MARIA SUELI GOMES SALDANHA

ANÁLISE DE UMA INTERVENÇÃO DIDÁTICA SOBRE DESIGUALDADES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

MARIA SUELI GOMES SALDANHA

ANÁLISE DE UMA INTERVENÇÃO DIDÁTICA SOBRE DESIGUALDADES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação do(a)* ***Prof(a). Dr(a****) Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.*

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

____

Profª Drª Maria Cristina de Souza Albuquerque Maranhão (Orientadora)

____

Profª Drª Bárbara Lutaif Bianchini

____

Profª Drª Leila Zardo Puga

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado condições de desenvolver este trabalho.

A minha orientadora Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, pela disponibilidade e incentivo que sempre demonstrou e pela forma interessada, desafiante e exigente com que acompanhou este trabalho.

Às Professoras Doutoras Bárbara Lutaif Bianchini e Leila Zardo Puga, por aceitarem o convite para participar da banca examinadora desta dissertação e pelas contribuições valiosas durante a qualificação.

À colega Margarete da Silva Hungria Castro Clara com quem partilhei idéias e desafios. O seu companheirismo foi essencial para realizar e prosseguir este estudo.

Aos colegas do grupo de orientandos da Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão que contribuíram com valiosas sugestões no desenvolvimento deste trabalho.

Às colegas Márcia e Maristela, pelo apoio e amizade que ao longo do Mestrado fomos partilhando.

A meus pais, marido e filhos, por todo apoio que sempre me deram na realização deste trabalho e, por dividirem comigo muitas de minhas responsabilidades, para que eu pudesse ter a tranqüilidade de desenvolver esta pesquisa.

A meus alunos que, com boa vontade e seriedade, participaram desta pesquisa, sem o que o presente trabalho não seria possível. A eles, dedico este trabalho.

EPÍGRAFE

Oração do Professor

Dai-me, Senhor, o dom de ensinar.
Dai-me esta graça que vem do amor,
Mas, antes de ensinar, Senhor.
Dai-me o dom de aprender.
Aprender a ensinar.
Aprender o amor de ensinar.
Que o meu ensinar seja simples, humano e alegre, como o amor.
De aprender sempre.
Que eu persevere mais no aprender do que ensinar.
Que a minha sabedoria ilumine e não apenas brilhe.
Que o meu saber não domine ninguém, mas leve a verdade.
Que meus conhecimentos não produzam orgulho.
Mas cresça e se abasteçam da humildade.
Que minhas palavras não firam e nem sejam dissimuladas,
Mas animem as faces de quem procura a luz.
Que minha voz nunca assuste,
Mas seja a pregação da esperança.
Que eu aprenda que quem não me atende,
Precisa mais de mim,
E que nunca lhe destine a presunção de ser melhor.
Dai-me, Senhor, também a sabedoria do desaprender,
Para que eu possa trazer o novo, a esperança,
E não ser um perpetuador das desilusões.
Dai-me, Senhor, a sabedoria do aprender.
Deixai-me ensinar para distribuir a sabedoria do amor.

Antonio Pedro Schlindwein

RESUMO

Esta pesquisa realizada na abordagem qualitativa, teve como objetivo analisar o processo ensino-aprendizagem, envolvendo professor, aluno e saber matemático na resolução de problemas, enfocando as desigualdades e inequações logarítmicas. Para atingir este objetivo, foram elaboradas seis situações didáticas, com base na noção dialética-ferramenta-objeto da pesquisadora francesa Régine Douady. Essas mesmas noções foram utilizadas nas análises dos dados. O público-alvo constitui-se de alunos e professora-pesquisadora de uma classe da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Vila Nova Conceição da cidade de São Paulo. Os principais instrumentos utilizados na coleta dos dados foram gravações em fita cassete dos diálogos entre professora-pesquisadora e o grupo de alunos, professora-pesquisadora e o grupo sala e produções escritas dos alunos na resolução dos problemas propostos. A conclusão obtida foi que a abordagem desenvolvida pela seqüência didática proposta favoreceu a aprendizagem das desigualdades e inequações logarítmicas e, também, oportunizou uma reflexão sobre a prática de ensino da professora-pesquisadora.

Palavras-chave: desigualdades e inequações logarítmicas, álgebra, análise das situações didáticas.

ABSTRACT

The purpose of this research, done according to the qualitative approach, was to analyze the teaching-learning process, involving the teacher, the student and the mathematical knowledge in the solving of problems, focusing on inequalities and logarithmic inequations. In order to reach this goal, six didactic situations were elaborated, based on the dialectic notion tool-object of the researcher Régina Douady. These same notions were used in the data analysis. The target-public was constituted by students and a teacher-researcher from the 10th grade of a private school in the city of São Paulo. The main instruments used in the data collection were recordings on tape of the dialogues among the teacher-researcher and the group of students, dialogues among teacher-researcher and classmates-group and the written work of the students in the solving of the proposed problems. The conclusion obtained was the approach developed by the proposed didactic sequence that favored the learning of inequalities and logarithmic inequations and, also, made possible to reflect about the teaching practice of the teacher-researcher.

Keywords: inequalities and logarithmic inequations; algebra; analysis of didactic situations

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA E QUADRO TEÓRICO................................ 15

1.1 Problemática 15

1.2 Quadro Teórico 20

CAPÍTULO 2 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS................................ 25

2.1 Introdução 25

2.2 Sobre a seleção dos problemas 29

2.3 Descrição dos problemas e objetivos 38

2.3.1 Problema 1 38

2.3.2 Problema 2 39

2.3.3 Problema 3.. 40

2.3.4 Problema 4 41

2.3.5 Problema 5 e Problema 6 41

CAPÍTULO 3 – ESTUDOS PRELIMINARES: O CONTEXTO ESCOLAR......... 45

3.1 Caracterização da escola.. 45

3.2 Recursos Didáticos 51

3.3 Livro Didático adotado pelo colégio no Ensino Médio 52

3.4 Método de Ensino do professor... 57

CAPÍTULO 4 – RELATO DA REALIZAÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS EM CLASSE.. 59

4.1 Introdução 59

4.2 Desenvolvimento e análise das situações didáticas 66

4.2.1 Problema 1 66

4.2.1.a. Faça uma análise da informação x < 10000 67

4.2.1.b. Para um tempo igual a 2 anos, determine quantos hectares foram desmatados 77

4.2.1.c. Determine o tempo para um desmatamento de 8750 hectares 77

4.2.1.d. No período de 6 meses a 1 ano, qual será a área desmatada? 81

4.3. Análise Global do problema 1 84

CAPÍTULO 5 – REFLEXÕES DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA 87

CONSIDERAÇÕES FINAIS 93

REFERÊNCIAS 98

ANEXOS 104

INTRODUÇÃO

Atualmente, diante das reflexões provocadas pelo desenvolvimento social, o impacto das novas tecnologias da informação, as reformas curriculares e as investigações realizadas pela Psicologia Genética, quanto à compreensão dos processos de aprendizagem, vêm-se delineando uma nova concepção do ensino da Matemática.

