o ensino de regras abstratas que não se relacionam o cotidiano dos estudantes.

Nesse contexto, a abordagem de conteúdos matemáticos por meio das aplicações mostra-se muito pertinente, uma vez que uma das possibilidades ao se trabalhar com modelagem matemática é discutir problemas advindos da realidade dos alunos.

A terceira etapa versa sobre o momento em que o professor apresenta as definições, propriedades importantes e outros exemplos significativos acerca do tema estudado. Neste ponto, Beltrão defende a importância da sistematização, e orienta quanto à utilização de estratégias diversificadas para essa etapa que podem advir do uso da lousa, notas de aula, consulta a livros didáticos e recursos computacionais.

b) **Fase II** – *A apresentação pelo aluno de situações que envolvem o conteúdo matemático em estudo* – Nessa fase o aluno é convidado a pesquisar sobre modelos e aplicações que se relacionam com o assunto definido para estudo.

É um importante passo para que os alunos possam compreender a matemática como uma ferramenta que possibilita solucionar problemas nas diversas áreas do conhecimento.

Nesse aspecto, a presente pesquisa considera Bassanezi (2002, p. 15) que entende que:

[...] para um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades,

necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano.

Para Beltrão, esse é o momento em que o aluno participa efetivamente na escolha do que pretende investigar, dentro do tema escolhido, a partir das pesquisas feitas inicialmente. Ainda segundo essa pesquisadora, também nessa fase cabe ao professor fomentar uma discussão que envolva tanto o tema modelado, quanto a Matemática nele compreendida.

c) **Fase III** – *A elaboração pelo aluno de situações expressas por modelos ou aplicações* – Essa é a fase dedicada ao desenvolvimento da Modelagem Matemática partindo dos aspectos que foram escolhidos para serem investigados sobre determinado tema.

O que se propõe para essa fase também corrobora com as ideias de Bassanezi, que defende o uso de situações representativas que permitam identificar a aplicação da modelagem em diversas situações, com o intuito de estimular os alunos, e professores, a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores. Há concordância com Almeida e Dias (2004) que defendem ser interessante iniciar atividades de modelagem a partir de modelos matemáticos já construídos.

Uma vez apresentadas as principais concepções de modelagem que essa pesquisa utiliza e que nortearam o desenvolvimento da atividade de modelagem, nos próximos capítulos, haverá as descrições do trabalho de pesquisa e atividades desenvolvidas.

FUNDAMENTOS DA PESQUISA

Este capítulo descreverá, inicialmente, a problemática, a metodologia e os procedimentos metodológicos realizados. Em seguida, há uma caracterização dos participantes da pesquisa e explicitação do objeto matemático, tema do estudo.

Esse conjunto de informações compõe a investigação, com o objetivo de responder a questão de pesquisa proposta:

Quais são os resultados obtidos, a partir de uma experiência com a Modelagem Matemática, no ensino e aprendizagem do conceito de função quadrática numa turma de EJA?

3.1 Problemática

Há tempos, a Matemática tem sido considerada por muitos alunos, dos mais diversos níveis de ensino, como a disciplina predominante a gerar dificuldades no aprendizado.

Em relação aos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), Fonseca (2012, p. 23) expõe:

[...] especialmente em relação à aprendizagem da Matemática, temos observado traços muito próprios da relação do aprendiz adulto com o conhecimento matemático e com a situação discursiva em que se forja (e que é forjada por) seu aprendizado escolar. Em primeiro lugar, naturalmente, emerge uma relação utilitária, no âmbito da qual o sujeito demanda não apenas o conhecimento que lhe seria de alguma forma necessário para o enfrentamento (urgente) das situações de sua vida (e de sua luta diária), mas também a explicitação da utilidade desse conhecimento, não só porque justifica, mas porque lhe fornece, à sua relação adulta com o objeto do conhecimento, algumas chaves de interpretação e produção de sentido.

Entretanto, a atuação como professor da EJA tem oportunizado conhecer um pouco mais desse público de estudantes, e perceber que a importância que esses

têm designado à Matemática, muitas vezes não se mostrou suficiente na busca pela superação de suas dificuldades de aprendizagem.

A respeito dessas dificuldades, e com o propósito de se conhecer mais os indivíduos que compõem esse grupo, suas características humanas e sociais, buscando compreender suas necessidades, no âmbito escolar, diversos estudos vêm sendo desenvolvidos no Brasil, desde a década de 1990.

Desde então, muitos desses estudos têm reunido orientações que visam nortear o trabalho do professor em sala de aula, em relação a metodologias e abordagem de conteúdos que promovam aprendizagem significativa, no sentido de Ausubel, para esses alunos.

As orientações estão presentes em documentos oficiais e outras publicações, como pesquisas acadêmicas, porém verifica-se a existência de poucos estudos que as validem a partir de experiências vivenciadas em sala de aula.

Dessa forma, a problemática, em questão, circunscreve as dificuldades do ensino e aprendizagem da Matemática na EJA, reforçadas pela necessidade de se considerar fatores como: “o contrato didático, a gestão do tempo, a organização do espaço, os recursos didáticos, a interação e a cooperação, e a interação da escola com as práticas sociais.” (BRASIL, 2002a, p. 80).

Nesse contexto, a motivação deste trabalho foi o desenvolvimento de um estudo que possa trazer contribuições a esse campo, especificamente, com os alunos do Ensino Médio, sobre o tema função.

Da mesma forma que no ensino dito *regular*, na EJA, o conteúdo Função, é explorado nas séries do Ensino Médio, porém a pouca produção de materiais que auxiliem o professor da EJA sobre o ensino de Função tem dificultado a abordagem desse conteúdo, considerando uma aprendizagem significativa. Esta afirmação pode ser constatada quando se busca trabalhos acadêmicos e livros didáticos destinados a esse fim.

Analisando, por exemplo, a pesquisa de Marcos José Ardenghi (2008) que reuniu, em um estudo do tipo estado da arte, todos os trabalhos acadêmicos sobre o tema Função desenvolvidos no período de 1970 a 2005 no Brasil, não se encontrou

um que tratasse do ensino de Função na Educação de Jovens e Adultos. Na procura por livros didáticos que pudessem preencher essa lacuna, encontrou-se apenas a coleção “*Viver e Aprender*”, destinada ao público da EJA e que contém volumes para as séries do Ensino Médio, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático de Educação de Jovens e Adultos em 2014 – PNLD-EJA 2014.

Diante do exposto, acredita-se que há necessidade de pesquisas nessa área, pela importância desse tópico da matemática e a relevância que seu estudo traz para novos assuntos e conhecimentos. Nessa ótica, a pesquisa se propõe a desenvolver um estudo na EJA acerca de tópicos da Função Quadrática, com o objetivo de permitir que os alunos possam fazer novas leituras acerca de situações de seu cotidiano, adquirindo compreensão sobre: a relação de dependência entre grandezas, construção e interpretação de gráficos, além de cálculos algébricos.

Durante as aulas, os alunos têm apresentado interesse pelos tópicos estudados, porém a dificuldade em articular todas essas informações – grandezas, relação de dependência, gráficos, expressões algébricas – e seus significados dentro do contexto de uma situação problema, culmina em considerar novas estratégias para a abordagem do tema Função, mais especificamente, Função Quadrática.

Nessa perspectiva, declara-se que o objetivo para este trabalho e as hipóteses da pesquisa são:

3.1.1 Objetivo

Verificar se uma abordagem de ensino, diferente da tradicionalmente conhecida pelos alunos, pode favorecer ao processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Função Quadrática.

3.1.2 Hipóteses da Pesquisa

As hipóteses para este trabalho são de que:

- Alguns dos fatores que dificultam o processo de ensino e aprendizagem de funções estão diretamente relacionados a pouca participação dos alunos no processo de construção do conhecimento;

- A Modelagem, como estratégia de ensino, tem potencial para: considerar os fatores expostos pela Proposta Curricular da EJA acerca do ensino de Matemática, contribuir para um maior envolvimento dos alunos nas aulas e proporcionar momentos de interação que favoreçam a aprendizagem.

3.2 Metodologia

O trabalho tem cunho qualitativo, que segundo Creswell (2010), é um processo de pesquisa que envolve questões e procedimentos para coleta de dados, no ambiente do participante, e posteriormente a análise e interpretações dos dados, feitas pelo pesquisador.

Os autores Bogdan e Biklen (1994, p. 47) também apresentam algumas características desse tipo de pesquisa:

- 1 – Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
- 2- A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números.
- 3- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
- 4- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
- 5- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Considera-se nesta pesquisa a metodologia estudo de caso, uma vez que o objetivo é investigar uma situação particular de um grupo de sujeitos que fazem parte da mesma formação e instituição. Versa-se-á sobre o olhar dos autores Bogdan e Biklen (1994), considerando procedimentos metodológicos para construção de investigações e validação dos estudos propostos.

A coleta de dados, para posterior análise, ocorreu por meio de três instrumentos: observação, filmagem e registros dos alunos.

Os encontros foram filmados por um professor de Matemática que atuou como observador, junto ao professor-pesquisador, durante o desenvolvimento da atividade. A necessidade de um acompanhamento maior em relação à observação se deu por dois motivos: o grande número de alunos participantes e a importância da observação ser feita por mais de uma pessoa. Essa ação permitiu uma análise mais ampla das situações vivenciadas durante o processo.

O objetivo e a descrição da atividade foram relatados ao professor observador, que ficou incumbido de registrar os momentos de diálogos dos alunos, bem como, as questões geradoras de tais diálogos. Assim, as gravações possibilitaram transcrever alguns episódios considerados relevantes para a análise da atividade.

Além das gravações, o observador relatou ao professor-pesquisador algumas percepções suas em relação à interação dos alunos e, a facilidade ou dificuldade quanto a mobilização de certos conceitos necessários para a realização da tarefa. Essas percepções do observador foram registradas e também contribuíram para as análises posteriores.

Os registros dos alunos, último instrumento de análise, foram recolhidos e possibilitaram diagnosticar como se deu o desenvolvimento dos alunos durante a atividade e verificar quais grupos conseguiram chegar a solução do problema proposto. Esses registros estão apresentados nesse trabalho no formato de protocolos, no capítulo 5.

3.3 Procedimentos Metodológicos

Do que foi exposto acerca da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, bem como sua possível articulação ao trabalho com projetos, seguirá, de maneira detalhada, a pesquisa.

A investigação foi realizada com uma turma de 24 alunos, da 1ª série do Ensino Médio da EJA, de um colégio em São Paulo sendo que, para o desenvolvimento do projeto, os alunos se organizaram em 6 grupos com 4 integrantes cada.

Os passos consistiram em desenvolver uma atividade de Modelagem com os alunos seguindo as *fases e etapas* sugeridas por Beltrão (2009), em que:

A *Fase I* consistiu em apresentar o conteúdo – função quadrática – para os alunos (*etapa 1*); explorar aplicações desse conteúdo como forma de motivá-los ao estudo do tema (*etapa 2*); apresentar as definições e propriedades da função quadrática e explorar alguns problemas de máximo e mínimo (*etapa 3*).

Na *Fase II* os alunos desenvolveram, juntamente com o professor de Física, um estudo sobre lançamento de projéteis que abordou basicamente: grandezas envolvidas no lançamento de um projétil, trajetória, tipos de velocidades e representação gráfica. Neste momento os grupos, orientados pelo professor de Física, iniciaram a construção de seus foguetes (feitos de garrafas PET).

Ainda nesta *fase*, junto ao professor de Matemática, os alunos fizeram uma pesquisa envolvendo aplicações relacionadas a tópicos de função quadrática.

Após discussão entre os professores e os alunos acerca da pesquisa realizada, deu-se início a *Fase III*, destinada ao desenvolvimento do modelo. Essa última fase também foi dividida em etapas que consistiram em:

- 1) lançar os foguetes e coletar de informações necessárias (alcance e tempo total) importantes para a construção e validação do modelo;
- 2) selecionar as grandezas que seriam consideradas no estudo do fenômeno;
- 3) construir o modelo que permitiria calcular altura do projétil após o seu lançamento;

3.4 O Cenário onde ocorreu a pesquisa

A pesquisa com a modelagem foi realizada em um Colégio da cidade de São Paulo, em uma instituição de ensino particular, na qual o pesquisador integra o quadro de professores. A instituição oferece o serviço de Educação a Jovens e Adultos, gratuitamente, no período noturno, mais precisamente das 19:30hs até 22:30hs.

O ensino oferecido ao público da EJA compreende desde a 1ª série do Ensino Fundamental I até a 3ª Série do Ensino Médio, em caráter de suplência, totalizando 19 turmas.

O Colégio, que é católico, funciona desde o final da década de 1940, sendo que a Educação de Jovens e Adultos teve início no ano de 1977, e conta com uma grande infraestrutura – sala de multimídia, biblioteca, laboratórios de Química, Física e Informática – que possibilita ao corpo docente desenvolver diversas atividades extraclases.

Com base nos preceitos morais e cristãos, o Colégio prima pela formação de um cidadão crítico, consciente do seu papel social e capaz de perceber e mostrar o seu valor diante a sociedade.

Diante deste cenário, é desejo do Colégio que os professores se empenhem em sua formação continuada, com o objetivo de promover experiências que sejam facilitadoras da aprendizagem dos jovens e adultos, e que possam contribuir para a boa formação desses alunos.

A escolha desse Colégio para se desenvolver o trabalho de modelagem, deu-se pelo fato do pesquisador ser o próprio professor de matemática da turma, o que, ao olhar do pesquisador, poderia contribuir para um maior envolvimento dos alunos com a atividade a ser proposta.

3.4.1 Caracterização do grupo de alunos

De maneira geral, o público da EJA que frequenta o Colégio é, em sua maioria, composto por pessoas que, há tempos, tiveram seu primeiro contato com a escola e agora estão retornando aos estudos. As turmas de Ensino Fundamental I e II são as que concentram maior número de alunos com idades entre 30 e 60 anos. Nas turmas de Ensino Médio a faixa etária compreende alunos de 20 até 45 anos, aproximadamente.

Uma importante característica observada pelo pesquisador foi de que, grande parte dos alunos da EJA, mora em bairros distantes do Colégio, e muitos desses

alunos dependem de transporte público para se deslocarem diariamente entre casa, trabalho e escola.

Os alunos, apesar de muitos dividirem seu tempo entre os estudos e o trabalho, destacam-se pela vontade de aprender e disposição em participar das atividades que lhes são propostas.

A turma de EJA, alvo da pesquisa, foi a 1ª série A do Ensino Médio, que iniciou o ano letivo em 2014, com 35 alunos, na faixa etária mencionada, e os encontros para o desenvolvimento da atividade proposta foram durante as aulas regulares de Matemática e Física.

Após a apresentação do projeto pelo pesquisador, os alunos aceitaram participar voluntariamente da atividade e forneceram autorização para a divulgação, para fins de estudo e pesquisa, dos dados obtidos durante o processo de modelagem.

A atividade de modelagem deu-se por meio de um projeto interdisciplinar entre os professores de Matemática e de Física sobre lançamento de projéteis – acima mencionado – que pretendeu estabelecer um cenário para o desenvolvimento do modelo, tendo por finalidade a aprendizagem de conceitos de função quadrática.

3.5 O objeto matemático estudado

A seguir, apresentam-se os conceitos relacionados ao estudo da função quadrática que são comumente tratados nas aulas.

I. Definição

Uma função quadrática é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a , b e c números reais e $a \neq 0$.

II. Parábola

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

III. Concavidade

A parábola representativa da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode ter a concavidade voltada para “cima” ou voltada para “baixo”.

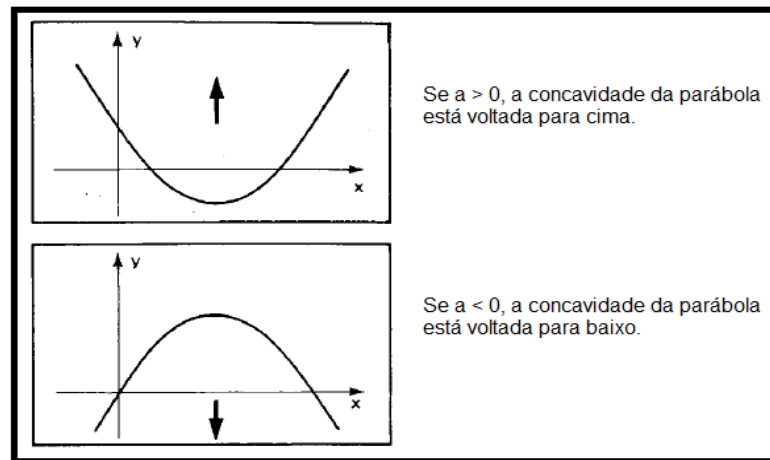


Figura 7- Determinação da concavidade da parábola.

IV. Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x reais tais que $f(x) = 0$.

V. Vértice da Parábola

O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

VI. Valor de máximo e mínimo da função quadrática

- Se $a > 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado de **ponto de mínimo**, e a ordenada do vértice é chamada de **valor mínimo** da função.

- Se $a < 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é chamado de **ponto de máximo**, e a ordenada do vértice é chamada de **valor máximo** da função.

VII. Eixo de simetria

O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice.

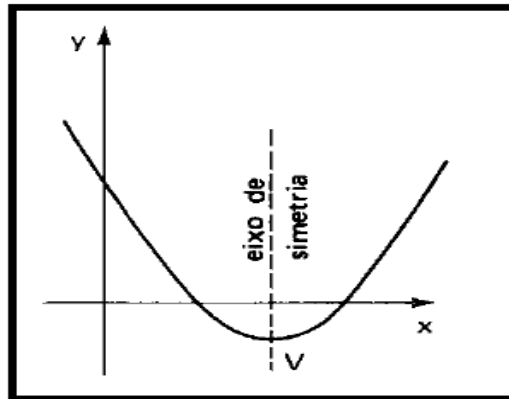


Figura 8- Indicação do eixo de simetria na parábola.

No próximo capítulo há a apresentação de como esses conceitos foram introduzidos no decorrer das atividades.

A PESQUISA EMPÍRICA

A partir de sugestões apresentadas pelas *Orientações Curriculares do Ensino Médio* (BRASIL, 2006), entre outros documentos antes citados acerca do trabalho com projetos, e aproveitando tópicos de Ciência e Tecnologia, que o professor de Física aborda em suas aulas, foi apresentado um desafio aos alunos de construir um foguete e fazerem o seu lançamento.

Os alunos aceitaram o desafio que, posteriormente, tornou-se um projeto interdisciplinar, em que o professor de Física pôde desenvolver o conteúdo sobre grandezas escalares e vetoriais, e leis de Newton, enquanto o professor de Matemática tratou do estudo da função quadrática.

Foi solicitado aos alunos que trabalhassem em grupo, uma vez que necessitariam fazer investigações sobre o tema “foguete” e também seriam responsáveis pela confecção de um projétil com garrafas PET. Além disso, infere-se que o fato da aprendizagem matemática poder se desenvolver num contexto de interações, em que os envolvidos possam trocar ideias e saberes, a fim de construir coletivamente novos conhecimentos, contribui efetivamente para o aprendizado. Reforça-se a concepção ao analisar a Proposta Curricular da EJA, que expõe como um dos objetivos gerais do ensino de Matemática, possibilitar aos alunos:

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2002b, p. 19).

Nesse sentido, o desenvolvimento do projeto interdisciplinar foi dividido em três momentos: o primeiro momento está relacionado a todo processo anterior ao lançamento do foguete; o segundo momento remete-se ao dia do lançamento, e o terceiro, compreende a atividade de modelagem propriamente dita.

Segue a descrição detalhada de cada um desses momentos:

4.1 Primeiro Momento

Neste passo, foram propostas atividades, com os alunos, com o intuito de contemplar as *fases 1 e 2*, e suas *etapas*, sugeridas por Beltrão (2009).