Segundo os PCN:

> Para que ocorram as inserções dos cidadãos no mundo do trabalho, no mundo das relações sociais e no mundo da cultura e para que se desenvolva a crítica diante das questões sociais, é importante que a Matemática desempenhe, no currículo, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.28)

Nessa perspectiva, é preciso que o ensino e a aprendizagem da matemática não sejam um simples acúmulo de conhecimentos, mas devem contribuir para que o aluno adquira competências que se integrem aos conhecimentos acadêmicos.

É necessário salientar que usamos o termo "competência" no sentido empregado por Perrenoud (1999), "uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles".

Neste contexto, o professor de matemática deve refletir a respeito de sua concepção sobre o que é ensinar ou, ainda, sobre sua prática.

D'Ambrósio, ao comentar a importância do papel do professor de matemática no processo educativo, relata:

> O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos. (D' Ambrósio, 1997, p. 79-80)

Na busca de novos caminhos que possam atender a essa mudança e permitir que eu reflita sobre a minha atual prática, surge esta investigação.

A pesquisa aqui apresentada é relativa à mudança na prática pedagógica, visando a analisar o processo ensino e aprendizagem, envolvendo professor, aluno e saber matemático, na resolução de problemas enfocando desigualdades e inequações logarítmicas.

Esta pesquisa foi realizada na cidade de São Paulo, em um colégio da rede particular, local de trabalho da professora-pesquisadora. Participaram dela alunos da professora-pesquisadora do 2.º ano do Ensino Médio.

Para a realização do estudo, tomamos como referencial teórico, a noção de ***dialética-ferramenta-objeto*** e ***interação entre domínios*** desenvolvida pela pesquisadora francesa Règine Douady.

Segundo Douady (1984), o conhecimento matemático constrói-se em situações em que a sala de aula simula uma sociedade de investigadores em atividade.

De acordo com Ponte *et al.*, pesquisadores portugueses em Educação Matemática:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino e aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão de argumentação com os seus colegas e professor. (Ponte et al, 2005, p. 23).

Assim, construímos situações de classe, baseados em problemas elaborados ou adaptados por nós, com a finalidade de levar os alunos à formulação de conjecturas e suas respectivas validações.

É necessário salientar que usamos o termo validação no sentido empregado por Douady (1984) e que utilizamos a noção dialética-ferramenta-objeto tanto para a elaboração dos problemas, como para a análise das situações didáticas.

Faremos, aqui, a descrição desta pesquisa, procurando expor de forma sucinta os tópicos principais de cada capítulo.

O capítulo 1 foi dividido em dois tópicos: a problemática e o quadro teórico desta pesquisa. Na problemática, apresentamos a motivação pela escolha do tema, a questão de pesquisa e seu objetivo. No quadro teórico, discorremos sobre a dialética-ferramenta-objeto e interação entre domínios da pesquisadora francesa Règine Douady (1984).

No capítulo 2, descrevemos os procedimentos utilizados nesta pesquisa que foram divididos em duas fases: estudos preliminares e desenvolvimento das situações propostas. Neste capítulo, relatamos a trajetória realizada pela professora-pesquisadora na elaboração, seleção ou reformulação dos seis problemas propostos aos alunos, bem como as contribuições oferecidas pelo grupo de orientandos da professora doutora Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

No capítulo 3, apresentamos os estudos preliminares nos quais descrevemos elementos pertinentes à escola, tais como: o programa escolar, o programa de matemática, recursos da escola, método de ensino do professor-pesquisador deste trabalho e o livro didático adotado pela escola.

No capítulo 4 estão descritas as situações didáticas realizadas na sala de aula, a análise parcial e final do problema 1. As análises foram realizadas confrontando-se as situações didáticas com nosso quadro teórico, a dialética-ferramenta-objeto e as interações entre domínios de Règine Douady.

O capítulo 5 aborda as reflexões da professora-pesquisadora e seus alunos ao vivenciarem esta pesquisa.

Nas Considerações Finais, respondemos à questão de pesquisa, bem como as sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E QUADRO TEÓRICO

1.1 Problemática

Por trabalhar há vinte anos com o Ensino Médio e Fundamental, percebo que, atualmente, cada vez mais torna-se difícil motivar os alunos para aprendizagem da Matemática.

É comum ouvir deles: “Por que estou estudando isso?” “Qual é o significado deste estudo na escolha de minha carreira?” “Para que serve?”

Na busca de novos caminhos facilitadores para a aprendizagem dos alunos e que permitissem refletir sobre minha atual prática pedagógica, matriculei-me no curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Após algumas leituras sobre Tendências Pedagógicas no ensino da Matemática, percebo que minha atual prática tem características similares às da Tendência Tecnicista Mecanicista. Segundo Fiorentini (1995), esta Tendência procura reduzir a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. Na verdade, esse tecnicismo mecanicista procura enfatizar o fazer, em detrimento de outros aspectos importantes, como o compreender, o refletir, o analisar e o justificar/provar.

Estudos mostram que esta prática adquirida e vivenciada pouco tem contribuído na aprendizagem dos alunos.

Segundo Fiorentini:

> [...] a aprendizagem efetiva da Matemática não consiste apenas no desenvolvimento das habilidades (como de cálculo ou resolução de problemas) ou na fixação de alguns conceitos através da memorização ou da realização de uma série de exercícios, como entende a pedagogia tradicional ou tecnicista. O aluno aprende significamente matemática, quando consegue atribuir sentido e significado às idéias matemáticas [...] e, sobre elas é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. (Fiorentini, 1995, p.32)

O enfoque excessivo nos procedimentos algorítmicos que venho realizando em minhas aulas, tem contribuído para que a maioria dos alunos sinta-se incapaz de compreender a Matemática. Os alunos acreditam que sua compreensão é privilégio de poucos. Parafraseando-os, a Matemática é para os “inteligentes”.