Na *fase I*, que consiste na *apresentação do conteúdo pelo professor*, opta-se, como sugestão do professor de Física, passar para os alunos o filme “O Céu de Outubro”¹, que conta a história de um adolescente que, com o apoio de uma professora, convence alguns amigos a participarem do seu projeto de colocar um foguete em órbita.

A intenção foi motivar os alunos sobre os tópicos de Matemática e Física que seriam estudados – o que Beltrão sugere, na *etapa 1*, a partir do uso da abordagem histórica. Pretendemos também, com o filme, incentivar os alunos para o engajamento no projeto.

Depois de assistir ao filme conversamos a respeito do enredo, e os alunos se mostraram empolgados para construir seus próprios projéteis nas aulas de Física.

Nas aulas seguintes, de Matemática, foram apresentadas algumas situações-problema objetivando a exploração do conteúdo função quadrática, de acordo com a *etapa 2* de Beltrão. Uma vez que os alunos já haviam estudado tópicos de *função afim* – em Matemática e Física – a pretensão era que mobilizassem seus conhecimentos matemáticos, considerados como conceitos subsunçores, sobre conjuntos domínio, imagem, localização de pontos no plano cartesiano e representação gráfica, que outrora era uma reta.

Para esse fim, foram explorados problemas de *máximos e mínimos*, em que o objetivo era verificar se, a partir de cálculos de valor numérico, os alunos seriam capazes de construir uma representação gráfica de cada situação proposta.

Apresentam-se, a seguir, recortes dos problemas de máximos e mínimos aplicados em aula, nessa *etapa*.

¹ O Céu de Outubro: filme lançado pela Universal Pictures, EUA, 1999.

Problema 1: Sabe-se que o custo C , em reais, de uma empresa, para produzir x unidades de certo produto é dado pela função $C(x) = x^2 - 50x + 900$. Nessas condições:

a) Calcule o custo caso sejam produzidas: 5 unidades; 15 unidades; 25 unidades; 35 unidades e 45 unidades.

b) Localize no plano cartesiano os pontos que representam os valores de custo encontrados.

c) Observando os pontos localizados no plano cartesiano, o que podemos dizer sobre o custo R\$ 275,00?

d) Quantas unidades devem ser produzidas para que o custo seja mínimo?

Solução gráfica:

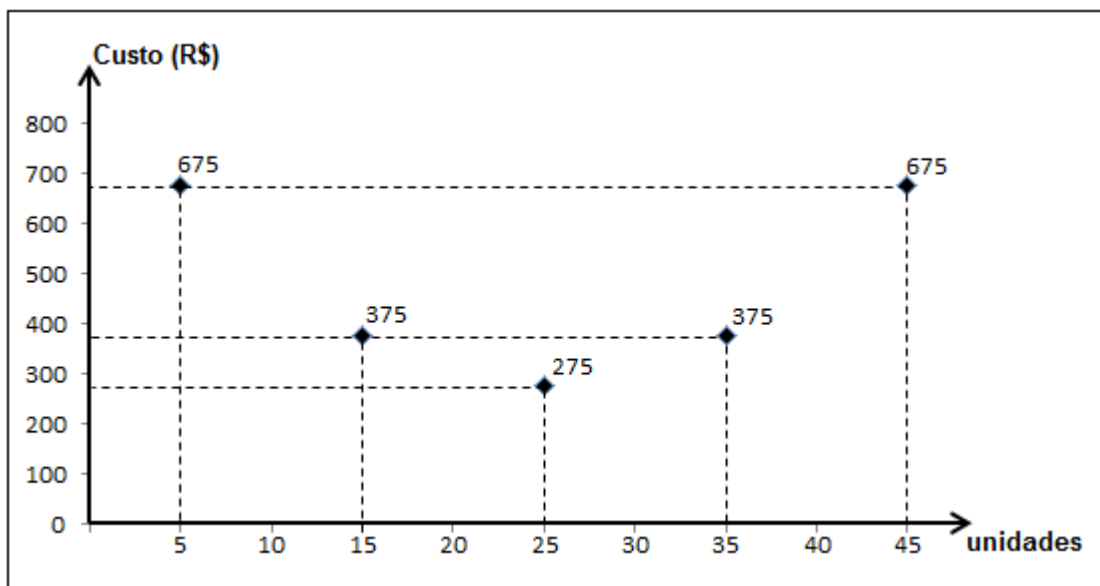


Figura 9- Representação gráfica da solução do problema 1.

Objetivo:

A intenção ao apresentar esse problema foi fazer com que os alunos pudessem perceber que:

1) para alguns números de unidades (valores do domínio) obtinha-se o mesmo custo final (imagem), o que antes não ocorreu no estudo da função afim;

2) os pontos obtidos no plano cartesiano não estavam alinhados, como ocorria com o gráfico da função afim;

3) o custo solicitado no terceiro item era o menor possível e, diferentemente dos demais, a quantidade de unidades que produz esse custo é única. Para essa última constatação foi solicitado aos alunos que calculassem outros custos para quantidades intermediárias;

4) os pontos do plano não poderiam ser ligados, diante da explicação do professor de que a grandeza “quantidade de unidades” só poderia assumir valores inteiros.

Problema 2: O custo **C**, em reais, de uma avícola, é dado pela função $C(x) = 2x^2 - 60x + 800$, em que **x** representa a quantidade de quilos de frango produzida. Nessas condições:

a) Calcule o custo caso sejam produzidos: 0 kg; 5 kg; 15 kg; 25 kg e 30 kg de frango.

b) Localize no plano cartesiano os pontos que representam os valores de custo encontrados e, em seguida, ligue os pontos.

c) De acordo com o gráfico construído, o que podemos dizer sobre o custo de R\$ 350,00?

d) De acordo com o gráfico, quantos kg de frango devem ser produzidos para que o custo seja mínimo?

Solução gráfica:

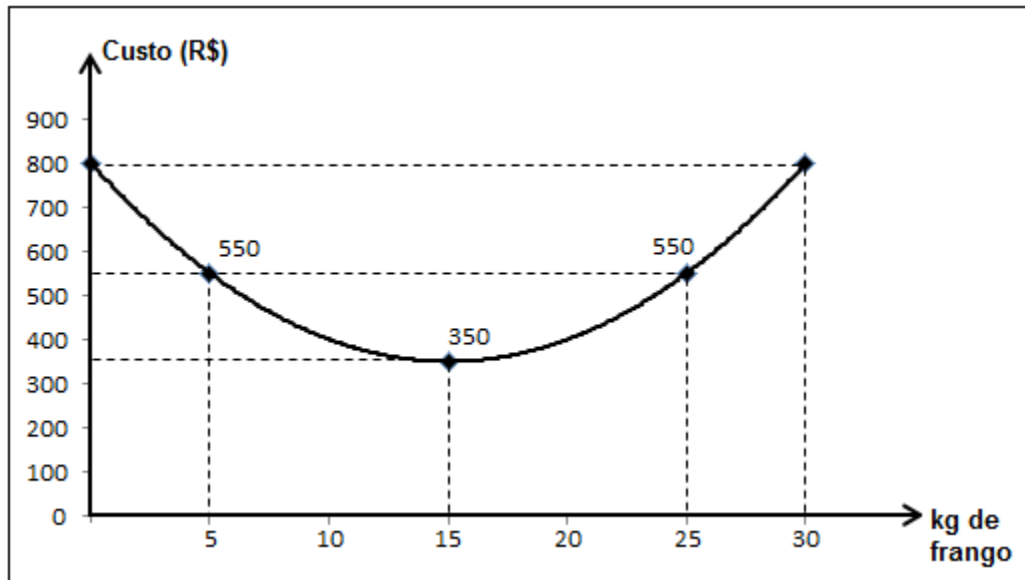


Figura 10- Representação gráfica da solução do problema 2

Objetivo:

Esse problema teve o propósito de reforçar os itens que foram percebidos e discutidos no problema anterior, além de possibilitar aos alunos compreenderem que nesse caso os pontos do plano poderiam ser ligados, uma vez que a grandeza “kg de frango” pode assumir valores não inteiros.

Problema 3: Uma bola é chutada do solo verticalmente para cima, e a altura **A**, em metros, atingida pela bola em função do tempo **t**, em segundos, é dada pela expressão: $A(t) = -5t^2 + 40t$. Nessas condições:

- Calcule a altura da bola nos instantes: 0; 2 segundos; 4 segundos; 6 segundos e 8 segundos.
- Construa o gráfico a partir das alturas encontradas.
- Observando o gráfico construído, determine a altura máxima atingida pela bola, e o instante em que isso aconteceu.
- A partir do gráfico construído, qual foi o instante em que a bola retornou e atingiu o solo?

Solução gráfica:

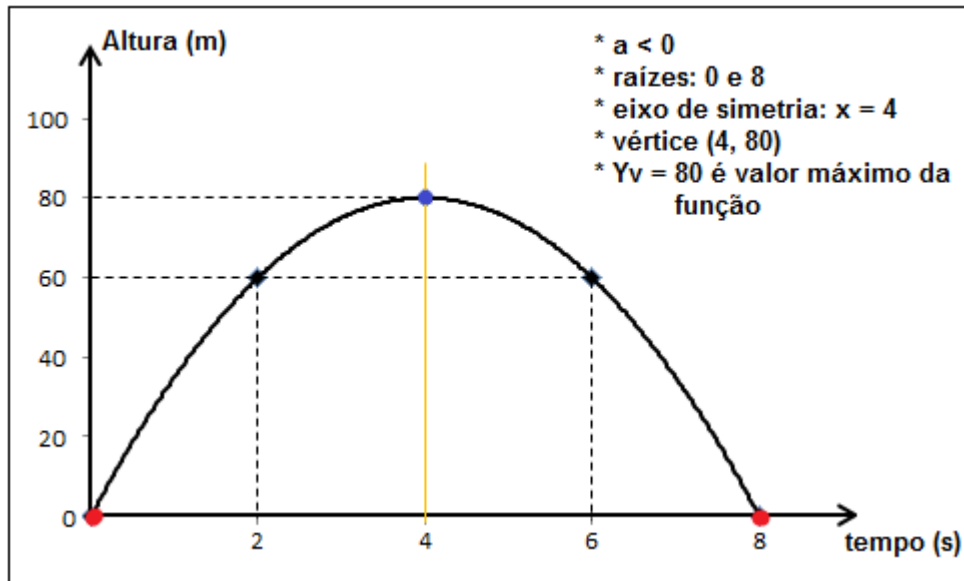


Figura 11- Representação gráfica da solução do problema 3.

Objetivo:

Com esse problema, intentou-se apresentar uma situação próxima a que seria analisada posteriormente ao lançamento do foguete, ressaltando algumas características da curva obtida, como: concavidade, ponto e valor de máximo, raízes e eixo de simetria. Após essa explicitação, foi pedido que os alunos analisassem atentamente o problema 2 e identificassem cada um desses itens no gráfico anteriormente construído.

A partir da discussão acerca dos gráficos construídos nos problemas 1, 2 e 3, segue-se para a *etapa 3* de Beltrão, que versa sobre o momento em que o professor apresenta as definições, propriedades importantes e outros problemas significativos acerca do tema estudado.

É válido ressaltar que é na *terceira etapa da fase I* que Beltrão sugere um momento para o professor sistematizar os conceitos que pretende. Porém, a intenção foi sistematizar tais conceitos paulatinamente, de acordo com o desenvolvimento dos alunos no decorrer das aulas, concordando com Burak (2004) que aponta a necessidade do conteúdo matemático ser apresentado de maneira acessível aos alunos, para posteriormente ser sistematizado.

Para essa *terceira etapa*, foi apresentada aos alunos a definição de função quadrática:

Uma função quadrática é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Em seguida, reforçaram-se algumas propriedades importantes da curva, chamada parábola, no que diz respeito: a concavidade; ao vértice, suas coordenadas e significados; ao eixo de simetria da parábola e as raízes, a partir dos gráficos construídos nos problemas 1, 2 e 3.

Após esse estudo, passa-se para a *fase II*, em que Beltrão sugere que os alunos pesquisem modelos e aplicações que se relacionem com o assunto em estudo. Assim, foi pedido que investigassem situações cotidianas e aplicações que utilizavam de conceitos da função quadrática. Cada grupo ficou responsável por apresentar, oralmente, uma situação para os demais grupos.

Da tarefa que foi solicitada saíram abordagens diversas, como: parabolóide e faróis de carro, antenas parabólicas, lançamentos oblíquos – falaram de basquete e a trajetória que a bola faz ao ser arremessada para a cesta, algumas construções de pontes e arcos cujos formatos eram de parábolas, etc., que fomentaram boas discussões acerca do tema. Salienta-se que nem todos os exemplos apresentados representam funções quadráticas e isso foi abordado pelo professor durante as discussões.

Considera-se que essa fase foi muito importante, pois permitiu aos alunos investigarem mais sobre o assunto, e isso os motivou ainda mais no desenvolvimento do projeto proposto.

Paralelo a isso, os alunos já estavam confeccionando seus foguetes nas aulas de Física.

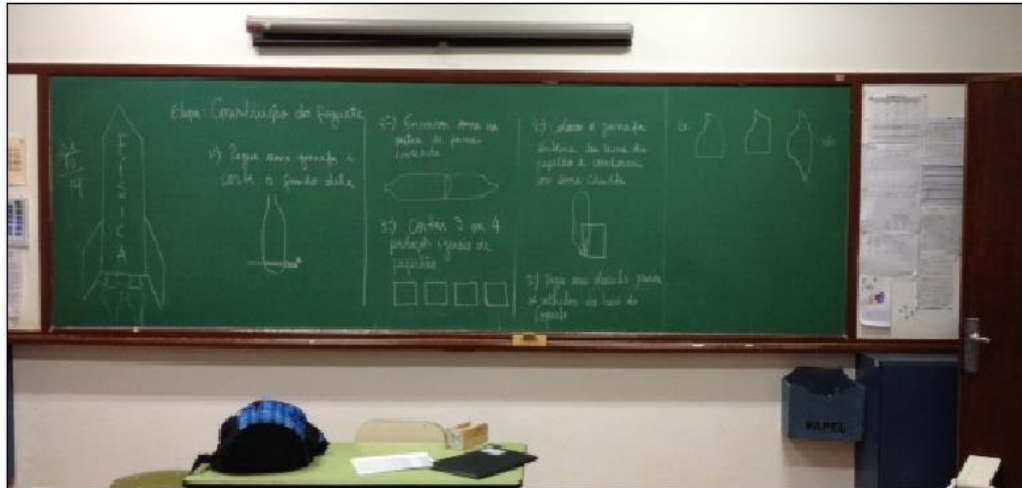


Figura 12- Etapas para construção dos foguetes.



Figura 13- Confeccção dos foguetes.

Antecedendo o dia em que os alunos fariam os lançamentos dos seus projéteis, o professor de Matemática – e responsável por esta pesquisa – levou para a sala de aula um *software*² livre, de simulador, para que, com o auxílio de um projetor, pudessem ser discutidas as grandezas envolvidas, e que devem ser consideradas, num lançamento de projéteis.

O simulador permitiu explorar diversas possibilidades de situações, uma vez que avaliava condições como: a massa e o tamanho do projétil, velocidade de

² Software gratuito disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/projectile-motion

lançamento, ângulo de lançamento e resistência do ar, que os alunos já haviam intuído e discutido nas aulas de Física.

Durante o experimento com o simulador, os alunos puderam verificar alguns fatores que influenciam na trajetória de projéteis. Destaca-se na figura seguinte a resistência do ar.

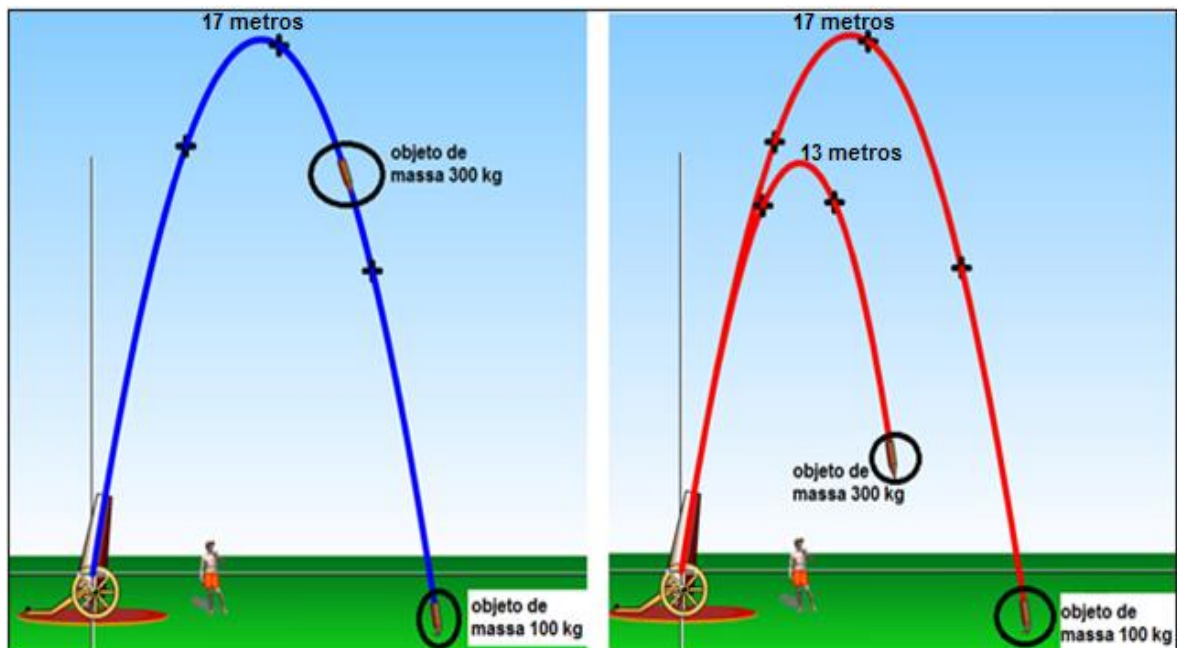


Figura 14- Imagens do simulador.

Na figura 14, a imagem da esquerda mostra projéteis similares, porém com massas diferentes, atingindo a mesma altura em relação ao solo, pois nesse caso desconsidera-se a resistência do ar. A imagem da direita mostra que a trajetória do projétil anterior, mais pesado, sofreu variação, devido à influência do ar.

Nesse momento, os alunos questionaram o fato de a altura máxima atingida ser a mesma, com e sem a influência do ar, para o objeto de massa 100 kg. Aqui o professor de Física interveio e disse que não houve diferença devido às dimensões e formato do objeto, que tinha um coeficiente de arrasto quase nulo, e por isso não sofria a ação do ar.

A intenção ao trabalhar com o simulador está relacionada a dois aspectos que a pesquisa considera importantes no processo de modelagem: o primeiro aspecto está ligado ao que se pode esperar de resultados quando se trabalha com

experimentos. Para o autor, é gratificante a importância de mostrar aos alunos as muitas possibilidades que podiam acontecer, para eximir qualquer pensamento de que os lançamentos, e conseqüentemente os resultados, seriam todos iguais.

O segundo aspecto está relacionado ao que Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) dizem: “Nomeado um problema, no momento seguinte a Modelagem exige hipóteses de simplificação, ou seja, devemos conhecer o problema – e simplifica-lo” (p. 27). É relevante o que esses autores expõem, uma vez que quanto mais variáveis forem consideradas no processo de modelagem, mais complexo o modelo será – o que nesse caso, não era a pretensão do trabalho.

Todo problema tem de ser tratado com passo de simplificação, e, às vezes, a simplificação que fazemos é para facilitar a resolução matemática. Outras vezes simplificamos para colocar o problema no nível dos nossos alunos. Não simplificamos o problema real, e sim introduzimos hipóteses que simplificam sua abordagem (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 28).