No desejo de mudar esta crença ou visão, por acreditar que ensinar é muito mais que transmitir conhecimentos, surge este trabalho, com a contribuição do grupo de estudos do Programa de Estudos Pós Graduados da PUC-SP designado GEPEA – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, no qual estou inserida.

O trabalho que proponho realizar, é um relato de experiência relativo à mudança na prática pedagógica, visando a analisar o processo ensino e aprendizagem envolvendo professor, aluno e saber matemático, na resolução de problemas, enfocando desigualdades e inequações logarítmicas.

Este estudo terá como suporte a Educação Algébrica, pois além de tratar-se de tema presente no cotidiano escolar, já que é parte integrante dos PCN (1998) e PCNEM (1999), também, tem sido objeto de análise por alguns pesquisadores em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Dentro da Educação Algébrica, a escolha por inequações deu-se por dois motivos: as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão das inequações e a importância deste tópico como ferramenta na Matemática Pura e Aplicada.

Segundo Tsamir *et al*. (1998, p. 129), “[...] inequações recebem relativamente pequena atenção e são usualmente discutidas somente nos últimos anos da escola secundária”.

A opção pela abordagem via resolução de problemas é pertinente, considerando que as pesquisas destacam a importância desse recurso no ensino e aprendizagem da Matemática.

A UNESCO, no fim da década de 1990, por meio da “Declaração Mundial sobre Educação para Todos”, menciona que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem. *O National Coancil of Teachers of Mathematics* (NCTM) de 1991, afirmou que a resolução de problemas deve ser o foco central do currículo da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e Médio (1998 e 1999) apontam a resolução de problemas como o eixo norteador do processo ensino aprendizagem da Matemática.

Segundo os PCNEM:

> [...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um pensar matemático. Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade na resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCNEM, 1999, p. 253-254)

Os problemas propostos nesta pesquisa objetivaram promover, nos alunos, uma atitude investigativa. Pretende-se que o aluno, ao se engajar na resolução dos problemas envolvendo desigualdades e inequações logarítmicas, possa formular conjecturas, elaborar hipóteses e argumentos para sustentá-las.

Segundo Braumann:

> [...] Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (Braumann *apud* Ponte *et al.*, 2005, p.19).

Para situar o objetivo deste trabalho entre as pesquisas de Educação Matemática, realizei uma busca de Dissertações e Teses no site da Capes, na PUC-SP, Unicamp, USP e em outras Universidades, que estivessem de alguma forma relacionadas com meu foco de pesquisa: o ensino de inequações logarítmicas.

A respeito de inequações foram encontradas três dissertações, uma da autoria de Armando Traldi Junior, intitulada “Sistema de Inequações do 1º grau – uma abordagem no processo ensino-aprendizagem, focando Registros de Representação” outra de autoria de Alzir Fourny Marinho, sob o título “Inequação: a construção do seu significado”, e uma outra de autoria de Gerson Martins Fontalva, sob o título, “Um Estudo sobre Inequações: Entre alunos do Ensino Médio”. Esta dissertação apresenta algumas similaridades com este trabalho, o interesse por inequações e a utilização do mesmo quadro teórico adotado por nós. Além disso, o autor foi orientando da professora doutora Maria Cristina Souza Albuquerque Maranhão e participou do grupo de pesquisa GEPEA.

Sobre logaritmos foi encontrada uma única dissertação, da autoria de Mônica Karrer, intitulada “Logaritmos – Propostas de uma Seqüência de ensino utilizando a calculadora”. A autora, em seu trabalho, evidencia alguns obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de logaritmos.

Além dos trabalhos citados acima, encontramos uma publicação sobre logaritmos, elaborada por um grupo de professores, destinado ao projeto Construindo Sempre Matemática – Ensino Médio em parceria com a Secretaria de Estado de Educação de São Paulo. Dentre os professores envolvidos na elaboração desse material, destacamos a participação das professoras Bárbara Lutaif Bianchini e Leila Zardo Puga, ambas pesquisadoras do grupo GPEA da PUC-SP. O projeto teve como objetivos específicos: capacitar diretamente, professores que atuavam nas escolas de Ensino Médio da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo e criar condições para que os beneficiários dessa capacitação constituíssem grupos de referência para implantação dos PCN de ensino médio na área de Matemática.

Esta publicação é composta de três módulos intitulados: Logaritmos, Interfaces com a Economia II e Sistema Lineares I. A elaboração do material visava a aperfeiçoar a prática docente e a melhoria da aprendizagem. Apesar do potencial em se constituir em material de referência para nosso trabalho, esta publicação não inclui o estudo das inequações logarítmicas.

Desta forma, constatamos uma carência de pesquisas, tanto na abordagem de inequações como na de logaritmos. Esta carência reforça a efetivação deste trabalho, pois ele pode representar uma contribuição na área.

Acreditando que um processo educativo deva oferecer ao aluno a oportunidade de vivenciar a construção de seu próprio conhecimento, desenvolvemos este trabalho que teve como suporte teórico a dialética-ferramenta-objeto da pesquisadora francesa Règine Douady.

Neste quadro teórico, esta pesquisa objetiva analisar as situações didáticas desenvolvidas ao longo das aulas da professora-pesquisadora na resolução de problemas, envolvendo desigualdades e inequações logarítmicas.

Ao perseguirmos este objetivo, tivemos também as seguintes pretensões:

- oferecer a oportunidade para que nossos alunos formulem conjecturas, elaborem hipóteses e argumentem para sustentá-las.
- readaptar as situações didáticas planejadas no contexto das aulas, em face das necessidades e das dificuldades dos alunos durante a pesquisa.

1.2 Quadro Teórico

Segundo Douady (1984), no modelo pedagógico construtivista social, o conhecimento matemático constrói-se dentro de uma situação em que a classe simula uma sociedade de investigadores em atividade. Neste modelo, encontrei o caminho para uma nova prática de ensino, que pode responder aos objetivos de minha pesquisa.

Para Gómez (1986), esta posição do construtivismo social em que os estudantes constroem seu próprio conhecimento, como investigadores de matemática, ao experimentar, formular conjecturas, fazer hipóteses, argumentar para sustentar teses e validar o conhecimento individual para construir um conhecimento social (dentro da sala de aula) que se aproxime do conhecimento social (o aceito pela comunidade de matemáticos), está sendo cada vez mais defendida pelos educadores em Educação Matemática.

Nesta metodologia, o papel do professor ganha novas dimensões. Caberá a ele organizar a aprendizagem, tanto na escolha dos problemas que possibilitem a construção do conhecimento pelo aluno como no estabelecimento das condições para realização das atividades. Ele terá também a função de mediador ao promover discussões na sala de aula, onde o aluno poderá expor sua solução, questionar e contestar.

Segundo Ponte *et al.*:

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. (Ponte *et al.*, 2005, p. 41)

Para a organização das atividades e análise das situações didáticas, tomaremos como base a dialética-ferramenta-objeto e a interação entre domínio da pesquisadora Douady (1984).

Para ela, o conhecimento matemático constrói-se em situações didáticas, envolvendo o tripé professor, aluno e saber, em que a sala de aula simula uma sociedade de investigadores em atividade. Estas situações contribuirão para que o aluno construa seu próprio conhecimento, na medida que formula conjecturas, hipóteses e argumentos para sustentar sua tese e validar seu conhecimento.

Segundo a pesquisadora, a dialética-ferramenta-objeto permite propor uma metodologia de trabalho em sala de aula, onde os alunos ao simularem uma investigação constroem e consolidam seu conhecimento.

O ponto de partida desta metodologia é a existência de um conhecimento prévio (antigo) que, por sua vez, terá relação com o novo conhecimento que se irá construir. Este conhecimento prévio (antigo), que é objeto de saber, funciona como ferramenta de novos saberes.

Maranhão vê nas obras de Douady:

> [...] como exemplos de problemas adequados a essa fase, situações engendradas, visando à criação de novos conhecimentos matemáticos. O aluno deve responder a elas, pelo contrato didático estabelecido com o professor, sem que este ensine diretamente aquela solução. (Maranhão, 2002, p.116)

Ao se propor um problema com as características acima citadas, espera-se que o aluno tente resolvê-lo, utilizando seus conhecimentos antigos. No entanto, estes conhecimentos serão insuficientes para se resolver o problema por completo e novas questões acabam sendo colocadas em jogo. Estas levam os alunos a procurar novos conhecimentos para resolução do problema. Reconhece-se aí o início de uma nova fase de ação denominada pesquisa.

Esta pesquisa possibilitará ao aluno fazer algumas descobertas, que serão discutidas em sala de aula, buscando sua validação ou refutação. Neste momento, o professor poderá criar debates sobre os conhecimentos antigos que estão sendo utilizados, e a respeito dos novos que estão sendo gerados implicitamente. Esta fase é denominada de explicitação.

Segundo Maranhão:

> [...] o que se quer dizer com o termo conhecimentos implícitos é que o pesquisador ou professor podem reconhecer os conhecimentos novos que os alunos estejam criando. Os alunos, por sua vez, sabem que é algo novo, mas não podem explicar completamente do que se trata. (Maranhão, 2002, p.117)

No decorrer destas fases, o professor poderá se dar conta de que a situação corre o risco de se bloquear. Se ele não intervier ou se perceber tarde demais, terá de bloqueá-la. Então, ele a retoma, segundo sua análise da situação didática e decide intervir ou não. Se necessário for, deverá escolher o momento e a forma de intervenção, sempre respeitando a liberdade de manobra do aluno.

A fase denominada institucionalização é o momento em que o professor ressalta os conhecimentos que devem ser retidos e explicita as convenções em uso. Se for pertinente, explicitam-se definições, teoremas e demonstrações.

> A institucionalização contribui para dar *status* de objeto matemático autônomo aos novos conhecimentos, já que são destinados a funcionar, posteriormente, como antigos. Dado que os conhecimentos dos alunos não são os mesmos e que as ferramentas mobilizadas se difundem pela classe, sem se saber ao certo como cada aluno se conduziu, não se pode garantir a compreensão homogênea entre todos os alunos do que é institucionalizado, isto é, não se pode garantir que todos reajam da mesma forma a essa oficialização. Garante a progressão de alguns e integra o saber cultural da classe. (Maranhão, 2002, p.120)

Na fase de reinvestimento, os alunos resolvem problemas objetivando provocar o funcionamento, como ferramentas explícitas, do que foi institucionalizado. Estes problemas podem ser simples ou complexos e devem colocar apenas em jogo, o que é conhecido.

De acordo com Douady (1984), os problemas propostos nesta fase destinam-se a desenvolver hábitos, práticas e integrar o saber social com o saber do aluno.

A última fase desta metodologia é denominada novo problema. Nesta, os alunos são colocados em situações mais complexas, que envolvem outros conceitos e inicia-se, então, um novo ciclo. Assim, os conhecimentos novos adquirem o *status* de antigos. De acordo com Douady (1984), muitos ciclos podem ser necessários para a aprendizagem de um conceito ou de uma propriedade.

Conforme a autora citada, os problemas propostos aos alunos pelo professor deverão envolver, pelo menos, dois domínios, tais como: físico, geométrico, numérico, gráfico ou outros, para que um sirva de referência ao outro, possibilitando meios de validação pela ação. A interação entre domínios traduz a intenção de explorar o fato de que a maior parte dos conceitos pode vir por meio de diversos domínios.

> Para que as fases da dialética-ferramenta-objeto funcionem, como essa pesquisadora propõe não se pode prescindir da compreensão da noção de interação entre domínios, pois esta é a fase organizadora daquelas. Os *domínios são escolhidos de modo que um sirva de referência ao outro*, a fim de tornar viável o uso de ferramentas adequadas à solução de cada problema e a validação do que se produz como conhecimento novo pela ação dos próprios alunos. Esta escolha deve ser coerente com a problemática da pesquisa. (Maranhão, 2002, p.129)

Para interpretar uma situação didática envolvendo aluno, professor e saber, Douady recorre à Teoria das Situações Didáticas do pesquisador francês Guy Brousseau (1986).

Conforme este autor, uma situação didática é formada por um conjunto de mecanismos que se estabelece entre professor, aluno e saber diante do desenvolvimento de uma atividade que se volta ao ensino e aprendizagem de um conhecimento matemático.

Para Brousseau, o envolvimento do aluno na construção do conhecimento matemático dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem por meio de uma situação didática.