Assim, com o intuito de pensar em uma situação que permitisse modelar, sem perder a “precisão”, decide-se tratar o experimento de lançamento de projéteis, assim como os exercícios expostos em livros didáticos, isto é, sem considerar a resistência do ar.

4.2 Segundo Momento

O Colégio onde foi desenvolvida a pesquisa promove dois sábados, por semestre, destinados a plantões de dúvidas para os alunos, e também às atividades extraclasse. Em um desses sábados, mais precisamente no dia 08/11/2014, os alunos envolvidos no projeto se apresentaram com seus pares para os lançamentos. Alguns alunos não puderam comparecer por motivo de trabalho, porém cada grupo dispôs de pelo menos dois representantes nesse dia, uma vez que foi solicitado a eles que registrassem o tempo total do lançamento.

O Colégio possui um campo de futebol que foi disponibilizado para os lançamentos. Os alunos se mostraram empolgados, fizeram as exposições de seus foguetes, tiraram fotos e contribuíram muito para o sucesso da atividade.

Após a exposição dos alunos, o professor de Física passou explicar sobre a montagem da plataforma de lançamento e os passos que deveriam ser seguidos para a execução dos lançamentos.



Figura 15- Etapas para os lançamentos.

Todos os lançamentos foram filmados pelo pesquisador, para análise posterior, e também para auxiliar os alunos quanto ao registro do tempo total do lançamento, que foi fundamental para a construção do modelo. Os lançamentos iniciaram-se às 14 horas e findaram-se por volta das 15h30min., com muita animação.



Figura 16- Lançamentos dos projéteis.

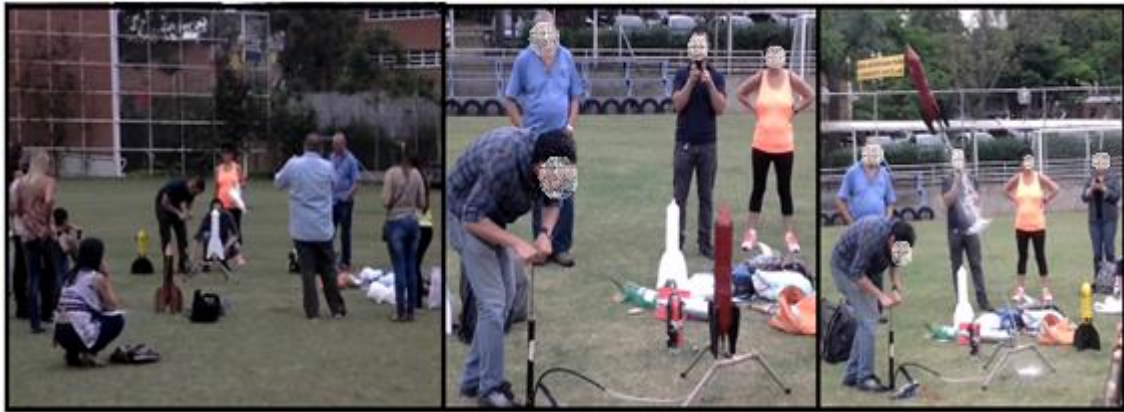


Figura 17- Lançamentos dos projéteis.

Na semana seguinte, o vídeo contendo a gravação dos lançamentos foi passado em sala de aula, para que todos os alunos pudessem compartilhar daquele momento ímpar, uma vez que o projeto seguiria para a última fase apresentada por Beltrão, denominada *fase III*, que está relacionada ao desenvolvimento do modelo.

4.3 Terceiro Momento

Antes de iniciar a atividade de modelagem, foi retomada com os alunos a conversa sobre as grandezas que seriam consideradas para obtenção do modelo, e definiu-se que a resistência do ar – assim como nos livros didáticos – apesar de ter grande influência no processo, seria desconsiderada no estudo, objetivando a simplificação do modelo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013).

Assim, para a modelação, considerou-se em um exercício similar de lançamento vertical, para que todos, a princípio, pudessem se debruçar sobre o mesmo problema. Posteriormente os alunos foram convidados a modelar seus respectivos lançamentos, a partir dos tempos que obtiveram no experimento.

4.3.1 Atividades propostas

Nesse tópico, apresentam-se as atividades que foram desenvolvidas em sala, posterior ao lançamento dos projéteis, acerca da modelação, bem como a descrição dos encontros.

Como já exposto, as atividades de modelagem surgiram a partir de um projeto interdisciplinar entre professores de Matemática e de Física sobre lançamento de projéteis, que pretendeu estabelecer um cenário para o desenvolvimento do modelo, tendo por finalidade a aprendizagem de conceitos ligados à função quadrática.

O modelo a ser desenvolvido pelos alunos teve como principal objetivo permitir que os mesmos fossem capazes de calcular a altura alcançada por seus projéteis.

Nesse ponto, considerou-se a concepção de Bassanezi (2002) sobre modelo matemático. Para esse pesquisador, o “*Modelo Matemático* é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (p. 20).

Com esse objetivo, formulou-se uma sequência contendo 10 questões para serem exploradas em dois encontros, um com duração de 80 minutos e outro, com duração de 150 minutos. Para esses encontros, procurou-se manter os mesmos 6 grupos de 4 alunos.

Os encontros foram gravados por outro observador, que atuou juntamente com o professor/pesquisador durante o desenvolvimento da atividade. Sua contribuição com a observação e gravação dos momentos de interação entre os componentes dos grupos foi muito importante e de grande valia, pois permitiu a descrição e análise posterior de todo o processo.

No primeiro encontro, o principal objetivo foi identificar se os alunos fariam a relação do problema inicial, a ser modelado, com as informações discutidas nas aulas de Matemática e Física, sobre lançamento de projéteis.

Para esse diagnóstico foi proposto o problema a ser modelado e uma sequência de 6 questões (1 a 6) que exploram o fenômeno físico estudado.

No segundo encontro foi desenvolvida a segunda parte da sequência de questões, em que foram aplicadas as questões 7 a 10. As questões 7 e 8, envolvendo os gráficos da função afim e constante, tiveram como objetivo verificar se os alunos mobilizariam os *conceitos subsunçores* – sobre função afim e área de figuras planas – relacionando-os ao fenômeno físico em estudo. Já as questões 9 e

10 propunham que os alunos associassem os valores das áreas, encontrados nos exercícios anteriores, com o gráfico construído – parábola – para poderem determinar, enfim, a altura máxima atingida pelo projétil.

Seguirão a situação-problema, as questões, e as análises preliminares.

4.3.2 Atividades do 1º encontro

No primeiro encontro, foi apresentada a primeira parte da atividade, composta pela situação-problema a ser modelada, seguida de 6 questões. Essas questões foram pensadas como uma estratégia para que os alunos associassem os *conceitos subsunçores*, visando à aprendizagem significativa.

Situação-problema:

Um foguete é arremessado verticalmente para cima a partir do chão, com velocidade inicial V_0 no instante inicial $t_0 = 0$. Sabe-se que o tempo total do lançamento (subida + descida) foi 6 segundos. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a influência do ar, responda:

- 1) O que acontece com a velocidade do foguete durante a subida?
- 2) Sabendo que estamos desprezando a influência do ar, qual a força responsável pela diminuição da velocidade, na subida?
- 3) Neste caso, qual é a taxa de diminuição da velocidade do foguete?
- 4) Qual é o instante em que o foguete atinge a altura máxima?
- 5) O que acontece com a velocidade final V do foguete quando ele atinge a altura máxima?

6) Sabendo a taxa de diminuição da velocidade e o tempo que levou para a velocidade chegar a zero, qual era a velocidade inicial V_0 do foguete?

A escolha dessa situação problema se deu pela sua proximidade com a situação real vivenciada pelos alunos durante os lançamentos de seus projéteis.

Análise preliminar:

Espera-se que os alunos consigam responder as questões 1 a 5 sem muitas dificuldades, por serem teóricas e envolverem algumas características de um lançamento vertical, tema que já havia sido discutido por ambos os professores, em outras ocasiões, inclusive com o auxílio de um simulador.

Sobre os conhecimentos mobilizados pretendidos para a resolução dessas questões, pode-se citar: o fato do tempo de subida ser igual ao tempo de descida e, portanto o tempo de subida será a metade do tempo total do lançamento; a velocidade do corpo tende a diminuir durante a subida; desconsiderando-se a resistência do ar, a gravidade será a única força que atuará no corpo reduzindo sua velocidade.

Em relação à questão 6, talvez os alunos encontrem certa dificuldade em definir o valor da velocidade inicial do foguete, uma vez que será necessário relacionar a taxa de variação e o tempo de subida para se obter esse valor. Para essa questão os grupos terão que refletir seus conhecimentos sobre: noção de função, taxa de variação e comportamento entre as variáveis, nesse caso, t (independente) e V (dependente).

4.3.3 Atividades do 2º encontro

Nesse encontro foi aplicada a segunda parte da sequência, composta pelas questões de 7 à 10, apresentadas a seguir.

7) Os gráficos abaixo apresentam duas possibilidades de comportamento da velocidade de um corpo em função do tempo.

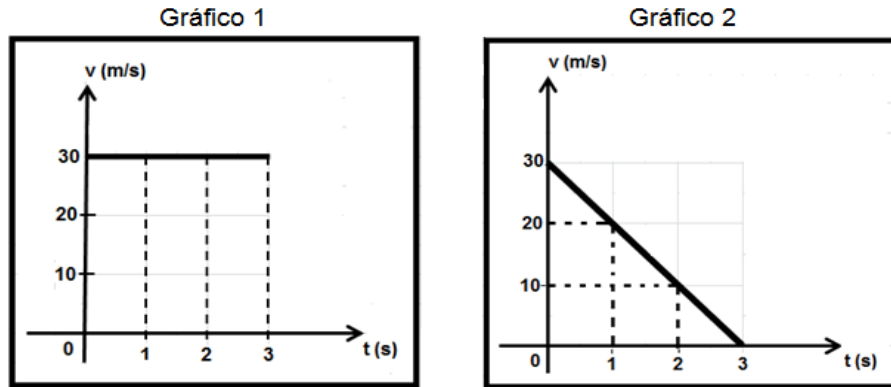


Figura 18- Gráficos de $v \times t$.

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1.

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

e) Expresse em palavras a relação entre área e o espaço percorrido, encontrados nos itens c) e d).

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

8) Fazendo analogia com a resposta do item e) e os cálculos feitos no item f), responda:

a) Qual foi a altura atingida pelo foguete (gráfico 2) ao final da subida? Justifique sua resposta.

b) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 1\text{ s}$?

c) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 2\text{ s}$?

d) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 3\text{ s}$?

9) Marque, no plano cartesiano abaixo, os pontos que representam os valores encontrados no exercício 8.

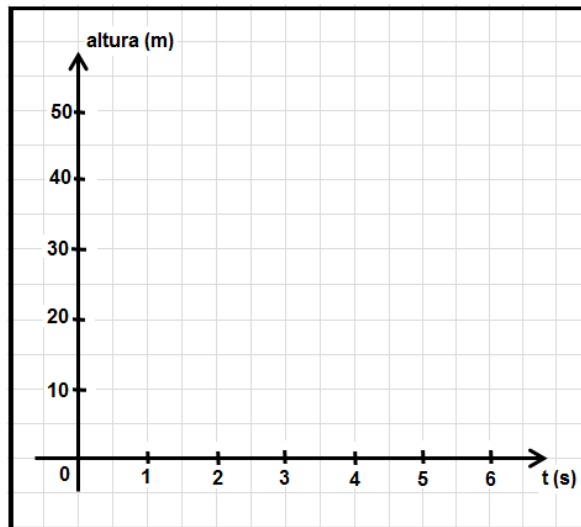


Figura 19- Sistema de coordenadas cartesianas.

Por meio de estudos feitos, e de cálculos com mais valores de tempo, podemos demonstrar que os pontos obtidos formam uma curva similar à parábola, cujo eixo de simetria passa por $t = 3$ s. A partir dessas informações, responda:

- Qual foi a altura máxima atingida pelo foguete? Justifique.
- A que altura o foguete estava do chão no instante $t = 4$ s.? Localize o ponto no plano cartesiano.
- A que altura o foguete estava do chão no instante $t = 5$ s.? Localize o ponto no plano cartesiano.
- A que altura o foguete estava do chão no instante $t = 6$ s.? Localize o ponto no plano cartesiano.

10) Com base no que foi respondido até aqui, qual relação podemos fazer sobre a área abaixo da reta, no gráfico 2, com a altura máxima atingida pelo foguete (gráfico da parábola)?

Com a aplicação da atividade de modelagem, almeja-se que os alunos, ao resolverem as questões, sejam capazes de compreender a existência de uma

relação entre a altura atingida pelo projétil (posição) e o tempo do lançamento, isto é, as grandezas variam simultaneamente, de maneira que para cada instante associa-se uma altura. A representação algébrica dessa relação, que neste caso é expressa por $S(t) = -at^2 + bt$, em que t representa o tempo e S indica a posição associada a esse tempo, será apresentada aos alunos no momento da validação do modelo – representação gráfica obtida na questão 9.

Análise preliminar:

Referente às questões do segundo encontro espera-se que os alunos:

- Relacionem os valores das áreas, abaixo das retas, com o espaço percorrido pelo projétil.
- Sejam capazes de determinar corretamente e localizar os pontos de coordenadas (t, S) no plano cartesiano.
- Reflitam sobre a figura formada a partir da união dos pontos (questão 9), apliquem o conceito de eixo de simetria, para então comporem a curva parabólica.
- Percebam que existe uma relação entre o cálculo das áreas, no gráfico da velocidade, com as posições atingidas pelo foguete e, assim, possam concluir que a área do triângulo é numericamente igual à altura máxima atingida pelo projétil (questão 10).
- Compreendam que o valor máximo representado na parábola corresponde à altura máxima atingida pelo projétil.

Com relação aos conhecimentos mobilizados na resolução das questões 7 a 10, o professor e pesquisador prevê alguma dificuldade, por parte dos alunos, acerca do cálculo de áreas, mais especificamente as áreas do quadrado e do triângulo, que são solicitadas. Ainda assim, diante de tal previsão, entende-se que não haveria necessidade de fazer uma revisão com os alunos sobre o assunto e, perante essas dificuldades opta-se por retomar, caso fosse necessário, alguns aspectos pontuais importantes para a realização da atividade, sem prejuízo de resultados.

No demais, relacionado às questões 7 a 10, acredita-se que os alunos não apresentem dificuldades em acessar tais conhecimentos, uma vez que tópicos como: a localização de pontos no plano, características da curva parábola, eixo de simetria e valores de máximo e mínimo foram amplamente discutidos durante o desenvolvimento das *fases* e *etapas* sugeridas por Beltrão (2009).

A ATIVIDADE DE MODELAGEM

A atividade de modelagem nesta pesquisa é a aplicação de um conjunto de conceitos matemáticos na resolução de um problema que se refere ao lançamento de projéteis.

A orientação pela teoria de aprendizagem significativa é justificada nesta pesquisa – ao apresentar uma situação de aprendizagem tendo a modelagem como estratégia de ensino – em que os alunos podem construir algumas noções relacionadas à função quadrática a partir de ideias âncoras de conteúdos anteriormente aprendidos.

Assim, os alunos necessitam mobilizar essas ideias, disponíveis em suas estruturas cognitivas, para então relacionar as novas informações que irão obter com as que já possuem. Considerações, chamadas por Ausubel (1980), de *conceitos subsunçores*, na atividade de modelagem, compreendem algumas noções acerca de: taxa de variação, plano cartesiano, função polinomial do 1º grau e área de figuras planas, que se fazem necessárias na fundamentação do novo objeto, para que esse seja significativo.

Na atividade proposta, sugere-se a relação entre a área da região plana, delimitada pelo gráfico da função velocidade $v = v(t)$ – polinomial do 1º grau – e os eixos coordenados, com as ordenadas da função quadrática desconhecida, identificada por $s = s(t)$, como solução do problema. Como objetivo final da sequência, pretende-se que os alunos percebam tal relação matemática e sejam capazes de determinar a altura atingida por seus projéteis.

Diante desse objetivo, utiliza-se o que Ausubel assinala como “organizadores prévios”, cujo foco é potencializar a criação de relações entre os conhecimentos que o aprendiz já possui com aqueles que se pretende ensinar, partindo de ideias que servirão de âncoras para esse fim.

Ressalta-se que o não estabelecimento dessas relações pode dificultar a resolução do problema proposto, bem como a aprendizagem significativa de tópicos de função quadrática, que é o principal objeto matemático a ser explorado.

A atividade apresentada foi desenvolvida segundo as fases e etapas propostas por Beltrão (2009), com vistas à obtenção de um modelo matemático que guarda relação com o objeto matemático função quadrática. Além disso, procura-se explorar alguns pontos sugeridos por Burak (2007) que podem ser contemplados em atividades de modelagem:

- 1) Construção e o desenvolvimento de conceitos e dos conteúdos matemáticos;
- 2) Contextualização das situações;
- 3) Integração com outras áreas do conhecimento;
- 4) Socialização favorecida pelo trabalho em grupo;
- 5) Ruptura com o currículo linear;

Acredita-se que a exploração desses pontos, pelo professor, corrobora com algumas orientações expostas em documentos oficiais do MEC sobre o trabalho com a EJA, além de permitir que os alunos se disponham a participar de uma atividade diferenciada com foco na aquisição de novos conhecimentos, o que é inerente ao que Ausubel (1980) aponta como um fator essencial para ocorrência da aprendizagem significativa. De acordo com Ausubel, é necessário que o aprendiz “manifeste uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva.” (Ibidem, p. 34).

5.1 Desenvolvimento e Análise das atividades

O desenvolvimento das atividades se deu por meio de três etapas e, considerando que o trabalho em grupo propõe a interação entre os participantes, de maneira que esses possam expor, confrontar e discutir suas ideias, o que traz

contribuições para o processo de ensino a aprendizagem segundo Skovsmose (2001), os 24 alunos participantes foram divididos em 6 grupos, os mesmos escolhidos por eles no início do projeto.

A etapa inicial consistiu na distribuição da primeira parte da atividade aos grupos, composta pela situação-problema e mais seis questões. Na segunda etapa os grupos receberam outro conjunto de questões – 7 a 10 – e, por fim, na terceira etapa, foram incumbidos de aplicarem o modelo construído para determinarem a altura de seus projéteis.

Foram entregues duas cópias por grupo, com o objetivo de facilitar a leitura e discussões. A orientação do professor foi para que os alunos lessem o problema, observando as informações nele contidas, e depois buscassem responder as questões.

O problema compreende uma situação ideal, comumente apresentada em livros didáticos, próxima da vivenciada pelos alunos acerca do lançamento de projéteis. O objetivo inicial do professor era que os grupos modelassem a mesma situação-problema, e posteriormente, fossem capazes de aplicar a resolução aos seus respectivos lançamentos.

O assunto em questão foi escolhido, juntamente com os alunos, devido à possibilidade de integrarmos as aulas de Matemática e Física no desenvolvimento de um projeto interdisciplinar, em que os alunos seriam responsáveis por pesquisar sobre o tema, construir e lançar seus foguetes, sendo protagonistas no processo. Sobre a interdisciplinaridade sugerida, ressalta-se que essa foi trabalhada de forma adequada, visando à integração entre as referidas áreas do conhecimento, e também, a ruptura do currículo linear, como aponta Burak (2007).

Em relação às questões, geraram muitas análises e discussões por parte dos alunos, o que enriqueceu muito o processo de aprendizagem. Ao assumir o papel de mediador nesse ambiente de modelagem, o professor-pesquisador pôde perceber os alunos, em vários momentos, mobilizando conceitos anteriormente aprendidos para a resolução das questões.

Os dados foram coletados a partir de quatro instrumentos: filmadora, gravador, material produzido pelos alunos e notas tomadas pelo professor-pesquisador.