Brousseau define uma situação didática quando cita:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (Brousseau *apud* Freitas 2002, p. 67)

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 Introdução

Para analisar as situações didáticas desenvolvidas ao longo das aulas da professora-pesquisadora, foram elaborados e adaptados seis problemas envolvendo inequações logarítmicas, segundo o quadro teórico deste trabalho.

O público-alvo desta pesquisa constituiu-se de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de São Paulo, local de trabalho da professora-pesquisadora.

Os problemas propostos foram resolvidos nas aulas da professora-pesquisadora, pois o tema abordado fazia parte do programa de matemática deste ano.

A opção por estas turmas foi em razão da professora-pesquisadora ter sido professora de Matemática de grande parte desses alunos na 6ª série do Ensino Fundamental e, também, nos 1º e 2° anos do Ensino Médio.

Além disso, por existir uma relação de confiança e respeito entre alunos e professora-pesquisadora.

Antes de iniciar a pesquisa com os alunos, a professora-pesquisadora encaminhou uma carta à direção da escola solicitando autorização para sua realização.

A diretoria autorizou, porém com algumas restrições, pois a professora-pesquisadora não poderia gravar as aulas em vídeo ou ter em sala de aula outra pessoa para ajudá-la.

Desse modo, a pesquisa foi desenvolvida em duas fases:

Fase 1 **Estudos preliminares**.

Descrição de elementos pertinentes à investigação sobre a escola, o programa escolar e o programa de Matemática, recursos, método de ensino do professor de matemática, livro didático e material utilizado pelo professor.

Fase 2 **Desenvolvimento das situações propostas e coleta de dados**.

Elaboramos ou adaptamos seis problemas, segundo a noção dialética-ferramenta-objeto de Règine Douady, que foram aplicados pela professora-pesquisadora em oito aulas de 45 minutos, sendo os problemas 2 e 3 realizados em duas aulas de 45 minutos em um mesmo dia, e as discussões a respeito deles na aula seguinte.

As aulas seguiram a seguinte seqüência:

a) Esclarecimento aos alunos sobre a proposta de trabalho.

Os alunos que participaram desta pesquisa já tinham conhecimento de que a professora-pesquisadora estava no momento, cursando o Mestrado em Educação Matemática. Sempre perguntavam: "*Prof*, como você foi na apresentação do trabalho?", "Que nota tirou?", "E a prova, como foi?". Quando foram convidados a fazer parte da pesquisa, ficaram muito animados e aceitaram prontamente.

A professora esclareceu que o objetivo era analisar uma mudança em sua prática pedagógica na aquisição dos conhecimentos dos alunos sobre inequações logarítmicas.

Nestas aulas, os alunos deveriam assumir o papel de investigadores na resolução dos problemas que contemplavam as inequações logarítmicas, e a professora, assumiria o papel de gestora das situações de classe, ou seja, formaria grupos e condições necessárias para que estes tivessem meios de obter, por eles mesmos, os resultados dos problemas solicitados. O objetivo da proposta foi oferecer momentos, nos quais os alunos pudessem ser investigadores na resolução de problemas, sem perder de vista a ampliação da compreensão das noções matemáticas envolvidas no problema.

b) Formação de grupos, elegendo um redator para cada grupo. Segundo Onuchic e Allevato:

> Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as idéias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas idéias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalhos.
>
> Quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e compreensão relacional. (Onuchic e Allevato, 2004, p. 220)

c) Entrega do problema, cada um deveria estar em uma folha de papel diferente.

d) Resolução dos problemas pelos alunos. Eles trabalharam a lápis e não podiam apagar as resoluções. As folhas eram recolhidas pela professora-pesquisadora.

É necessário mencionar que embora a professora-pesquisadora tivesse combinado com os alunos que eles não deveriam apagar suas resoluções, alguns grupos, de início, não cumpriram o acordo. A pesquisadora ao perceber o não cumprimento, voltou ao grupo-sala e comunicou aos alunos a importância de seus registros para sua pesquisa. Desta vez, eles acataram o pedido.

e) O redator de cada grupo teve a missão de apresentar as resoluções feitas por seu grupo na lousa e logo após entregar a folha de resposta.

f) Discussão coletiva da atividade proposta. Segundo Ponte *et al.*:

> No final de uma investigação, o balanço do trabalho realizado constitui um momento importante de partilha. Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. (...) A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. (Ponte *et al.*, 2005, p.41)

g) Alterações nas situações didáticas por parte da professora-pesquisadora, em face de necessidades e dificuldades encontradas na resolução dos problemas da pesquisa.

h) Coleta e análise dos dados.

A professora-pesquisadora gravou em fita cassete alguns diálogos realizados com os alunos e, também, a discussão geral, feita após cada atividade. Além das gravações, ao término de cada aula, foram registrados em um caderno as observações consideradas mais importantes no desenvolvimento das atividades. Além dos dados acima citados, para a análise deste trabalho, foram incluídas as produções escritas dos alunos, que realizaram a resolução dos problemas nas aulas.

A análise deste estudo foi feita, confrontando-se o quadro teórico da pesquisa com as situações didáticas realizadas.

Na análise dos dados, alguns momentos, de vivência das aulas na resolução do problema 1 foram selecionados. Esta escolha justifica-se por considerarmos estes momentos suficientes na representação das ocorrências de classe e sua reflexão sobre elas.

Vale ressaltar que, embora aulas similares tenham sido desenvolvidas nas duas turmas do 2º ano do Ensino Médio pela professora-pesquisadora, as análises do estudo foram enfocadas na turma A1.

A escolha desta turma justifica-se por considerarmos uma classe com maior dificuldade quanto à aprendizagem da Matemática.

2.2 A seleção dos problemas

Uma vez definida a noção dialética-ferramenta-objeto como ferramenta teórica, tanto na análise como no planejamento das situações didáticas, partimos para a seleção dos problemas.

Para Douady (1984), qualquer problema em uma situação de aprendizagem deve responder às seguintes condições:

- o enunciado (contexto e perguntas) deve ter sentido para os alunos;

- este enunciado deve envolver conhecimentos anteriores, mas, ao mesmo tempo, oferecer uma resistência para que o aluno, ao questionar os conhecimentos antigos, construa o novo conhecimento, as inequações logarítmicas;
- o problema deve ser formulado, com preferência, em dois domínios;
- os conhecimentos visados pela aprendizagem são instrumentos adaptados ao problema.

Seguindo essas condições, a linguagem utilizada nestes problemas é informal – a mais próxima da utilizada nas aulas de matemática, na série em que a pesquisa se realizou.

Para a seleção dos problemas, foi feita uma consulta a alguns livros didáticos de matemática do 1º ano do Ensino Médio, a fim de procurar aqueles que contemplassem o quadro teórico de nossa pesquisa. Esta seleção foi realizada pela professora-pesquisadora em conjunto com a colega Margarete da Silva Hungria Castro Clara, integrante do grupo GEPEA, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Após a seleção, os problemas foram apresentados ao grupo de orientandos da professora doutora Maria Cristina Maranhão, integrantes de nosso grupo de pesquisa GEPEA da PUC-SP.

No grupo, foi possível verificar se os problemas elaborados ou selecionados estavam de acordo ou não com nossa proposta que, posteriormente sofreram algumas mudanças para melhor retratar o projeto de pesquisa.

A trajetória realizada pela professora-pesquisadora e a professora Margarete da Silva Hungria Castro Clara, constou da escolha inicial dos problemas, das sugestões do grupo de orientandos e orientadora, e da reelaboração dos problemas.

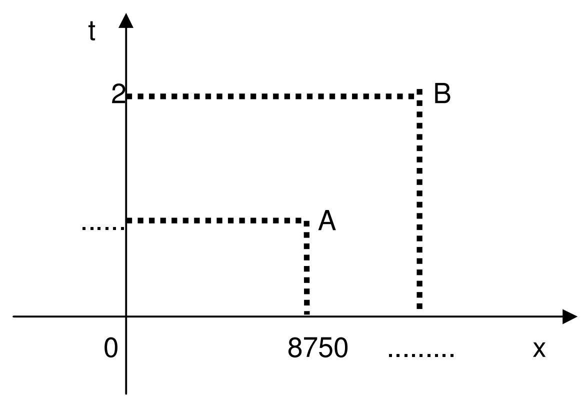
O problema 1 foi retirado do livro: Matemática - Uno Modular – apostila 6, página 28, do autor Manoel Paiva, da Editora Moderna (São Paulo) que sofreu alterações para melhor se adequar à pesquisa.

A proposta inicial para o problema 1 consistiu em:

1) Os técnicos do Ibama (Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis), avaliando a velocidade de desmatamento de certa região, relacionaram através da fórmula a seguir, o número x de hectares que serão desmatados em t anos:

$$t(x) = \log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000}, \text{ com } x < 10000$$

a) Os pontos A e B, abaixo, pertencem ao gráfico da função t(x). Complete nos pontilhados as coordenadas que faltam.



b) Para valores de t maiores que 0,5 e menores que 1, quais são os possíveis valores de x?

Diante desse problema, o grupo fez alguns questionamentos. O primeiro referiu-se ao contexto onde o problema foi apresentado, que foi pouco explorado nos itens **a** e **b**. No grupo, foi sugerido que as variáveis **t** e **x** poderiam ser designadas de tempo e hectares (t e x respectivamente), como citadas no enunciado do problema, para tornar mais “real” a problemática proposta.

Outro aspecto que mereceu atenção na análise feita pelo grupo dizia respeito ao gráfico do item **a**. Questionou-se o papel desse gráfico no problema, pois parecia forçar o aluno a um tipo de resolução, o que foge da proposta de Douady. Considerou-se, também, que existem investigações sobre erros e dificuldades de alunos no tema de funções. Mas como isto fugia da proposta desta pesquisa, deixamos este aprofundamento para futuras investigações.

Após as intervenções do grupo, o problema sofreu alterações, porque o emprego do gráfico seria possível por iniciativa do aluno. O problema foi apresentado aos alunos da seguinte forma:

1) Os técnicos do Ibama (Instituto do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis), avaliando a velocidade de desmatamento de certa região, relacionaram, através da fórmula, a seguir, o número x de hectares que serão desmatados em t anos:

$$t(x) = \log_{o,25} \frac{10000 - x}{10000}\text{, com } x < 10000$$

1a) Faça uma análise da informação $x < 10000$.

1b) Para um tempo igual a 2 anos, determine quantos hectares serão desmatados.

1c) Determine o tempo para um desmatamento de 8750 hectares.

1d) No período de 6 meses a 1 ano, qual será a área desmatada?

O problema 2 foi elaborado pela própria professora-pesquisadora e pela professora Margarete da Silva Hungria Castro Clara. Este, também, sofreu alterações para melhor se adequar ao nosso trabalho.

A proposta inicial para o problema 2 consistiu em:

Calcule os logaritmos abaixo:

a) $\log_3 27 =$................ b) $\log_3 81 =$................

c) $\log_{0,5} 4 =$................ d) $\log_{0,5} 64 =$...........

Observando os resultados obtidos, complete as sentenças:

- Nos itens a) e b), os logaritmos são dados na base ....
- A base desses logaritmos é um número ....que 1.
- Sendo assim, como 27 ....81 $\Leftrightarrow$ $\log_3 27$........$\log_3 81$.
- Nos itens **c** e **d,** os logaritmos são dados na base ....
- A base desses logaritmos é um número ....que 1.
- Sendo assim, como 4............64 $\Leftrightarrow$ $\log_{0,5} 4$........ $\log_{0,5} 64$.

O grupo contribuiu com críticas pertinentes, que nos fizeram buscar maior coerência na proposta de atividade com o referencial teórico adotado no trabalho, e nos ajudaram a perceber que essa tarefa não permitia ao aluno o direito da dúvida, pois a atividade poderia direcionar suas ações, engessando sua liberdade e fugindo do quadro teórico empregado na pesquisa.

Portanto, o problema foi reescrito, para permitir ao aluno escolher diferentes e variadas estratégias de resolução. Buscamos também evitar a inadequada "generalização precipitada" O grupo considerou que deveríamos evitar induzir o aluno a formular a idéia de uma propriedade baseada em dois exemplos.

Após estas reflexões, o problema 2 sofreu alterações e ficou, assim, formulado:

2) Responda e justifique se é verdadeira ou falsa a afirmação:
Se $3 > 2$, então, $\log_a 3 > \log_a 2$, para **a** pertencente ao conjunto dos números reais.