Com vistas a não deixar o texto longo e cansativo, apresentamos e analisamos apenas as questões que consideramos primordiais para a resolução da situação-problema e obtenção do modelo, por meio da relação da área, compreendida entre o gráfico da velocidade e o sistema de eixos, com a altura atingida pelo projétil. As demais questões que tiveram respostas semelhantes, optamos por expor um exemplo que mais representasse o conjunto.

5.1.1 Análise da atividade do 1º encontro – Parte I

Das análises das cinco primeiras questões, que envolviam características de um lançamento vertical, percebe-se que os grupos apresentaram, ao final, respostas próximas das que foram previstas nas análises preliminares.

As questões:

- 1) O que acontece com a velocidade do foguete durante a subida?

Resposta considerada correta pelo professor: a velocidade diminui.

- 2) Sabendo que estamos desprezando a influência do ar, qual a força responsável pela diminuição da velocidade, na subida?

Resposta considerada correta pelo professor: a gravidade.

- 3) Neste caso, qual é a taxa de diminuição da velocidade do foguete?

Resposta considerada correta pelo professor: $g = 10\text{m/s}^2$.

- 4) Qual é o instante em que o foguete atinge a altura máxima?

Resposta considerada correta pelo professor: $t = 3$ segundos.

- 5) O que acontece com a velocidade final V do foguete quando ele atinge a altura máxima?

Resposta considerada correta pelo professor: no instante em que o foguete atinge a altura máxima, sua velocidade é zero, ou $V = 0$.

Essa sequência de questões tinha como objetivo levar os alunos a relacionarem a variação da velocidade do foguete, durante a subida, com a variação do tempo, para posteriormente tentarem matematizar essa relação.

Sobre as noções pretendidas pela pesquisa, que os alunos mobilizassem nessas questões, destacam-se: a velocidade do corpo tende a diminuir durante a subida; o tempo de subida e o tempo de descida são iguais e, portanto, o tempo de subida será a metade do tempo total do lançamento; desconsiderando-se a resistência do ar, a gravidade é a força responsável pela redução da velocidade do corpo.

No decorrer da realização da atividade, houve algumas intervenções por parte do professor, uma vez que alguns grupos apresentaram dificuldades em interpretar os enunciados das questões. Ocorreu em quase todos os grupos, dúvida sobre o conceito de taxa de variação, que outrora já havia sido estudado em tópicos de função polinomial do 1º grau. O professor-pesquisador, com o propósito de esclarecer o significado do termo “taxa de variação”, retomou alguns exemplos tratados anteriormente, na intenção de que os alunos construíssem relações entre os conhecimentos contidos em sua estrutura cognitiva e aqueles solicitados na questão, pois conforme Ausubel *apud* Moreira (1999) “a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em *conceitos* ou *proposições relevantes*, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz.” (p. 153).

A seguir, apresentar-se-ão algumas respostas, referentes às cinco questões iniciais, registradas pelos grupos durante o primeiro encontro. Essas respostas dão sinais de que os grupos mobilizaram informações que haviam sido transmitidas, em aulas, pelos professores de Matemática e Física.

Grupo 2

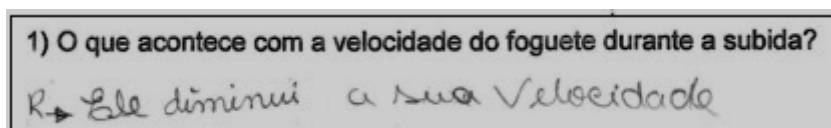


Figura 20- Protocolo da questão 1, realizada pelo grupo 2.

Apesar de destacar a resposta do grupo 2, todos os grupos chegaram a conclusão de que a velocidade de um projétil, ao ser lançado para cima, diminui

durante a subida. Essa ideia será muito importante para a interpretação dos gráficos de $v = v(t)$ apresentados na questão 7.

Grupo 4

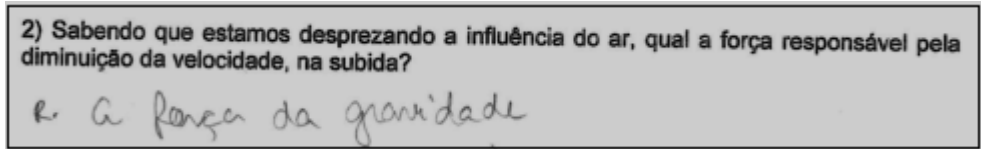


Figura 21- Protocolo da questão 2, realizada pelo grupo 4.

Esse grupo, assim como os demais, apresentou uma resposta bem sucinta para a segunda questão, como era esperado pelo professor-pesquisador.

Grupo 5

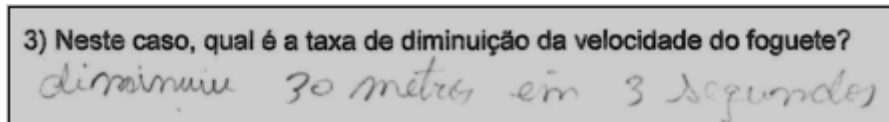


Figura 22- Protocolo da questão 3, realizada pelo grupo 5.

Por meio do texto produzido pelo grupo 5, percebe-se que esse grupo foi além da resposta esperada, de $g = 10 \text{ m/s}^2$, pois os integrantes buscaram relacionar o tempo de subida (3 segundos) e o valor da força gravitacional, apontando a variação total da velocidade durante a subida. O registro mostra uma possível dificuldade em relação à unidade de medida da taxa de variação, uma vez que a resposta é 30 m/s em 3 segundos. Com exceção do grupo 4, que respondeu “taxa zero”, os demais grupos registraram como respostas finais: 10 m/s , 10 m/s^2 , $g = 10 \text{ m/s}^2$. A resposta do grupo 4 sinaliza a não compreensão do conceito de taxa de variação, o que pode conferir uma *aprendizagem mecânica* do conceito, que segundo Ausubel (1980), ocorre devido o armazenamento arbitrário da informação, isto é, não houve interação dessa informação “taxa de variação” com conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Grupo 1

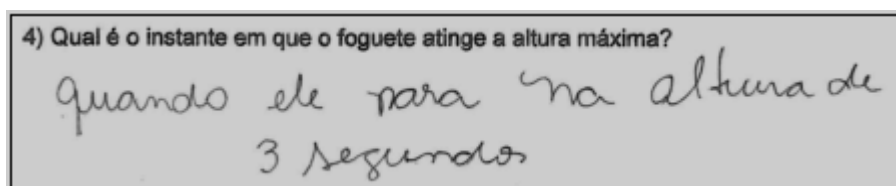


Figura 23- Protocolo da questão 4, realizada pelo grupo 1.

Essa resposta mostra que o grupo relacionou as informações de que ao atingir a altura máxima o foguete “para” e em seguida começa a cair. Além disso, definiu corretamente, assim como os demais grupos, o tempo de subida como sendo a metade do tempo total do lançamento, dado no enunciado do problema.

Grupo 3

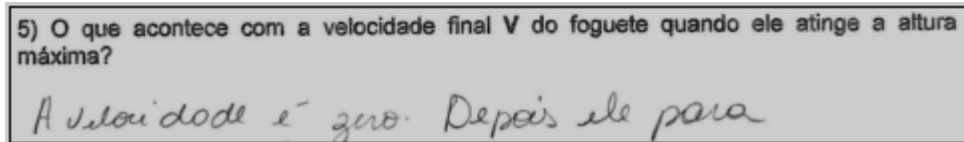


Figura 24- Protocolo da questão 5, realizada pelo grupo 3.

Ao analisar os registros dos alunos, constatou-se que todos os grupos, sem exceção, registraram “*velocidade final zero*”, ou simplesmente “ $V = 0$ ” como resposta para essa questão. Alguns grupos ainda justificaram esse fato devido à “*desaceleração ocorrida*”, ou ainda, por conta da “*diminuição da força de impulso*”.

A intenção com a apresentação dessas cinco questões foi promover uma sequência de ideias que permitisse aos grupos *organizar* seus conhecimentos sobre o assunto, com a pretensão de que eles respondessem a sexta questão, que, relacionada com as questões 4 e 5, possibilita a construção do gráfico da função $v = v(t)$, polinomial do 1º grau, a partir dos pontos $(0, V_0)$ e $(3, V)$, sendo V_0 e V as velocidades inicial e final, respectivamente.

A construção do gráfico da função velocidade, $v = v(t)$, será crucial para a obtenção do modelo na etapa final, sendo assim, consideramos as questões 4, 5 e 6 fundamentais para o alcance de tal propósito.

5.1.2 Análise da atividade do 1º encontro – Parte II

A questão 6 tem como objetivo levar o aluno a relacionar a taxa de variação, que provoca a diminuição da velocidade, com o tempo, para então determinar a velocidade inicial do foguete no momento do lançamento.

Ao realizar a leitura da questão, alguns grupos apresentaram dificuldades na interpretação da simbologia V_0 , apesar desta já ter sido vista anteriormente em

outras situações-problema. Acerca da dificuldade de interpretar e fazer uso de símbolos e notações, Biembengut (1999) indica que ela ocorre no momento em que se propõe matematizar o problema. Segundo essa pesquisadora a fase da *matematização* é a mais complexa e desafiadora, pois implica na transição do problema proposto da linguagem natural para a linguagem matemática.

Na contramão dessa dificuldade, considerando as anotações dos três grupos que acertaram essa questão, pode-se constatar que dois grupos conseguiram avançar na compreensão da relação existente entre as variações, de velocidade e tempo, sugerida pelo problema. Esses grupos expuseram em seus registros, além da resposta correta, a função $v(t) = 30 - 10t$, o que sinaliza uma aprendizagem significativa em relação a estrutura de uma função polinomial do 1º grau, bem como a existência de “subsunçores” que permitiram esta ligação entre os conceitos anteriores e os novos.

Os demais grupos – 2, 3 e 4 – não conseguiram relacionar o valor da taxa de variação – gravidade – com o tempo de subida, para então determinarem a velocidade inicial do foguete. Durante as discussões, o observador pode sentir que a noção de taxa de variação não foi aprendida de maneira significativa, uma vez que esses grupos não conseguiram aplicar tal noção na resolução da questão.

A questão:

- 6) Sabendo que a taxa de diminuição da velocidade e o tempo que levou para a velocidade chegar a zero, qual era a velocidade inicial V_0 do foguete?

Resposta considerada correta pelo professor: $V_0 = 30$ m/s.

A expectativa é o aluno perceber que a relação entre a diminuição da velocidade, devido à ação da gravidade, portanto a uma taxa de 10 m/s a cada segundo, por três segundos – tempo de subida – permite constatar o valor da velocidade inicial $V_0 = 30$ m/s.

As dificuldades percebidas pelo observador durante a resolução dessa questão foram previstas nas análises preliminares, e serão discutidas a seguir.

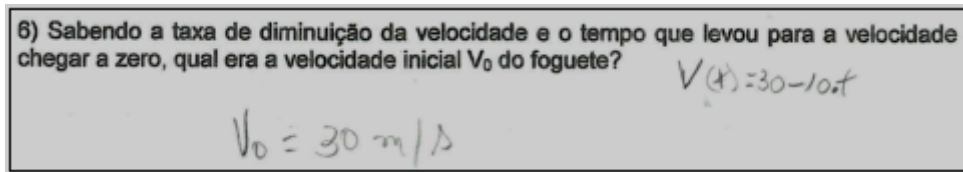
Grupo 1

Figura 25- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 1.

A interpretação da questão foi feita sem dificuldades, diante da justificativa dada ao observador, pelo grupo, de que a “*velocidade diminuiu em dez, por três vezes*”. Essa justificativa aponta para uma compreensão da noção de taxa de variação. Assim, por meio de um cálculo mental simples, o grupo chegou à resposta. Ainda numa tentativa de representar como se dava a variação da velocidade, o grupo registrou a função $v(t) = 30 - 10t$.

A utilização da ideia do conceito de função é muito relevante, porém é importante que seja construída de maneira significativa, para que possa ser armazenada na estrutura cognitiva e se relacionar com novas informações, quando necessário.

Ao expor a lei da função, o grupo demonstra saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações entre grandezas, por meio de uma função polinomial do 1º grau, o que é uma das habilidades a serem desenvolvidas, de acordo com o exposto no currículo de São Paulo (SÃO PAULO, 2010b).

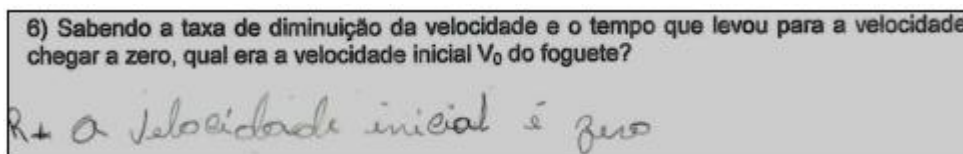
Grupo 2

Figura 26- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 2.

Os alunos desse grupo discutiram muito a questão antes da conclusão e registro da resposta. Alguns diziam que a “*velocidade inicial tinha que ser zero, pois o foguete estava parado antes do lançamento*” enquanto outros defendiam que a “*velocidade só é zero quando ele para de subir*”.

Nesse momento o professor/pesquisador fez uma intervenção na tentativa de fazer com que os alunos chegassem a uma conclusão:

Prof.: O que acontece com a velocidade do foguete durante a subida?

Grupo: diminui!

Prof.: Ok, se ela diminui durante a subida ela pode ser inicialmente zero? Pensem nisso.

Para não influenciar na decisão do grupo, o professor, enquanto mediador, afastou-se e deixou que continuassem discutindo. Essa ação do professor, possibilitada pela Modelagem Matemática como estratégia de ensino, permite que ele não atue como detentor do conhecimento como aparenta frente a aulas consideradas tradicionais.

Em relação à interação entre os componentes do grupo, proporcionada pela atividade de modelagem, permite que os alunos exponham suas indagações e ideias, participando efetivamente do processo de ensino e aprendizagem.

Sobre a resposta, ao final da atividade o grupo optou por registrar que a velocidade inicial do foguete era zero.

Grupo 3

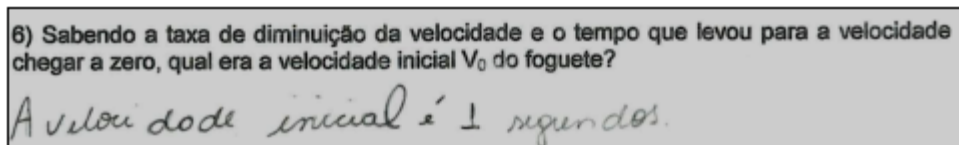


Figura 27- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 3.

Ao registrar essa resposta, o grupo, diferentemente do anterior, considerou que a velocidade inicial não poderia ser zero, porém demonstrou confusão com a representação da velocidade ao identificar o “segundo” como unidade de medida dessa grandeza.

Ao ser questionado sobre o por que da resposta, o grupo disse que “a velocidade inicial ocorre a partir do primeiro segundo, pois inicialmente o foguete está em repouso”.

Com essa resposta infere-se que o grupo:

- não compreendeu totalmente o enunciado, uma vez que responderam o momento em que, para eles, se dava a velocidade inicial e não o valor dessa velocidade, que era o propósito da questão;

- não levou em consideração os números não inteiros, pois interpretou o número 1 como sendo o primeiro número após o 0.

Essas ações mostram que os alunos não assimilaram o fato de algumas grandezas poderem assumir valores inteiros e não inteiros, ou seja, não mobilizaram conhecimentos que considerassem um raciocínio semelhante, em suas estruturas cognitivas. A variação proporcional que ocorre entre duas grandezas interdependentes também não foi considerada pelo grupo.

Grupo 4

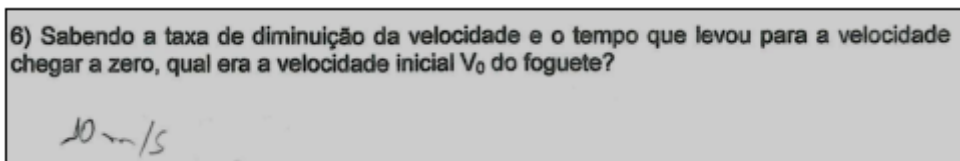


Figura 28- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 4.

Após ler a questão algumas vezes, o grupo perguntou ao professor se “a velocidade V , indicada na questão 5 é a mesma V_0 apresentada na questão 6?”. Nesse momento fez-se necessário uma intervenção por parte do professor, com o objetivo de diferenciar os significados de V e V_0 . Após a intervenção o grupo registrou essa resposta, mostrando que não houve interpretação total da questão, pois apenas o conceito de velocidade como a razão entre espaço e tempo parece ter ficado claro.

Dessa forma, o grupo não conseguiu articular, como era a pretensão desta pesquisa, a relação entre as variáveis do problema na busca de uma aprendizagem significativa para o conceito de função. A percepção de como ocorre tal relação servirá como um subsunçor para a compreensão de outras questões da situação de aprendizagem.

Grupo 5

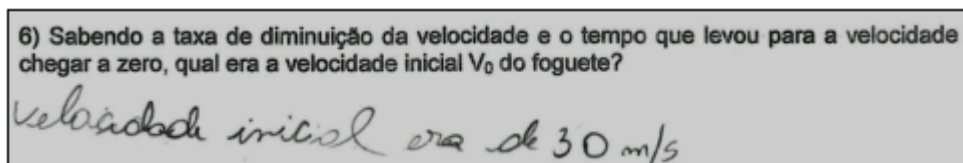


Figura 29- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 5.

O grupo apresentou inicialmente uma dificuldade em relacionar as respostas anteriores para determinar a velocidade inicial do foguete. Como a discussão parecia bem rica entre os integrantes não foi feita nenhuma intervenção pelo professor, e o grupo resolveu a questão sozinho.

Após registrarem a resposta, o grupo questionou se o raciocínio deles estava correto. Essa ação gerou a seguinte interação:

Prof.: *Me expliquem como chegaram nessa resposta.*

Grupo: *Se a velocidade diminui dez por segundo, em três segundos diminui 30. É só multiplicar a velocidade pelo tempo, não é professor?*

Prof.: *Os demais concordam com esse raciocínio?*

Grupo: *É, nós achamos que está certo.*

Prof.: *Então tudo bem.*

A resposta mostrou que os alunos conseguiram conectar suas ideias, obtendo, com convicção, a resposta correta. Com isso, pudemos crer que o grupo estabeleceu conexões que favoreceu a compreensão do conceito básico de função. Têm-se, portanto, mais uma situação em que a interação entre os pares apresentou resultados positivos, como já testificado em estudos sobre o assunto (SKOVSMOSE, 2001; ALMEIDA; FERRUZZI, 2012).

Grupo 6

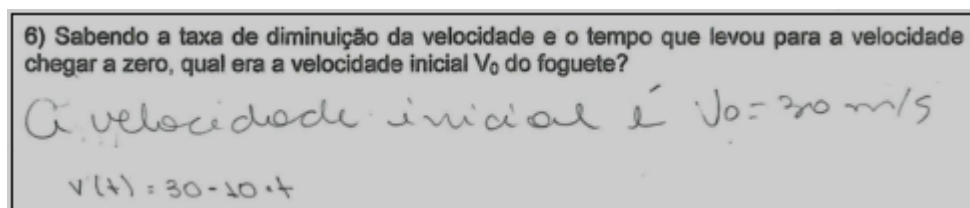


Figura 30- Protocolo da questão 6, realizada pelo grupo 6.

Assim como o primeiro, esse grupo apresentou juntamente com a resposta correta a função polinomial do 1º grau, que descreve a variação da velocidade do foguete para o problema proposto.

O grupo mostrou muita dedicação na resolução da atividade e, mesmo após ter registrado a resposta $V_0 = 30 \text{ m/s}$, discutiram acerca da função que permitiria relacionar a velocidade e o tempo, uma vez que essa informação tinha sido explorada na aula com o simulador.

A riqueza dessas discussões é apresentada por Burak (2004) como uma possibilidade a ser explorada, pelo professor, com o intuito de promover um maior envolvimento dos alunos, e a socialização dos conhecimentos adquiridos. Nesse contexto, o uso de atividades de modelagem como estratégia para o ensino da Matemática, que permite aos alunos serem protagonistas no processo de ensino e aprendizagem, se mostrou um caminho para tal exploração.

A relevância desse primeiro conjunto de questões é justificada pelo fato dos grupos, para construir o gráfico da função velocidade na etapa final, necessitarão saber determinar os valores das velocidades inicial e final – V_0 e V . Com isso, o objetivo foi propor uma sequência de questões que permitisse a organização das informações mais importantes para esse fim.

Ressalta-se que para a obtenção do primeiro modelo, comum a todos os grupos, a não resolução correta dessas questões não tem implicação negativa, uma vez que o gráfico de $v = v(t)$ foi exposto na questão 7 – primeira questão do segundo encontro. Entretanto, a dificuldade em determinar essas velocidades fez com que o professor retomasse os cálculos necessários antes da etapa final.

Os maiores obstáculos, percebidos pelo professor-pesquisador e pelo observador nesse primeiro encontro, que se fizeram presentes em todos os grupos, foram em relação à interpretação dos enunciados das questões e à dependência dos grupos em obter a validação de seus raciocínios, pelo professor, o que leva a considerar a caracterização da insegurança e incerteza na obtenção dos resultados.

Destaca-se que a ideia de proporcionalidade direta, que era âncora para a resolução da questão 6, não foi mobilizada por três grupos, o que nos permite inferir que alguns alunos não conseguiram acessar esse conceito em sua estrutura cognitiva por meio dos *conceitos subsunçores*. Esse fato desencadeia uma sequência de conteúdos sem significado, o que não contribui para a ligação, que deveria acontecer, do que já se sabe com os novos conhecimentos.

5.1.3 Análise da atividade do 2º encontro – Parte I

Inicia-se aqui a segunda etapa da atividade de modelagem, que consiste na resolução do segundo bloco de questões – 7 a 10.

Com a questão 7, pretendia-se promover uma análise reflexiva a partir dos gráficos apresentados nessa questão, de maneira que os alunos pudessem perceber que o fato da velocidade do foguete diminuir durante a subida, – conclusão essa que muitos chegaram com a primeira parte da atividade – tem como representação gráfica uma reta decrescente (Gráfico 2), e que a área da região plana delimitada pela reta e pelos eixos coordenados é numericamente igual ao comprimento do espaço percorrido pelo foguete na subida, ou seja, a altura atingida.

Foi percebido, tanto pelo professor-pesquisador quanto pelo observador, que os alunos discutiram bastante sobre os pontos dos gráficos, e alguns grupos apresentaram, inicialmente, dificuldades em interpretá-los. No decorrer das discussões surgiram falas do tipo: “no gráfico 2, no instante 1 a altura é 20” ou “no gráfico 1, o 1, 2 e 3 subiram todos no 30 metros”, que retratam parte da dificuldade sentida. Outras dificuldades que também foram observadas estão explicitadas nas análises individuais de cada grupo.

Ao final da análise da sétima questão, apesar das dificuldades sentidas, constatou-se que apenas dois grupos responderam incorretamente o item (a) se referindo ao Gráfico 1 como resposta correta.

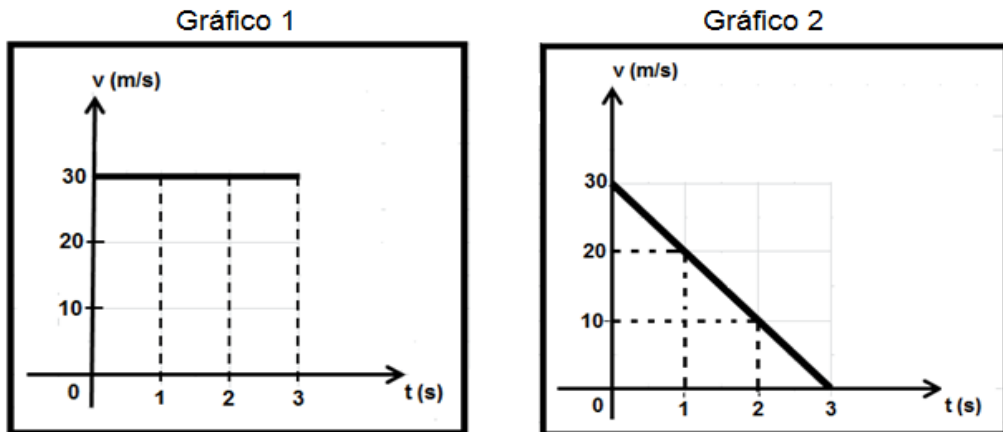
De acordo com as respostas registradas nos itens (d), (e) e (f) percebe-se que os grupos alcançaram as expectativas indicadas na análise preliminar. Todos os grupos exibiram respostas satisfatórias, mostrando que conseguiram relacionar a área da região plana situada abaixo da reta horizontal, para $0 < t < 3$, – gráfico 1 – e a altura atingida pelo foguete, considerando a velocidade constante de 30 m/s.

Sobre a resposta ao item, (f) à luz das observações feitas, entende-se que os grupos mobilizaram seus conhecimentos acerca da área do triângulo ser igual à metade da área do retângulo. Segundo relatos do observador, alguns grupos perceberam e justificaram essa razão entre as áreas por meio das quadriculas em marca d'água e outros, relataram já terem estudado cálculo de áreas, porém não se recordavam de como obtê-las.

O fato de alguns alunos não serem capazes de mobilizar os conhecimentos adquiridos sobre o cálculo de áreas, se dá, segundo Ausubel *apud* Moreira (1999), ao fato desse conceito não ter sido assimilado inteiramente, o que pode ter contribuído para uma aprendizagem automática, que Ausubel define de *aprendizagem mecânica*.

A questão:

- 7) Os gráficos abaixo apresentam duas possibilidades de comportamento da velocidade de um corpo em função do tempo.



- a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

Resposta considerada correta pelo professor: Gráfico 2.

Além dessa resposta, esperava-se uma justificativa que demonstrasse a percepção do grupo acerca da ocorrência da diminuição da velocidade no decorrer do tempo, o que na realidade acontece.

- b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no Gráfico 1?

Resposta considerada correta pelo professor: Manteve-se constante.

- c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o Gráfico 1.

Resposta considerada correta pelo professor: 90 metros.

- d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no Gráfico 1.

Resposta considerada correta pelo professor: 90 m^2 .

- e) Expresse, em palavras, a relação entre área e o espaço percorrido, encontrados nos itens (c) e (d).

Resposta considerada correta pelo professor: a área e o comprimento do espaço percorrido são numericamente iguais.

- f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no Gráfico 2.

Resposta considerada correta pelo professor: 45 m^2

A seguir, expõe-se as respostas dos alunos, que demonstram a percepção da relação entre área e altura atingida, como era esperado. A compreensão dessa relação se fará necessária no momento em que os alunos forem testar o modelo em seus lançamentos, na terceira etapa da atividade.

Para os registros de algumas discussões internas nos grupos, indica-se cada integrante pela letra inicial do seu nome antecedida por **Int.** (abreviação para integrante), com o intuito de facilitar a transcrição de alguns diálogos.

Grupo 1

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

GRÁFICO 2, porque conforme a duração do tempo aumenta a velocidade cai

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

a velocidade ficou constante.

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$30 \cdot 3$
90 metros

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

$30 \cdot 3 = 90 \text{ m}$

e) Expresse em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

a área e a altura é a mesma

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

$\frac{90}{2} = 45 \text{ metros}$

Figura 31- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 1.

Em busca das respostas para os itens (a), (b) e (c), os integrantes do grupo 1 passaram a analisar as coordenadas dos pontos nos dois gráficos, tentando justificar qual deles melhor representaria a situação proposta. O observador registrou a seguinte interação:

Int. E: No gráfico 1, o 1 combina com o 10, o 2 com o 20 e o 3 com o 30.

Int. V: Mas o que conta é a reta em negrito, então o 1 combina com o 30, o 2 e o 3 também.

Nesse momento um terceiro integrante apontando para a reta horizontal, disse:

Int. J: É verdade, o gráfico está todo em cima.

Após essa percepção o grupo concluiu que a velocidade representada no Gráfico 1 não variava, e compreendeu como se dava a relação entre as grandezas tempo e velocidade nos Gráficos 1 e 2, conseguindo associar a posição das retas

com os conceitos decrescente e constante, o que permitiu responder corretamente os itens (a) e (b).

Os significados acerca da inclinação da reta, no gráfico da função polinomial do 1º grau, foram muito explorados em atividades anteriores, e os alunos mostraram tê-los compreendidos ao aplicá-los na resolução da questão. Nesse ponto, identifica-se o que Ausubel (1980) trata como *aprendizagem por subordinação*, quando o aprendiz percebe a existência de uma relação de dependência entre a nova informação e um conhecimento adquirido anteriormente.

Sobre o item (c), o integrante **Int. V** ressaltou que “*no gráfico 1 todos os tempos estão relacionados a velocidade 30 m/s que dá uma distância de 90 metros*”. Apesar dos demais integrantes concordarem com essa fala, o grupo não se contentou com o cálculo mental realizado, foi perceptível a indagação e investigação dos integrantes em busca de conhecimentos similares que os permitissem resolverem a questão. Segundo a teoria de Ausubel esses conhecimentos são estruturas cognitivas significativas.

Depois de debaterem como poderiam registrar a resposta, um dos integrantes concluiu:

Int. F: *se nos 3 segundos a velocidade era 30, então basta multiplicar 30 por 3 para achar o resultado que é 90.*

Os demais integrantes se mostraram convencidos do resultado e com isso o grupo registrou o cálculo no item (c).

Nos demais itens, o grupo não apresentou dificuldades na resolução e conseguiu determinar a área do triângulo do Gráfico 2, deixando explícita a relação entre área e altura, um dos objetivos para essa sétima questão. É importante ressaltar que esse grupo, assim como outros, não levou em consideração as grandezas envolvidas nos cálculos, bem como a unidade de medida que representa tais grandezas, ao registrarem, por exemplo, *45 metros* como resposta para a área solicitada no item (f). Essas observações foram feitas pelo professor-pesquisador após a finalização da atividade.

Grupo 2

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

R → O gráfico 2

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

R → a velocidade constante

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$$\begin{array}{r} 30 \\ +30 \\ +30 \\ \hline 90 \end{array}$$

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \text{ m} \end{array}$$

e) Expresse em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

As duas questões chegaram no mesmo resultado.

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

R → é 45

Figura 32- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 2.

Mesmo apresentando respostas corretas, o grupo 2, inicialmente, teve dificuldades em identificar as coordenadas dos pontos nos Gráficos 1 e 2, e na interpretação das questões.

Para responderem os itens (a) e (b), o grupo necessitou da intervenção do professor-pesquisador:

Int. S: Não estamos entendendo essa pergunta sobre variação da velocidade.

Prof.: Essa pergunta é sobre o que está representado nos Gráficos 1 e 2.

Int. S: No gráfico 1, o 1, 2 e 3 subiram todos no 30 metros, certo?

Prof.: Isso significa que durante os três segundos a velocidade foi de 30 m/s, ou seja, a cada segundo o foguete subiu 30 metros.

Int. W: Nesse caso a velocidade do foguete foi sempre a mesma.

Prof.: *Agora observem o gráfico 2 e vejam o que aconteceu com a velocidade durante os três segundos e tentem responder.*

A partir da compreensão do comportamento da velocidade no Gráfico 1, o grupo relacionou o Gráfico 2 à “*perda de força do foguete na subida*”, e então concluíram que a resposta do item (b) era constante e do item (a) era variável, o que fez com que registrassem as respostas de forma definitiva. Com essa ação os alunos mostraram relacionar a representação da velocidade variável com a reta decrescente e a representação da velocidade constante com a reta horizontal, ou seja, conseguiram mobilizar conceitos subsunçores necessários.

No item (c), o grupo mostrou compreensão acerca do significado da velocidade constante de 30 m/s, representada no Gráfico 1, e registraram a resposta 90 m por meio da soma de parcelas iguais.

De acordo com as observações feitas e os registros apresentados, esse grupo identificou que a área e comprimento do o espaço percorrido eram numericamente iguais.

Grupo 3

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

1 - Gráfico.

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

desacelerou.

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

90

e) Exprese em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

pelos cálculos a área e o espaço são iguais.

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

45

Figura 33- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 3

No grupo 3 os alunos conversaram acerca da variação da velocidade, porém apresentaram dificuldades em identificá-la a partir dos gráficos. Então o grupo solicitou uma explicação para o professor-pesquisador:

Prof.: *O que acontece com a velocidade do foguete durante a subida?*

Int. R: *Diminui.*

Prof.: *Quem é responsável pela diminuição da velocidade?*

Int. R: *A gravidade.*

Prof.: *Então qual é a taxa de variação da velocidade na subida?*

Int. C: *Diminui de dez em dez.*

Prof.: *Os gráficos 1 e 2 mostram o comportamento da velocidade. Analisem as coordenadas e vejam qual gráfico representa a diminuição da velocidade de acordo com o tempo.*

O diálogo mostra a compreensão do grupo em relação ao fenômeno estudado, porém indica que a ideia acerca do significado das posições das retas nos Gráficos 1 e 2 não foi estruturada, mostrando que houve mecanização quanto o aprendizado desse conhecimento. Tais dificuldades puderam ser percebidas nas respostas aos itens (a) e (b).

Registros feitos pelo observador, no momento em que os alunos buscavam a resposta para o item (c), mostram que o grupo percebeu que no Gráfico 1 a velocidade era constante e, no Gráfico 2, variável. Tal percepção fez com que o grupo respondesse corretamente o item (c), levando em consideração a velocidade como sendo 30 m/s, porém os integrantes não associaram essa nova conclusão à resposta que registraram no item (a), que contradiz a constatação de que a velocidade indicada no Gráfico 1 é constante.

Apesar da dificuldade encontrada nas primeiras questões, principalmente em relação à leitura e interpretação dos gráficos, o grupo fez uso correto dos conhecimentos acerca das áreas do retângulo e do triângulo, e conseguiram responder corretamente os itens (d), (e) e (f), além de perceberem a relação entre área e espaço percorrido.

Grupo 4

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

R. Gráfico 1 porque ele varia a cada segundo em 10 m/s =

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

Ele mantém a mesma velocidade

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$30 \cdot 3 = 90 \text{ m}$

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

$30 \cdot 3 = 90$

e) Exprese em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

R. É que o (c) e o (d) tem a mesma medida

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

$\frac{90}{2} = 45$

Figura 34- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 4.

Inicialmente as discussões geradas no grupo 4 foram em relação ao comportamento da velocidade apresentada nos gráficos. Um dos integrantes, ao observar o Gráfico 1, fez a seguinte relação entre tempo e velocidade:

Int. A: No 1 segundo a velocidade foi 10, em 2 segundos a velocidade foi 20 e no segundo 3, foi 30.

Nesse momento, outro integrante fez o seguinte comentário:

Int. P: Mas nós temos que considerar o tracejado e ele mostra que em todo tempo a velocidade subiu no 30.

A percepção do integrante em relação ao tracejado, que orienta sobre as coordenadas, fez com que o grupo analisasse mais atentamente o Gráfico 2 e percebesse que nele ocorre a variação de velocidade.

Para responder o item (a) o quarto grupo justificou que a velocidade variava em 10 m/s a cada 1 segundo, e um dos integrantes disse: “é porque o foguete

desacelera na subida”. A fala registrada e a percepção da variação da velocidade mostra que o grupo compreendeu o fenômeno, porém não atentou para a conclusão anterior, sobre a velocidade apresentada no gráfico 1 ser constante. Ao ser questionado posteriormente sobre a resposta registrada para o primeiro item, um dos integrantes relatou:

Int. A: *Foi falta de atenção professor, tanto é que nós respondemos na (b) que a velocidade era constante. Foi falta de atenção.*

De fato, as respostas registradas nos itens (b) e (c) nos indicam que o grupo superou a dificuldade inicial em relacionar o fenômeno a uma representação gráfica. A interação entre os alunos, promovida pelo trabalho em grupo, mostrou-se, novamente, muito positiva.

Em relação aos demais itens, o grupo não apresentou dúvidas na resolução e conseguiu responder corretamente as questões.

Grupo 5

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

Gráfico 2. ele varia a velocidade.

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

Ele mantém a velocidade constantes:

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

ao final da subida 90 m

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

$$\text{base} \cdot \text{alt} = \text{area} = 3 \cdot 30 = 90$$

e) Exprese em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

A relação entre a área e o espaço percorrido são iguais 90

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

$$3 \cdot 30 = 90$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \times \frac{1}{2} \\ \hline 45 \end{array}$$

área 45

Figura 35- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 5

Durante as conversas os integrantes desse grupo fizeram relações corretas sobre os gráficos, apontando que “no gráfico 1 a velocidade foi sempre 30 e no gráfico 2 ela variou”. Para a resposta ao item (d) o grupo recorreu à fórmula da área do retângulo, o que aponta para a apreensão desse conteúdo e mobilização de conceitos subsunçores.

O grupo concluiu, de maneira assertiva, a relação proposta entre a área da região plana localizada abaixo da reta e da representação do espaço percorrido, no item (e).

Grupo 6

a) Qual dos gráficos melhor representa a variação da velocidade do foguete, durante a subida? Justifique sua resposta.

É o gráfico 2, porque ele tem a velocidade variável de 10 m/s

b) O que aconteceu com a velocidade do corpo, no gráfico 1?

A velocidade ficou constante 30 m/s.

c) Sabendo a velocidade do corpo e o tempo de movimento, calcule a altura atingida pelo corpo, ao final da subida, de acordo com o gráfico 1?

$$\begin{array}{r} 30 \text{ m/s} \\ \times 3 \\ \hline 90 \text{ m} \end{array}$$

d) Calcule a área do retângulo de altura 30 e base 3, representado no gráfico 1.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \text{ m} \end{array}$$

e) Expresse em palavras a relação entre a área e o espaço percorrido encontrados nos itens c) e d).

Os valores são iguais porque a área é a mesma do espaço percorrido.

f) Calcule a área da região limitada pelo triângulo de altura 30 e base 3, no gráfico 2.

$90 \div 2 = 45 \text{ m}$ nos percebemos que a região limitada no gráfico 2 é metade da região representada no gráfico 1.

Figura 36- Protocolo da questão 7, realizada pelo grupo 6.

O sexto grupo mostrou bom entendimento acerca das representações dos gráficos em relação às velocidades constante e variável. Um dos integrantes até comentou que “no gráfico 1 o movimento era uniforme”, o que mostra que houve entendimento desse conceito bem como da sua representação gráfica.

O grupo respondeu corretamente as questões, e a maneira minuciosa como apresentaram as respostas assinala para a apreensão da relação esperada pelo professor-pesquisador entre o valor numérico das áreas e do comprimento do espaço percorrido.

Analisando, de maneira abrangente, o conjunto de resultados apresentados na sétima questão, infere-se que todos os grupos concluíram que os valores das áreas das regiões planas localizadas abaixo das retas nos gráficos $v \times t$, representam o comprimento das alturas atingidas pelo projétil. Entretanto, a dificuldade em relação à interpretação dos Gráficos 1 e 2 foi sentida pela maioria.

De acordo com o observador, a interação entre os integrantes se mostrou sempre muito rica e contribuiu positivamente para a obtenção das respostas. Segundo ele, “os alunos procuraram se ajudar e ao final conseguiam chegar a conclusões de comum acordo”.