A seguir o problema 3 foi elaborado pela professora-pesquisadora em conjunto também com a professora Margarete da Silva Hungria Castro Clara.

Em nossas reflexões, esse problema deveria oportunizar ao aluno momentos de reflexão das conjecturas propostas por eles sobre o problema anterior, ou seja, o problema 2.

Segundo Ponte et al (2005) existe uma tendência dos alunos aceitarem as conjecturas depois de terem verificado apenas um número reduzido de vezes.

Além disso, o conhecimento limitado dos números reais pelos alunos poderia prejudicar a construção dessas conjecturas.

Portanto, a nosso ver, o problema deveria proporcionar uma investigação mais sistematizada, levando o aluno à reavaliação das conjecturas propostas inicialmente.

Ao conversar com nossa orientadora a respeito de nossas reflexões, ela sugeriu apresentar o problema, usando uma tábua de logaritmos. Apesar de considerarmos interessante a sugestão, ponderamos que a tábua de logaritmos consistia em uma variável interveniente a mais na pesquisa, por isso a evitamos. O mesmo valeu para a calculadora ou outros materiais. Assim, elaboramos uma tabela para os alunos preencherem.

Vale salientar que os valores dos logaritmos decimais, utilizados pelos alunos na resolução dos problemas, foram fornecidos pela professora-pesquisadora. Esta munida de uma calculadora ia fornecendo os dados na medida que estes eram solicitados pelos alunos.

Ao examinarem a tabela proposta, eles teriam a oportunidade de avaliar as justificativas dadas no problema anterior (problema 2).

Parafraseando Douady e Glorian (1989), a interação entre domínios é um meio de obter formulações diferentes de um novo problema, sem serem necessariamente equivalentes, permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e o desenvolvimento de ferramentas e técnicas que não surgem na primeira formulação. As interações entre domínios são provocadas pelo professor, quando este propõe problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases da pesquisa e evoluir as concepções dos alunos.

Após as considerações acima citadas, elaboramos o problema 3 da seguinte forma:

3) Complete as tabelas abaixo.

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
1		
2		
3		
5		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
-1		
-2		
-3		
-4		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
0		
1/2		
1/3		
2/3		

3a) Baseando-se nas tabelas acima, avalie sua resposta e sua justificativa para a questão 2.

O problema 4 foi elaborado na forma algébrica, utilizando-se a linguagem simbólico-formal.

Pretendíamos com esse problema concluir a 1ª etapa do trabalho com os alunos, ou seja, as fases: **antigo**, **pesquisa**, **explicitação** e **novo implícito**. O objetivo do problema foi oportunizar uma avaliação das justificativas dadas no problema anterior ao aluno. Desse modo, objetivávamos que o problema proporcionasse ao aluno a oportunidade de síntese.

Considerando as sugestões dadas pelo grupo, o problema 4 foi elaborado e proposto aos alunos da seguinte forma:

4) Complete:

Se a base $a > 1$ e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ ________ x_2.

Se a base estiver entre 0 e 1, isto é, $0 < a < 1$ e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ ________ x_2

O problema 5 foi retirado do livro: Matemática – 1ª série do Ensino Médio, página 163, dos autores Edwaldo Bianchini e Herval Paccola, Editora Moderna (São Paulo), 2004. Este problema fez parte do vestibular da Unesp. (não há referência ao ano de realização)

O grupo não apresentou críticas e, nesse caso, foi incluído em nossa seleção.

5) Numa fábrica, o lucro **y** originado pela produção de **x** peças é dado. Em milhares de reais, pela expressão:

$y = \log_{10}(100 + x) + k$, sendo k uma constante real.

5a) Sabendo-se que não havendo produção não há lucro, determine k.

5b) Determine o número de peças necessário para se obter um lucro superior a 1000 reais.

O problema 6 foi retirado do livro: Matemática Fundamental – Uma nova abordagem, Volume Único, página 196, dos autores José Ruy Giovanni, José

Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr. da Editora FTD (São Paulo), 2002. Este problema fez parte do vestibular da Unicamp. (não há referência ao ano de realização).

6) As populações de duas cidades A e B são dadas em milhares de habitantes pelas expressões: A = $\log_2(1+t)^2$ e B = $\log_2(4t+4)$ em que a variável t representa o tempo em anos.
a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes: t = 1 e t = 7?
b) Após certo instante a população de uma dessas cidades é sempre maior que a outra. Determine o valor mínimo desse instante e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

Para melhor se adequar ao objetivo desta pesquisa, algumas alterações na versão original foram realizadas, resultando no seguinte problema.

6) As populações de duas cidades A e B são dadas em milhares de habitantes pelas expressões: A = $\log_2(1+t)^2$ e B = $\log_2(4t+4)$ em que a variável t representa o tempo em anos.

6a) Complete a tabela abaixo.

Tempo (anos)	População da cidade A	População da cidade B
1		
7		
15		

6b) Determine em que instante a população de uma das cidades é maior ou igual à da outra.

Salientamos que os problemas 1, 2, 4, 5 e 6 descritos neste trabalho, serão também utilizados pela professora Margarete da Silva Hungria Castro

Clara, porém com o objetivo de analisar os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das inequações logarítmicas.

2.3 Descrição dos problemas e objetivos

2.3.1 Problema 1

Os conhecimentos que podem ser mobilizados pelos alunos para a realização deste problema são: inequações, potências, definição de logaritmos (via potência) e funções (logarítmicas ou exponenciais).

Segundo Douady (1984), estes conhecimentos podem funcionar como ferramenta para a resolução do problema. Um conceito é considerado ferramenta se ele for utilizado para resolver um problema. As ferramentas são consideradas implícitas quando o aluno, apesar de utilizá-las na resolução do problema, não pode formulá-las explicitamente. As ferramentas explícitas são aquelas quando o estudante ao formulá-las, consegue também justificar sua utilização.

Nas questões **1a**, **1b** e **1c,** os tópicos: potências, definição de logaritmos (via potência), inequações e funções (logarítmicas ou exponenciais), podiam funcionar como ferramentas na resolução dos problemas.

A questão **1d** teve por objetivo introduzir, de forma implícita, as inequações logarítmicas.