5.1.4 Análise da atividade do 2º encontro – Parte II

A questão 8 teve como objetivo promover uma relação mais fundamentada entre a área da região plana, delimitada pelo gráfico da função velocidade $v = v(t)$ – polinomial do 1º grau – com as alturas atingidas pelo foguete durante a subida. O intuito foi reforçar a ideia de que a área da região plana delimitada pela reta e pelos eixos coordenados é numericamente igual ao comprimento do espaço percorrido pelo foguete na subida, para que os alunos pudessem identificar a curva parábola pelos registros parciais das alturas.

Assim, a questão 8 buscou proporcionar aos alunos calcularem a área do triângulo limitado pela reta e eixos coordenados, no Gráfico 2, por partes: itens (b), (c) e (d), uma vez que a altura máxima atingida já tinha sido definida por meio da pergunta do item (a). O objetivo era a obtenção da curva parábola a partir do registro dos valores encontrados nessa questão, no plano cartesiano fornecido na questão 9.

A questão:

- 8) Fazendo analogia com a resposta do item (e) e os cálculos feitos no item (f), do exercício anterior, responda:
- Qual foi a altura atingida pelo foguete (Gráfico 2) ao final da subida? Justifique sua resposta.

Resposta considerada correta pelo professor: 45 metros.

Sobre a justificativa esperada: a região limitada no Gráfico 2 tem a metade da área da região limitada no Gráfico 1.

b) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 1$ s.?

Resposta considerada correta pelo professor: 25 metros.

c) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 2$ s.?

Resposta considerada correta pelo professor: 40 metros.

d) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 3$ s.?

Resposta considerada correta pelo professor: 45 metros.

Todos os grupos conseguiram fazer a analogia sugerida no enunciado da questão 8 e determinaram corretamente a altura atingida pelo foguete, segundo o Gráfico 2, que foi solicitada no item (a).

Em relação aos itens (b), (c) e (d), o professor-pesquisador teve que intervir algumas vezes, pois os alunos apresentaram dificuldades em identificar as alturas parciais atingidas pelo foguete. Tais intervenções tiveram a finalidade de esclarecer o significado das frações do triângulo – figura formada no Gráfico 2 – com o intuito de permitir que os alunos construíssem uma relação dessas frações com outras figuras geométricas, e organizassem sua própria estrutura cognitiva.

A partir dessas intervenções houve a reiteração dos conhecimentos prévios, que facilitou a articulação entre os conteúdos anteriores e os novos. Assim, para alguns grupos essa articulação foi satisfatória, pois conseguiram visualizar os trapézios gerados pelas partições do triângulo e resolveram corretamente a questão. A dificuldade em determinar as áreas das figuras planas – retângulo, trapézio e triângulo – foi prevista na análise preliminar, assim como a necessidade do professor-pesquisador ter que retomar algumas noções sobre o assunto, sem prejuízo de resultados.

Após a obtenção dos resultados para esses itens, os alunos representaram os dados no plano cartesiano, na questão 9. Dos seis grupos, três não conseguiram localizar as coordenadas no plano e não aplicaram o conceito de eixo de simetria da parábola, também já estudado.

A seguir, apresentam-se os resultados registrados pelos grupos, que sinalizam, por um lado, o nível de compreensão e o domínio de conceitos âncora

importantes, e por outro, alguns erros cometidos devido a não apreensão das noções necessárias para a resolução do problema.

Grupo 6

8) Fazendo analogia com a resposta do item e) e os cálculos feitos no item f), responda:

a) Qual foi a altura atingida pelo foguete (gráfico 2) ao final da subida? Justifique sua resposta.

$90 \div 2 = 45$ a altura ao final da subida sera a metade da altura do gráfico 1.

b) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 1$ s.?

a altura atingida em 1s é 25m

c) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 2$ s.?

a altura atingida em 2s é 40m

d) Qual foi a altura atingida pelo foguete para $t = 3$ s.?

a altura atingida em 3s é 45m

Figura 37- Protocolo da questão 8, realizada pelo grupo 6.

Grupo 6

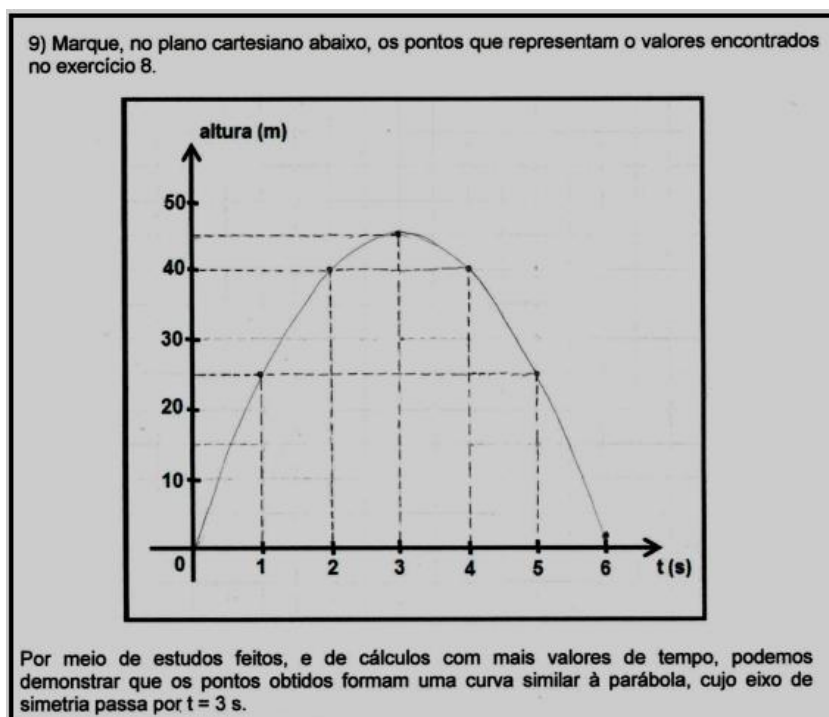


Figura 38- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 6.

Os grupos 3 e 5, assim como o grupo 6 não apresentaram dificuldades para responder as questões 8 e 9, mostrando domínio e compreensão dos conceitos estudados.

A atividade de modelagem desenvolvida por esses grupos, cujo objetivo era determinar a altura do foguete, a partir do cálculo da área da região plana do gráfico da função $v = v(t)$ foi satisfatória. Os resultados apresentados assinalam que houve uma estruturação das novas ideias, pois os grupos conseguiram relacionar de forma significativa as áreas às alturas do foguete para solucionar o problema.

Em relação aos demais grupos, suas dificuldades podem ser percebidas por meio do registro gráfico solicitado na questão 9, a seguir.

Grupo 1

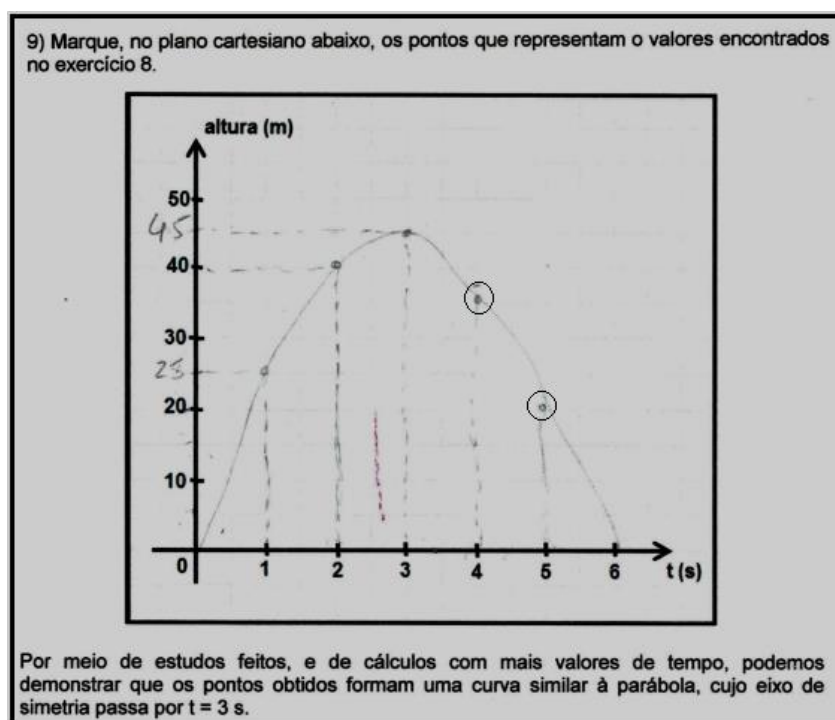


Figura 39- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 1.

Esse grupo conseguiu responder corretamente a questão 8 e localizaram no gráfico as coordenadas que relacionam as alturas atingidas pelo foguete nos três primeiros segundos. O grupo também visualizou a curva parábola a partir dos 4 primeiros pontos e definiu de forma correta que a altura máxima de 45 metros ocorreu no instante $t = 3$ segundos, uma vez que a curva passou a decrescer após

esse instante. Entretanto, esse grupo não aplicou o conceito de eixo de simetria, indicado na questão 9, para determinar as alturas atingidas pelo foguete para $3 < t < 6$ segundos – pontos assinalados na Figura.

Grupo 2

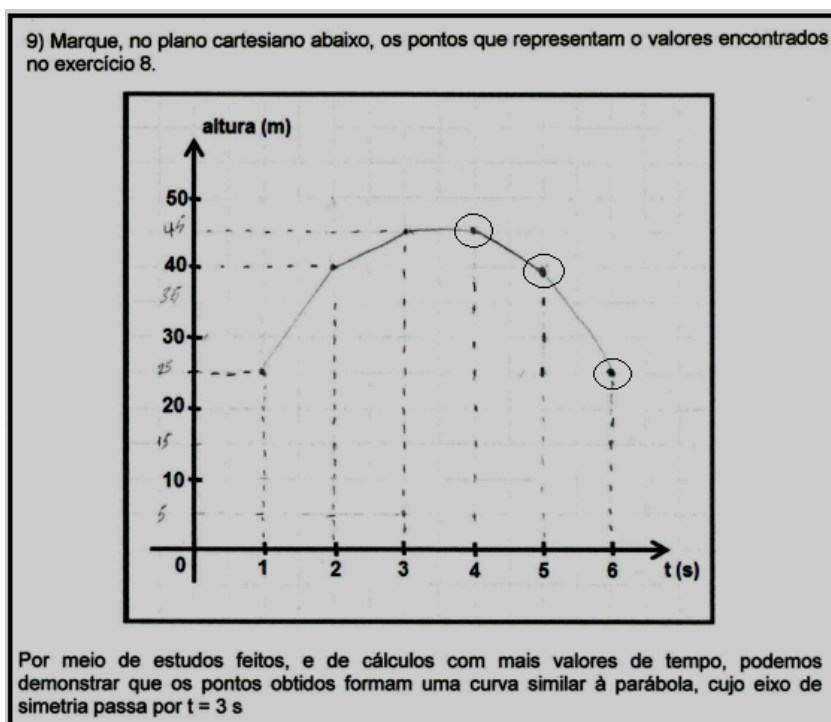


Figura 40- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 2.

O grupo 2, assim como o anterior localizou de forma correta as coordenadas dos pontos referentes as alturas nos instantes $t = 1$ s, $t = 2$ s e $t = 3$ s. Em relação aos demais pontos, o grupo mobilizou – mesmo que parcialmente – o conceito de eixo de simetria, porém demonstrou não ter compreendido o conceito de valor máximo da parábola, uma vez que o valor 45, que representa a altura máxima, foi relacionado com dois instantes.

Dessa forma, constatou-se que, para esses alunos, não existe uma representação significativa na configuração da parábola.

Grupo 4

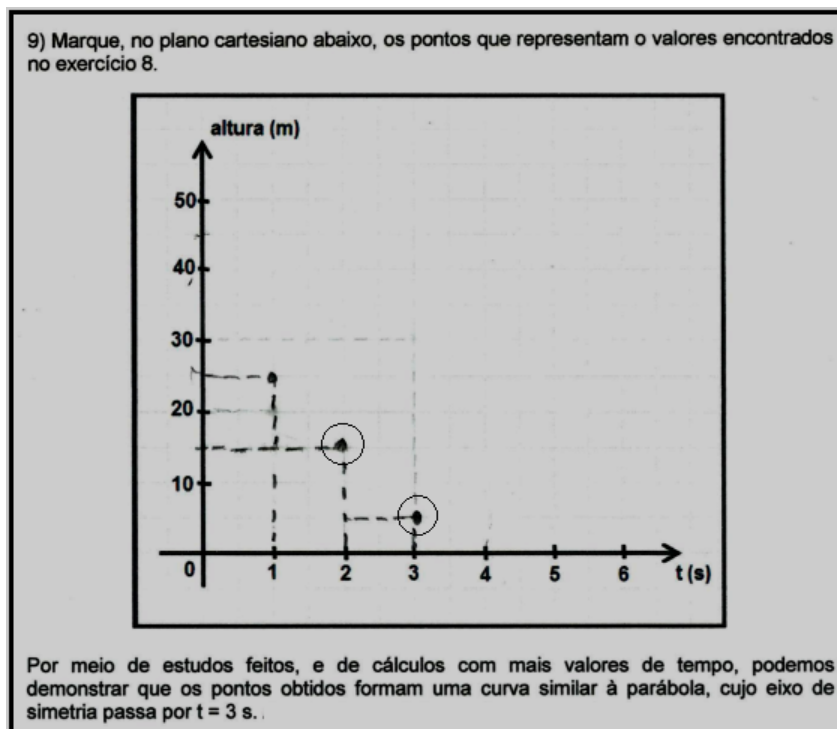


Figura 41- Protocolo da questão 9, realizada pelo grupo 4.

Já o grupo 4, apresentou dificuldades em calcular as áreas parciais do triângulo formado no Gráfico 2, mesmo depois das intervenções do professor-pesquisador. O grupo determinou como sendo 25 metros a distância percorrida pelo foguete no instante $t = 1$ s.; para a segunda parte, cujos valores de t compreendiam o intervalo entre 1 e 2 segundos, o grupo encontrou a resposta 15 metros, e para o último trecho $2 < t < 3$, chegando ao valor de 5 metros. Esses valores são corretos, entretanto eles não perceberam que deveriam adicionar a distância de 15 m à de 25 m, para determinarem a altura atingida pelo foguete no instante 2 e em seguida, adicionarem a esse resultado o valor 5, obtendo assim a altura máxima de 45 metros no instante 3 segundos. O fato deles não terem adicionado os valores das áreas parciais, fez com que os pontos fossem marcados de forma equivocada no plano cartesiano.

Alguns integrantes do grupo fizeram indagações sobre a posição dos pontos no plano:

Int. P: Esses pontos não estão formando uma parábola.

Int. M: Mas o valor das áreas foram esses, o vinte, o quinze e o cinco, está certo.

Essas indagações registradas pelo observador acerca da posição que os pontos estavam tomando na obtenção da parábola, não foram suficientes para que o grupo conseguisse identificar o erro.

Nesse ponto, reitera-se a definição de Ausubel para a aprendizagem significativa, como “um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo”. (MOREIRA, 1999, p. 153)

Em uma análise mais ampla, é perceptível que a construção dos conceitos sobre área, eixo de simetria de uma figura e a forma de como localizar pontos no plano cartesiano não foram realizadas por meio de aprendizagem significativa, pelo menos por alguns alunos, pois esses não mobilizaram tais conceitos durante o desenvolvimento da atividade.

5.1.5 Análise da atividade do 2º encontro – Parte III

Essa parte consiste na análise da questão 10, que tinha como objetivo permitir que os grupos registrassem a relação percebida, ou não, sobre a área da região plana localizada abaixo da reta no Gráfico 2 com a altura máxima atingida pelo foguete, apresentada no gráfico da parábola, na questão 9.

A questão:

10) Com base no que foi respondido até aqui, qual relação podemos fazer sobre a área abaixo da reta, no Gráfico 2, com a altura máxima atingida pelo foguete (gráfico da parábola)?

Resposta considerada correta pelo professor: O valor numérico da área abaixo da reta é igual ao valor numérico da altura máxima atingida pelo foguete.

Analisando os registros dessa última questão, verifica-se que apenas três grupos – 2, 5 e 6 – apresentaram respostas que indicam a percepção clara da relação existente entre a área da região limitada no Gráfico 2 e a altura atingida pelo foguete, como pode ser verificado pelos registros seguintes.

Grupo 6

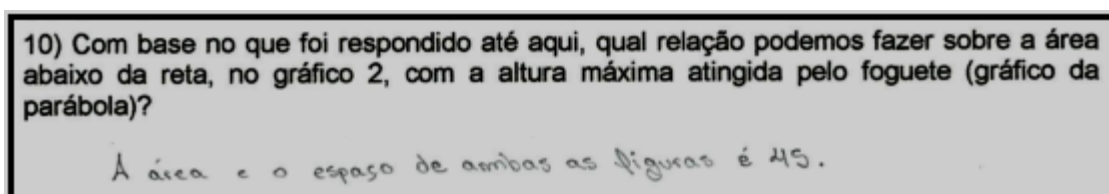


Figura 42- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 6.

Grupo 2

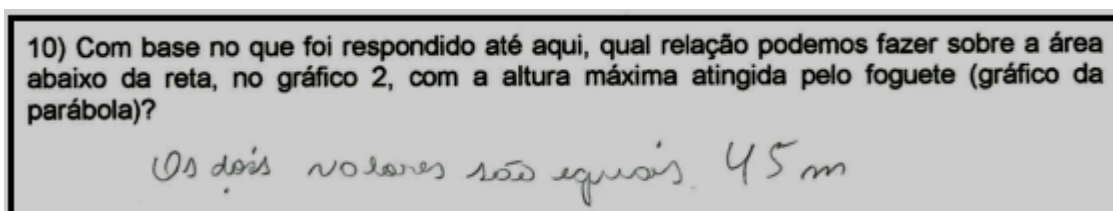


Figura 43- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 2.

Grupo 5

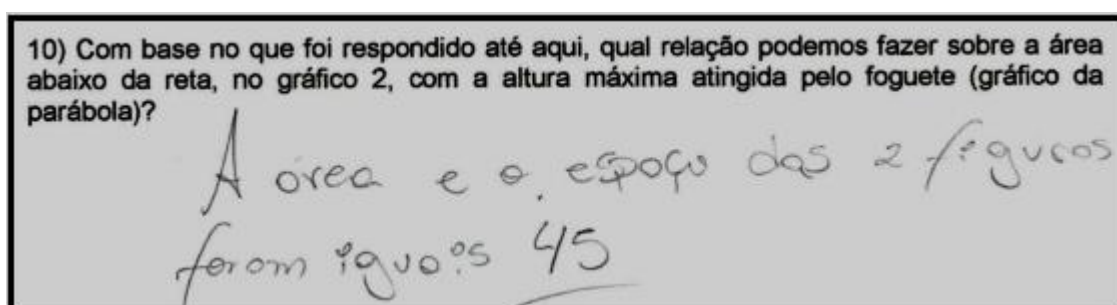


Figura 44- Protocolo da questão 10, realizada pelo grupo 5.

Os demais grupos responderam apenas “45 m”, o que numericamente não está errado, porém essa resposta não demonstra claramente se houve a percepção da relação solicitada, entre a área da região limitada no Gráfico 2 e a altura atingida

pelo foguete. Ressalta-se que os grupos, novamente, não consideraram as grandezas envolvidas nos cálculos, assim como a unidade de medida que representa tais grandezas, ao registrarem “45 m” como resposta à questão 10. Essa observação, e a diferenciação entre medida linear e de superfície, foi feita pelo professor-pesquisador após o desenvolvimento da atividade.

5.2 Desenvolvimento e análise do modelo produzido pelos alunos

Na aula seguinte ao segundo encontro, foi feita uma discussão com os alunos acerca da atividade realizada, com o objetivo de ouvir alguns depoimentos dos grupos sobre: as dificuldades sentidas durante a resolução, os pontos positivos e negativos de se trabalhar em grupo e a conclusão obtida por eles ao final do trabalho, no que diz respeito à relação pretendida entre área e altura. Eis alguns depoimentos:

Grupo 4: *O bom de ser em grupo é que um ajudou o outro. Se fosse sozinho eu não conseguiria.*

Grupo 2: *Foi difícil porque muitas coisas a gente não lembrava.*

Grupo 6: *Achei interessante usar as coisas que nós aprendemos para resolver um problema.*

Grupo 3: *Acho que a gente teve pouco tempo para resolver tudo. Tinha muitas perguntas.*

Esses depoimentos permitiram refletir sobre a atividade docente, pensando em formas de enriquecê-la quanto ao seu desenvolvimento numa próxima ocasião.

Após esse momento foi apresentada aos alunos a função polinomial do 2º grau – que é um modelo matemático aplicado à Física – com a finalidade de validar o modelo desenvolvido em sala para a determinação da altura do foguete. O referido modelo é exibido na Física como *equação horária da posição* de um movimento uniformemente variado, e é expresso da seguinte forma:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sendo:

s : posição/altura do corpo no instante t ;

s_0 : posição/altura inicial do corpo;

v_0 : velocidade inicial do corpo;

t : tempo;

g : gravidade cujo valor aproximado é 10 m/s^2 .

Ao substituímos os valores conhecidos obtemos a seguinte expressão:

$$s = 30t - 5t^2$$

Ao calcularmos a coordenada do vértice da função $s = s(t)$ acima, encontramos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Como foi estudado durante o desenvolvimento das fases e etapas de Beltrão (2009), o x_v é a coordenada, do vértice, associada ao valor máximo (y_v) da parábola, o que permitiu concluir que o foguete atingiu sua altura máxima no instante $t = 3$ segundos.

De acordo com o gráfico construído na questão 9, a altura máxima atingida pelo foguete foi 45 metros e ocorreu no instante $t = 3$ segundos. Tal verificação foi feita quando substituímos o instante $t = 3$ na expressão $s = 30t - 5t^2$:

$$s = 30.3 - 5.3^2 = 45$$

Durante a resolução de exercícios anteriores, os alunos puderam verificar que quando se substitui o valor de x_v na expressão do segundo grau, obtêm-se o valor máximo dessa expressão, ou seja, o y_v . Assim, valida-se o modelo desenvolvido, pois foram encontrados os 45 metros para a medida da altura máxima atingida pelo foguete.

Além da validação do modelo construído, os alunos compreenderam que é possível se calcular a altura máxima de um projétil sem se conhecer a equação horária que descreve a sua trajetória.

A leitura de diferentes representações para um mesmo objeto é uma forma de permitir que os alunos estabeleçam conexões que representem ideias mais significativas que contribuam para a estruturação do conhecimento a ser aprendido. Nesse contexto, Ausubel considera que essas representações diferenciadas podem ter significado “conotativo”, construído por cada indivíduo de maneira particular, isto é, para alguns o objeto pode se efetivar em sua estrutura cognitiva pela representação escrita, para outros, por meio da representação gráfica.

Uma vez validado o modelo, foi feito um levantamento com os alunos sobre os três passos mais importantes dentre as 9 questões, que devem ser considerados principais para a determinação da altura do foguete, o que gerou o seguinte diálogo:

Prof.: *Se tivéssemos que escolher dentre toda a atividade, três informações que foram importantes para o cálculo da altura do foguete, quais seriam?*

Aluno: *a parábola.*

Prof.: *Certo, mas vocês precisaram de informações anteriores para chegar à parábola não é? Que informações foram essas?*

Aluno: *A variação da velocidade.*

Aluno: *O tempo de lançamento.*

Prof.: *Certo, todos esses pontos que vocês levantaram estão corretos, mas será que eles são os principais?*

Prof.: Qual foi a altura máxima atingida pelo foguete mesmo?

Aluno: 45 metros.

Prof.: Onde essa resposta pode ser encontrada?

Aluno: na parábola.

Prof.: E se olharmos um pouco antes, na questão 8 (a), que resultado encontramos?

Aluno: 45 metros

Prof.: E de onde saiu esse resultado?

Aluno: Da área.

Prof.: Qual área?

Aluno: A área do triângulo.

Prof.: Então nós precisamos da área do triângulo, representado no gráfico da velocidade, na questão 7, para descobrirmos a altura máxima, correto?

Nesse momento os alunos concordaram com o professor, que explicou a relevância desse gráfico para a resolução do problema.

Para a obtenção desse gráfico, foi retomada a necessidade de se ter, pelo menos, dois pontos no plano cartesiano – condição já estudada para a construção de uma reta. O professor explicou que esses pontos estavam associados à *velocidade inicial* do foguete e ao *tempo de subida*, que puderam ser verificados no gráfico da questão 7.

Diante das percepções dos alunos e da discussão conjunta, foi feita a sistematização das ideias, e o registro dos três passos mais importantes para a determinação da altura do foguete:

- 1) Calcular a velocidade inicial V_0 do foguete – que foi determinada na questão 6;
- 2) Construir o gráfico $v \times t$ considerando o tempo de subida – gráfico semelhante ao Gráfico 2, apresentado na questão 7;

- 3) Calcular a área da região plana localizada abaixo da reta no gráfico da velocidade, construído – que foi calculada na questão 7 (f).

Após a sistematização, os grupos foram convidados a aplicarem o desenvolvimento desses três passos, a partir do tempo que obtiveram no dia do lançamento. Essa foi a última etapa da modelagem que consistiu na determinação da altura dos seus respectivos projéteis.

Durante essa etapa, o professor-pesquisador pôde perceber maior interação entre os integrantes dos grupos, e a compreensão de conceitos que antes não tinham sido assimilados, como por exemplo, a velocidade inicial do foguete é o resultado da multiplicação do tempo de subida pela constante da gravidade; ou ainda, que a reta no gráfico da velocidade será sempre decrescente, pois a velocidade do foguete diminui durante a subida.

A seguir, apresentam-se os registros dos grupos que estavam presentes nessa última etapa.

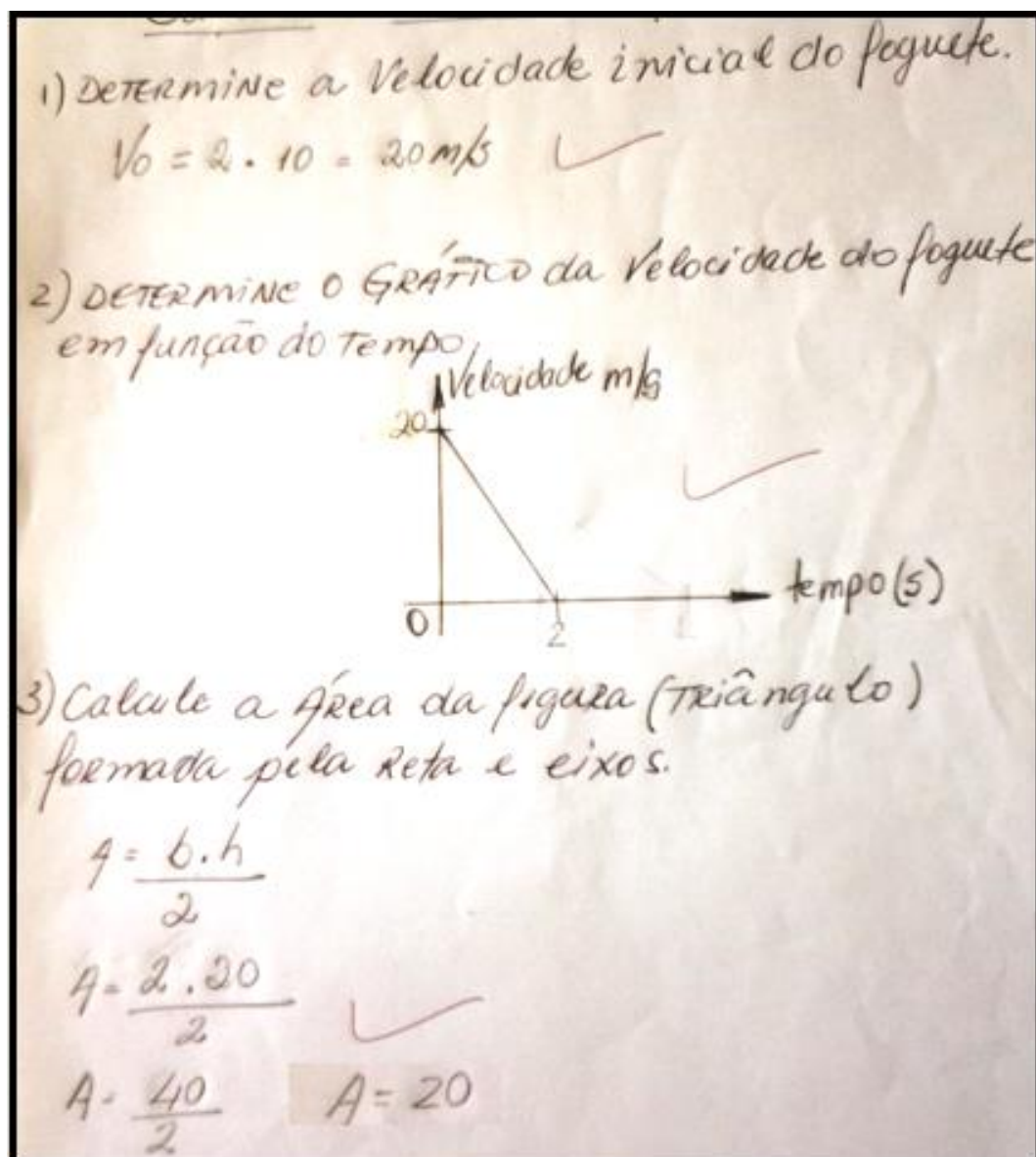
Grupo 1

Figura 45- Protocolo do grupo 1, tempo de lançamento: 4 segundos.

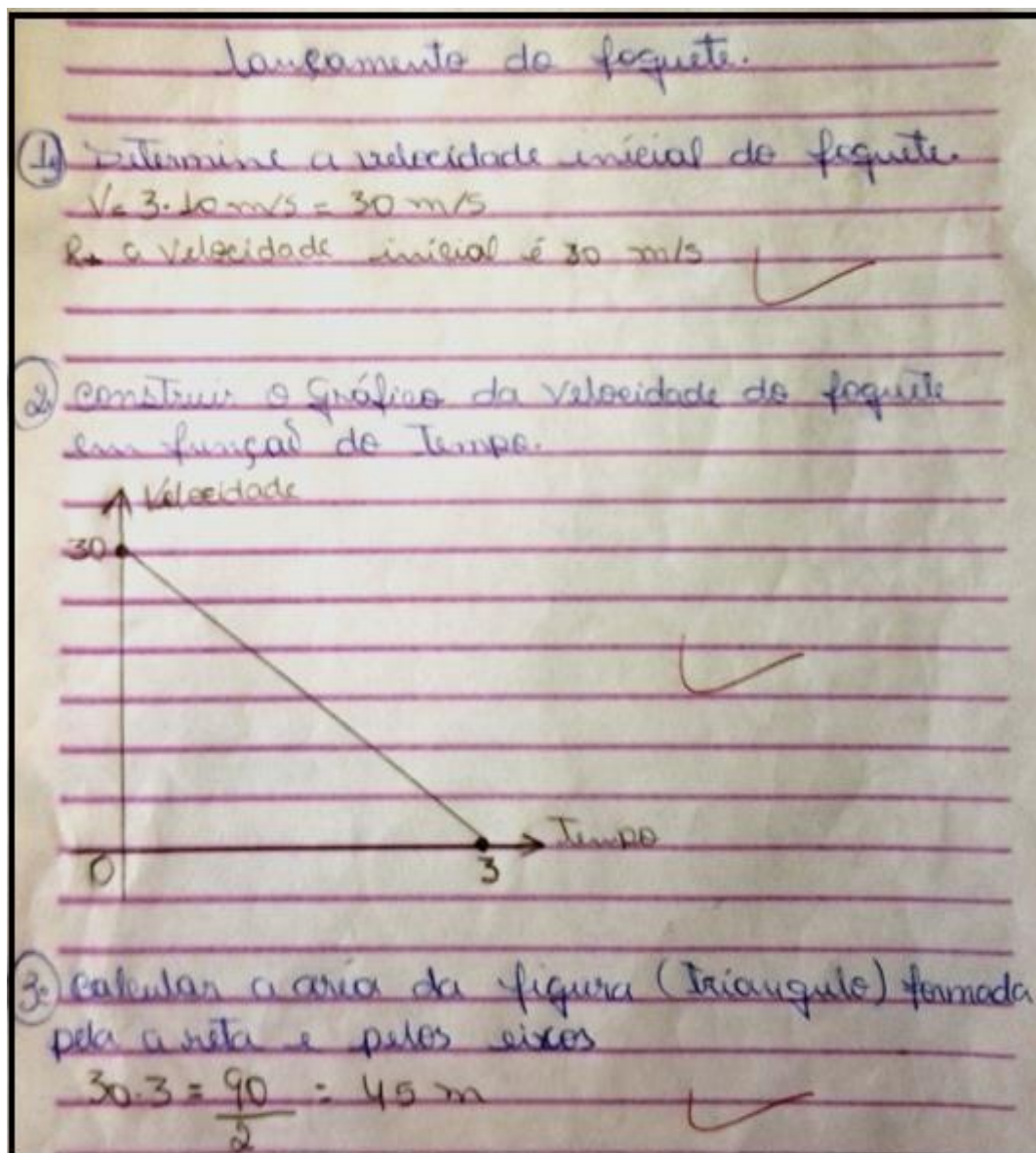
Grupo 2

Figura 46- Protocolo do grupo 2, tempo de lançamento: 6 segundos.

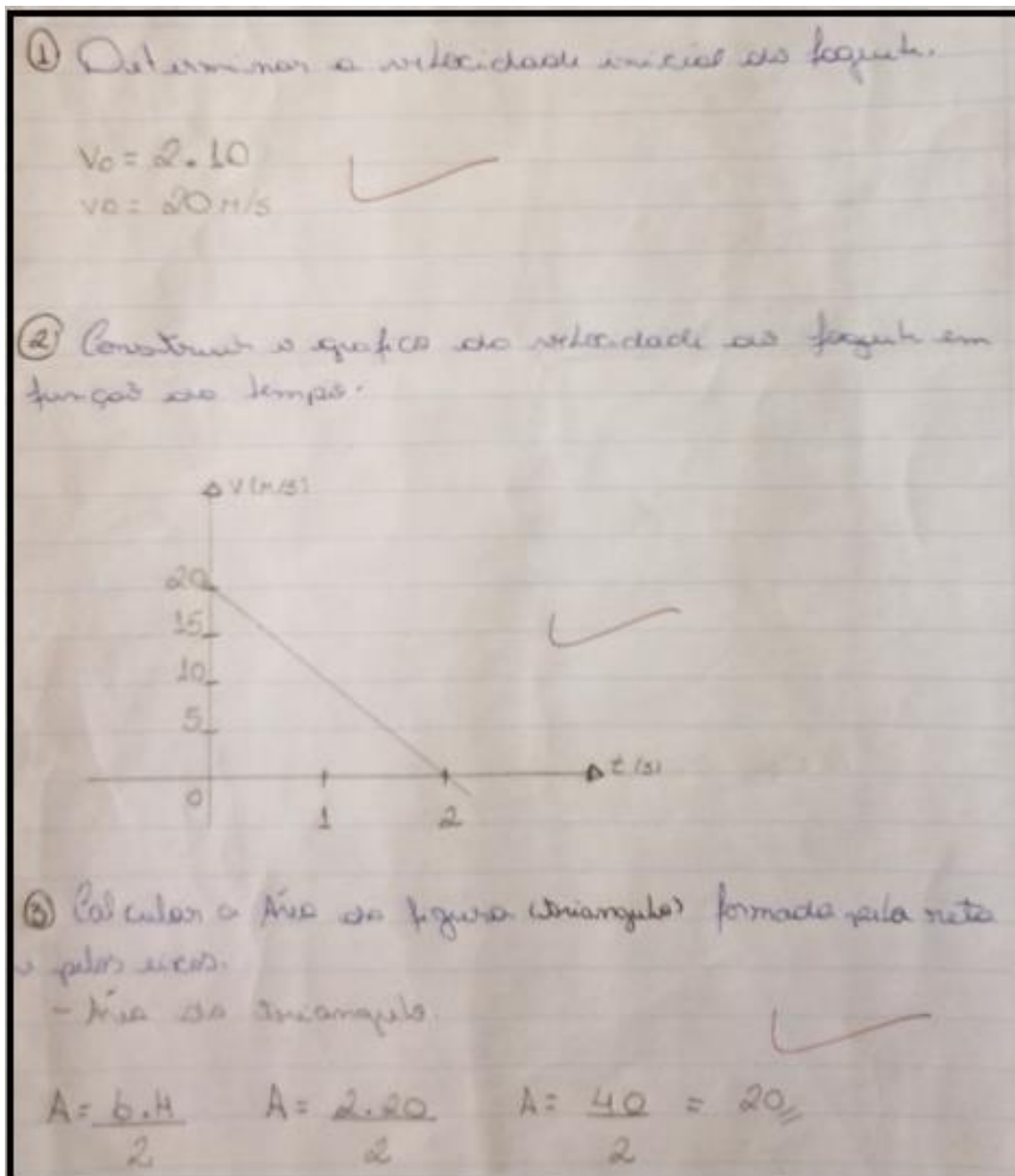
Grupo 3

Figura 47- Protocolo do grupo 3, tempo de lançamento: 4 segundos.

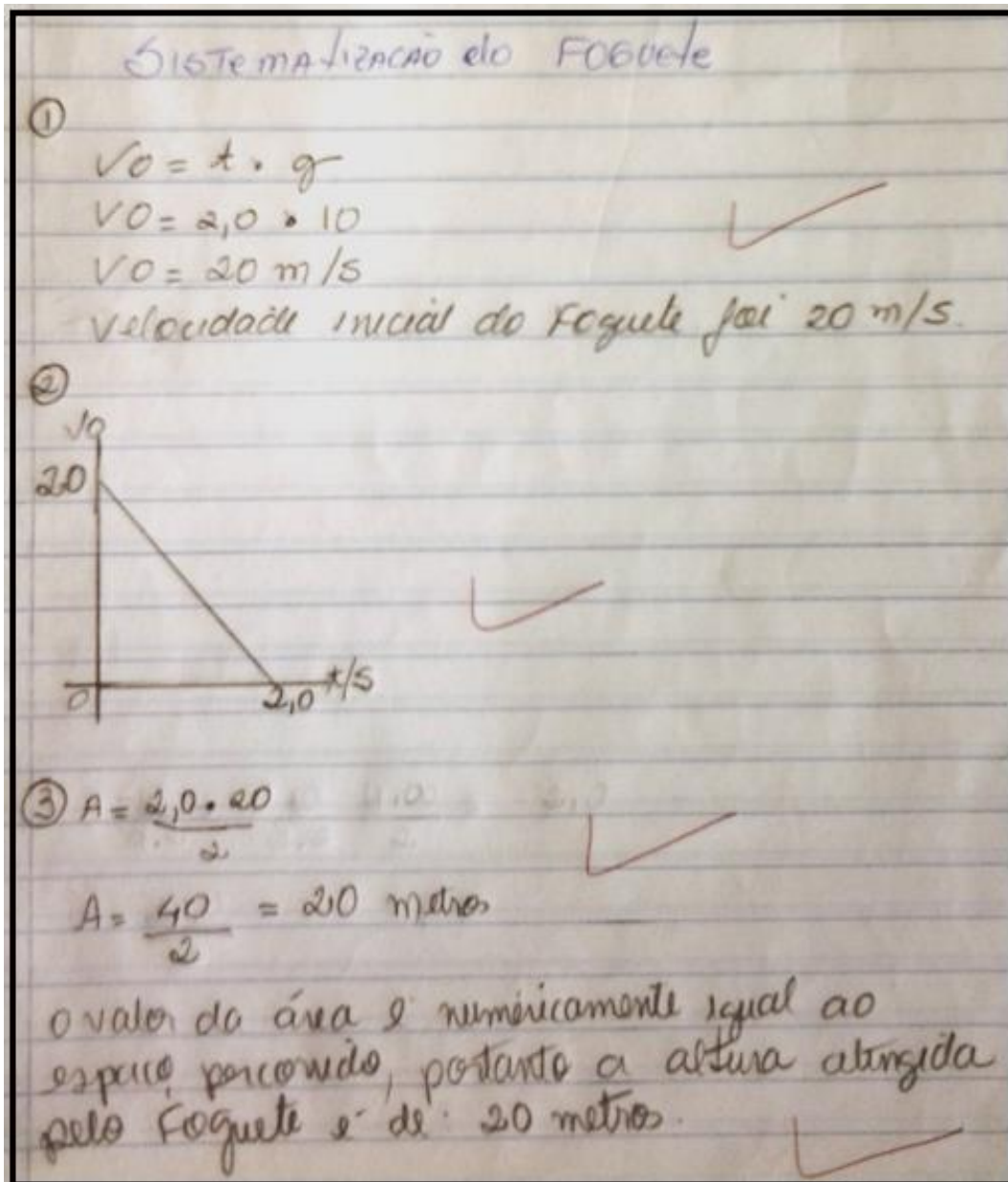
Grupo 4

Figura 48- Protocolo do grupo 4, tempo de lançamento: 4 segundos.

Grupo 6

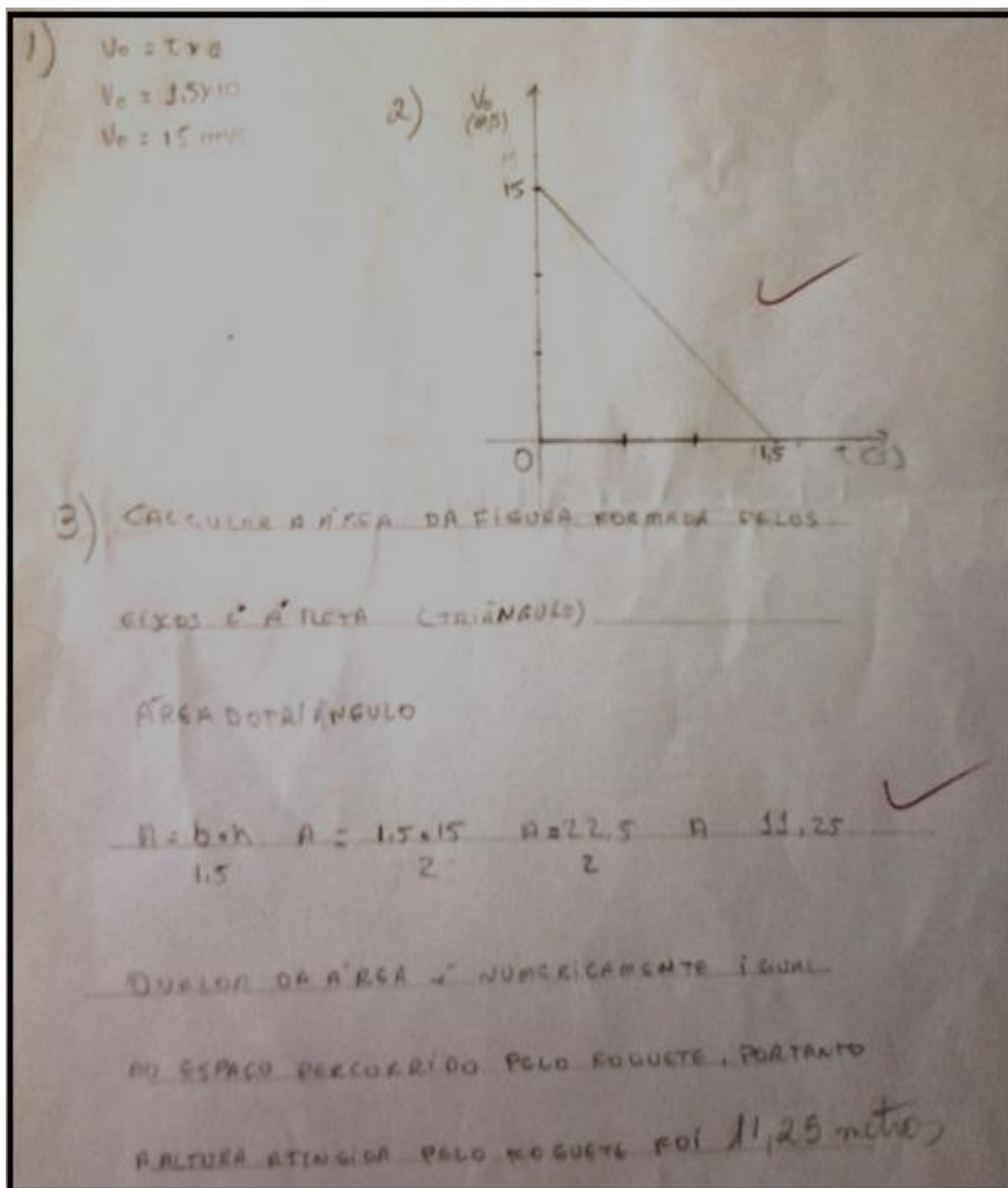


Figura 49- Protocolo do grupo 6, tempo de lançamento: 3 segundos.

Com esses resultados os alunos mostraram boa assimilação e compreensão acerca da relação existente entre o espaço percorrido pelo foguete e a área delimitada pelo gráfico da velocidade e os eixos. Conseguiram, portanto, *combinar* de forma significativa diversas informações e conceitos discutidos em aula, para construir seus modelos e determinar a altura de seus projéteis, que era o objetivo proposto pela atividade de modelagem.

Considerações Finais

A pesquisa pretendeu analisar que tipo de contribuições as atividades desenvolvidas por meio da Modelagem Matemática numa turma de EJA trazem para o aprendizado desses alunos, ao permitir que eles participem ativamente do processo de ensino e aprendizagem, e possam compreender melhor a Matemática por meio das aplicações.

Nesse contexto, procurou-se responder a questão de pesquisa: *Quais são os resultados obtidos, a partir de uma experiência com a Modelagem Matemática, no ensino e aprendizagem do conceito de função quadrática numa turma de EJA?*

Ao usar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino, buscou-se proporcionar aos alunos da EJA um ensino em que o contrato didático fosse diferente do estabelecido no ensino tradicional, o qual esse público está acostumado, objetivando uma aprendizagem significativa em que os alunos fossem participantes ativos no processo.

Essa experiência foi desafiante, uma vez que os alunos da EJA estão acostumados com um contrato didático pautado em aulas meramente expositivas, em que o professor é visto como um transmissor de conhecimentos e eles, espectadores. Nesse contexto de desafio, evidenciam-se três tipos de obstáculos, que segundo Bassanezi (2002), são encontrados ao se propor um trabalho como modelagem matemática:

- 1) **Obstáculos instrucionais** – estão relacionados ao tempo disponibilizado para o desenvolvimento do trabalho com modelagem e a necessidade do cumprimento do programa de ensino.
- 2) **Obstáculos para os estudantes** – esses obstáculos abarcam aspectos como: rompimento do contrato didático, a dificuldade em relacionar os conhecimentos prévios com a situação em estudo e a escolha de um tema não motivador para os alunos.

- 3) **Obstáculos para os professores** – a falta de confiança em desenvolver modelagem e a necessidade de dispor de um tempo maior para preparar as aulas, são os principais fatores que geram esses obstáculos.

Em relação ao trabalho desenvolvido com a EJA, não se encontraram **obstáculos instrucionais** no que diz respeito à necessidade de se cumprir um programa de ensino, pois o currículo do curso não é “fechado” e isso proporcionou maior autonomia quanto aos conteúdos trabalhados. Entretanto, o fator tempo se apresentou como uma dificuldade, uma vez que o curso de EJA é semestral e o tempo de aula, reduzido.

No que diz respeito aos **obstáculos para os estudantes**, percebe-se que a mudança no contrato didático foi o que mais impactou no processo. Inicialmente, os alunos se mostraram pouco seguros ao desenvolverem as atividades com modelagem, porém o trabalho em conjunto e a presença do professor como mediador, foram fatores que contribuíram para que eles se sentissem mais seguros em meio ao processo, o que dirimiu aspectos desse tipo de obstáculo.

O fato de se desenvolver o trabalho com uma turma de EJA, fez considerar um obstáculo para estudantes que não foi caracterizado por Bassanezi (2002) que é o fator “**tempo fora da escola**”. Apesar da faixa etária dos sujeitos de pesquisa – entre 20 e 45 anos – muitos deles ingressaram na 1ª série do Ensino Médio após muitos anos fora da escola, e isso dificultou a mobilização de alguns conhecimentos prévios necessários.

Sobre o terceiro tipo de obstáculo, identificado por Bassanezi (2002) como **obstáculos para os professores**, declara-se que houve certa insegurança por parte do professor-pesquisador em desenvolver, pela primeira vez, um estudo pautado na Modelagem Matemática como estratégia, e também, ressalta-se a preocupação com o tempo, uma vez que se dispunham de 4 aulas semanais de 40 minutos cada. Contudo, tal obstáculo foi superado quando se compreende o propósito do trabalho, que corrobora com o que Bassanezi (2002) diz sobre a modelagem no ensino:

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. (Bassanezi. 2002, p. 38).

Em complemento aos obstáculos para os professores, salienta-se que o fato dos alunos da EJA terem uma rotina exaustiva entre trabalho e estudo, contribuiu para algo que se considera inevitável: a ausência em algumas aulas, por conta de situações adversas como problemas de trânsito, familiares e, também o cansaço, o que acabou sendo um obstáculo para a sequência de atividades, dificultando a compreensão dos conhecimentos e percepção das relações pretendidas.

Durante o desenvolvimento da atividade de modelagem, percebe-se como aspectos favoráveis: dedicação dos alunos frente à situação proposta, evolução deles em relação à exposição de questionamentos e ideias, motivação em aprender objetivando a resolução de um problema, e também, disposição para interagir com os demais colegas; essas foram algumas atitudes, que outrora, os alunos não manifestavam.

Apesar dos obstáculos citados e das dificuldades sentidas pelos alunos frente essa nova configuração de aula, a atividade de modelagem nos moldes de Beltrão (2009), por meio de *fases e etapas*, e a escolha de um tema que os alunos se interessaram em investigar, favoreceu a criação de um ambiente de aprendizagem significativo, que proporcionou aos alunos serem protagonistas de suas aprendizagens, e contemplou aspectos como: a construção e desenvolvimento de conceitos e conteúdos matemáticos; contextualização de situações, socialização dos alunos e ruptura do currículo linear, expostos por Burak (2007).

Ainda sobre a estruturação da atividade, infere-se que ela favoreceu a organização do conteúdo a ser ensinado, o que permitiu: estabelecer uma ordem de exploração do conteúdo, identificar os subsunçores relevantes à aprendizagem do conteúdo e diagnosticar as informações que os alunos já sabiam, prevendo possíveis relações entre o novo conteúdo e suas estruturas cognitivas, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

A experiência com Modelagem Matemática permitiu, também, detectar a mobilização, por parte de alguns alunos, de conceitos relacionados às noções de coordenadas de pontos do Plano, área de figuras planas e interpretação da inclinação da reta no gráfico de uma função polinomial do 1º grau. Em relação aos demais alunos, que apresentaram dificuldades em algumas fases da construção do modelo, tais dificuldades surgiram por esses não possuírem em suas estruturas

cognitivas os conhecimentos citados, que foram adotados como âncoras para a resolução do problema proposto, ou mesmo devido aos *obstáculos*, já expostos, que foram perceptíveis durante o desenvolvimento da atividade.

Sobre a aprendizagem significativa, constata-se a sua ocorrência por meio da *aprendizagem por descoberta*, que segundo Ausubel, supõe que o aluno descubra “sozinho” determinado conceito e seja capaz de conectá-lo a conceitos subsunçores preexistentes em sua mente.

Nesse contexto, é válido ressaltar que os alunos desconheciam a relação existente entre o gráfico da velocidade – $v \times t$ – e o espaço percorrido por um corpo, e a *descoberta* dessa relação se deu devido à *aprendizagem de conceitos*. Quando compreenderam o significado das representações dos gráficos da velocidade e da posição – retas e parábola, respectivamente – foram capazes de articular essas informações na solução do problema.

A articulação dessas informações, por sua vez, foi favorecida por uma *aprendizagem por combinação*, em que os alunos tiveram que organizar uma determinada quantidade de informações – acerca do conceito de área, velocidade, gráfico, etc. – integrá-las na estrutura cognitiva existente e reorganizar essas informações de forma *combinada*. Dessa forma, perceberam a relação entre velocidade e tempo, dentro do problema, e como essa relação influenciava na posição do foguete. Com isso, puderam constatar que a área da região plana delimitada pelo gráfico da velocidade é numericamente igual ao comprimento do espaço percorrido pelo foguete na subida, ou seja, a altura atingida.

A conclusão desta pesquisa é que a Modelagem Matemática, da forma como foi abordada, contribuiu para um aprendizado significativo, pois possibilitou que, boa parte dos alunos, conseguisse fazer relações entre seus conhecimentos prévios e os novos conhecimentos, o que forneceu resultados positivos antes não alcançados. Além disso, promoveu a interdisciplinaridade entre Matemática e Física que resultou numa parceria frutífera para ambos os professores, e favoreceu dar um significado concreto para o estudo de funções, que é pouco abordado na EJA – segundo levantamento feito, que mostrou não haver trabalhos nesse assunto. Assim, essa atividade possibilitou a reflexão sobre o modo como se apresentam e ensinam um conteúdo, e a influência dessas ações no aprendizado dos alunos.

Acrescenta-se ainda, que acerca da Educação de Jovens e Adultos é importante que se pense em ações que possibilitem a esses alunos aprenderem de forma significativa o que lhes é ensinado. Ficou claro que, para se alcançar resultados satisfatórios, têm-se que trabalhar muito nessa questão. Espera-se que esta pesquisa possa contribuir para esse fim, e reitera-se que o autor desta pesquisa sentiu-se estimulado a desenvolver outros trabalhos similares, uma vez que os aspectos favoráveis foram significativos.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle e DIAS, Michele Regiane. Um Estudo sobre o uso da modelagem matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. *Bolema*, v. 17, n. 22, pp. 19-35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle e BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Revista Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, pp. 483-498, 2005.

ALMEIDA, Lourdes Werle; SILVA, Karina Pessôa e VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

ARDENGHI, Marcos José. *Ensino aprendizagem do Conceito de Função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. São Paulo, 2008. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald e HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

ÁVILA, Alicia. Um currículo de Matemática para a Educação Básica de adultos: dúvidas, reflexões e contribuições. In: Jornada de reflexão e capacitação sobre matemática na educação básica de jovens e adultos. *Anais...*, Rio de Janeiro, 1995.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: 24ª RA da ANPED. *Anais...*, Caxambu, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática no ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, *Anais...*, Recife, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. 2.ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BELTRÃO, Maria Eli Puga. *Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações – Teoria e Prática*. São Paulo, 2009. Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*. Blumenau: Furb, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. 30 anos de Modelagem na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria – Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v. 2, pp. 7-32, 2009.

BOGDAN, Robert e BIKLEN, Sari Knoop. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Proposta Curricular para a educação de jovens e adultos: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série: Introdução*. v. 1. Brasília: MEC, 2002a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Proposta Curricular para a educação de jovens e adultos: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série: Matemática, Ciências, Arte e Educação Física*. v. 3. Brasília: MEC, 2002b.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. v. 2. Brasília: MEC, 2006.

BURAK, Dionísio. *Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série*. Rio Claro, 1987. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista.

BURAK, Dionísio. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Campinas, 1992. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas.

BURAK, Dionísio. A modelagem matemática e a sala de aula. In: I EPMEM – Encontro Paranaense da Modelagem em Educação Matemática. *Anais...*, Londrina, 2004.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática: pontos que justificam sua utilização no ensino. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais...*, Belo Horizonte, 2007.

CARVALHO, Dionne Luchesi de. *A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar*. Campinas, 1995. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. *Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio*. Belém, 2005. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Pará.

CRESWELL, John W. *Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRUZ, Cristiano Cordeiro. A teoria Cognitivista de Ausubel. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Unicamp. Disponível em: <http://www.robertexto.com/archivo3/a_teorias_ausubel.htm>. Acesso em 18/02/2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus, 1986.

FECCHIO, Roberto. *A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na Introdução do conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia*. São Paulo, 2011. Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes e JUNIOR, Guataçara dos Santos. Modelagem matemática: um recurso pedagógico para o ensino de matemática. *Revista Práxis*, ano iv, v. 8, pp. 21-29, 2012.

FERRUZZI, Elaine Cristina e ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria – Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v. 2, pp. 117-134, 2009.

FERRUZZI, Elaine Cristina e ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Interações dialógicas em atividades de Modelagem Matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación em Ciencias*, v. 7, n. 1, pp. 1-17, 2012.

FONSECA, Maria Conceição Ferreira Reis. *Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições*. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

FREITAS, Adriano Vargas. *Educação Matemática e Educação de Jovens e Adultos: estado da arte de publicações em periódicos (2000 a 2010)*. São Paulo, 2013. Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

HERNÁNDEZ, Fernando. *Transgressão de mudança na educação: os projetos de trabalho*. Porto Alegre, Artmed, 1998.

HORTA, Leonardo Telles. *Por que jovens e adultos retornam à escola?*. Belo Horizonte, 1999. Monografia - Universidade Federal de Minas Gerais.

JANUÁRIO, Gilberto. *Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos: análise de prescrições na perspectiva cultural da Matemática*. São Paulo, 2012. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MAIA, Diana. *Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional*. São Paulo, 2007. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MAZZANTI, David Luiz. *Educação de jovens e adultos: uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas*. São Paulo, 2008. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti e MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. *Modelagem em Educação Matemática*. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MONTEIRO, Alexandrina. *O ensino de matemática para adultos através do método da modelagem matemática*. Rio Claro, 1991. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999, pp.151-165.

OLIVEIRA, Nanci de. *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo, 1997. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. *O uso da modelagem para o ensino da função seno no ensino médio*. São Paulo, 2014. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SÃO PAULO. Secretaria Municipal de Educação. *Caderno de Orientações Didáticas para EJA: Matemática*. SME, 2010a.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. SME, 2010b.

SILVEIRA, Everaldo. *Modelagem Matemática em Educação Matemática no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações*. Curitiba, 2007. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Paraná.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

STEWART, James. *Cálculo*. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. Título original: Calculus. 6.ed. Americana. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Errata

Achamos por bem ressaltar que todos os sujeitos da pesquisa assinaram o *termo de autorização de participação na pesquisa*, solicitado pelo Comitê de Ética em Pesquisa, que permite ao pesquisador apresentar os resultados do estudo desde que garantido o anonimato dos participantes.

Parecer de aprovação da pesquisa dado pelo Comitê de Ética em Pesquisa

Título da Pesquisa: Educação de Jovens e Adultos: uma experiência com a modelagem matemática

Pesquisador Responsável: LUIS CARLOS PEREIRA

Versão: 1

CAAE: 39285714.2.0000.5482

Submetido em: 16/10/2014

Instituição Proponente: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

Situação da Versão do Projeto: Aprovado

Número do Parecer: 930.761

Data da Relatoria: 30/11/2014