Quadro I – Problema 1

1) Os técnicos do Ibama (Instituto do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis), avaliando a velocidade de desmatamento de certa região, relacionaram, através da fórmula a seguir, o número x de hectares que serão desmatados em t anos:
$t = \log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000}$, com $x < 10000$
1a) Faça uma análise da informação $x < 10000$.
1b) Para um tempo igual a 2 anos, determine quantos hectares serão desmatados.
1c) Determine o tempo para um desmatamento de 8750 hectares.
1d) No período de 6 meses a 1 ano, qual será a área desmatada?

2.3.2 Problema 2

Os conhecimentos que podiam estar disponíveis para a resolução do problema foram: o conceito dos números reais, a propriedade de mudança de base dos logaritmos e o conceito de desigualdade.

Este problema convida a investigar as inequações logarítmicas, sendo o aluno desafiado a adaptar seus conhecimentos antigos ao novo conhecimento.

Quadro II – Problema 2

2) A afirmação abaixo está correta? Justifique a sua resposta.
Se $3 > 2$, então $\log_a 3 > \log_a 2$, para **a** pertencente ao conjunto dos números reais.

2.3.3 Problema 3

O problema objetivava fornecer elementos para que o aluno refletisse sobre sua resposta e a justificativa dada no problema 2.

Segundo Pais:

> A observação de casos particulares não serve para fundamentar uma demonstração, no máximo, pode sugerir uma conjectura. No plano escolar, o risco de ocorrer uma generalização precipitada reside na tentativa de transformar o saber cotidiano em saber científico. (Pais, 2001, p.48-49)

Os conhecimentos que podem estar disponíveis para o aluno são: condição de existência do logaritmo ou da exponencial e a propriedade de mudança de base dos logaritmos

Quadro III – Problema 3

3) Complete as tabelas abaixo.

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
1		
2		
3		
5		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
-1		
-2		
-3		
-4		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
0		
1/2		
1/3		
2/3		

3a) Baseando-se nas tabelas acima, avalie sua resposta e sua justificativa para a questão 2.

2.3.4 Problema 4

Este problema pretendeu dar ao aluno uma oportunidade de síntese das descobertas que ele realizou diante dos problemas 2 e 3, procurando desenvolver a linguagem algébrica.

De acordo com Fiorentini *et al*. (1993), a linguagem simbólico-formal cumpre, a partir de certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico abstrato, uma vez que ela fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema, o que possibilita dar conta da totalidade e da estrutura da situação.

Neste momento o conhecimento "novo" poderia ser utilizado como ferramenta na a resolução deste problema.

Quadro IV - Problema 4.

4) Complete: Se a base a > 1 e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ ________ x_2. Se a base estiver entre 0 e 1, isto é, 0 < a < 1 e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ _______ x_2

2.3.5 Problema 5 e Problema 6

O objetivo dos problemas 5 e 6 foi o reinvestimento do conhecimento novo.

Maranhão (2002) cita que nesta fase desenvolvem-se diversos exercícios para familiarização com o que é o novo, colocando-se em relação nada, além do que é conhecido. Certas situações permitem a aquisição da familiaridade desejada, para que esses conhecimentos funcionem, posteriormente, como antigos.

Neste trabalho é necessário comentar que não será utilizada a última fase proposta por Douady (1984), denominada novo problema.

De acordo com Maranhão (2002), nesta última fase denominada *novo problema*, propõe-se a reutilização de novos conhecimentos em tarefas mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, iniciando-se, assim, um novo ciclo da dialética-ferramenta-objeto. Nesta fase, os conhecimentos novos tomam o *status* de antigos sobre os quais se erigirão os novos.

Quadro V – Problema 5

5) Numa fábrica, o lucro y originado pela produção de x peças é dado, em milhares de reais, pela expressão:

$$y = \log_{10}(100 + x) + k \text{, sendo k uma constante real.}$$

5a) Sabendo-se que não havendo produção não há lucro, determine k.

5b) Determine o número de peças necessário para se obter um lucro superior a 1000 reais.

Quadro VI – Problema 6

6) As populações de duas cidades A e B são dadas em milhares de habitantes pelas expressões: A = $\log_2(1+t)^2$ e B = $\log_2(4t+4)$ em que a variável t representa o tempo em anos.

6a) Complete a tabela abaixo.

Tempo (anos)	População da cidade A	População da cidade B
1		
7		
15		

6b) Determine em que instante a população de uma das cidades é maior ou igual à da outra.

CAPÍTULO 3

ESTUDOS PRELIMINARES: O CONTEXTO ESCOLAR

3.1 Caracterização da escola.

A escola particular onde se realizou a pesquisa está situada na região centro-oeste da cidade de São Paulo. A escola tem hoje 548 alunos, distribuídos conforme a tabela abaixo:

Cursos	Número de alunos
Educação Infantil	119
da 1ª à 4ª série do EF	164
da 5ª à 8ª série do EF	136
Ensino Médio	121
total	548

A Educação Infantil do colégio compreende:

- Mini Maternal
- Maternal
- Jardim I
- Jardim II
- Pré-Alfabetização

Horário de funcionamento

Matutino

da 2ª à 4ª série do EF	Das 7h 20 às 11h 50
da 5ª à 8ª série do EF	Das 7h 20 às 11h 50
Ensino Médio	Das 7h às 12h 45

Vespertino

Educação Infantil	Das 13h 20 às 17h 50
Da 1ª à 4ª série do EF	as 13h 20 às 17h 50

Em 2006, o colégio sofreu alteração na grade curricular, no Ensino Médio, em virtude da adoção do Sistema Anglo de Ensino. As alterações foram as seguintes:

- na 1ª série do Ensino Médio foi suprimida 1 aula de História e acrescentada 1 aula de Língua Portuguesa;
- na 2ª série do Ensino Médio foi suprimida 1 aula de Educação Física e acrescentada 1 aula de Língua Portuguesa;
- na 3ª série do Ensino Médio foi suprimida 1 aula de Educação Física.

As aulas de Educação Física permaneceram à disposição dos alunos no período da tarde, sem custo adicional.

Objetivos Gerais do colégio:

- humanizar e personalizar o aluno, orientando-o sobre o sentido da vida, criando nele o lugar onde se possa revelar e ser ouvida a Boa-Nova;
- prepará-lo para que seja agente de mudanças por meio de uma formação fundamentada na fé, que frutifica em obras de justiça;
- educar, integrando todos os fatores educativos, os atuais e os em potência, favorecendo o surgimento da comunidade educativa.

Objetivos Específicos:

- preparar o educando para que seja sujeito de seu próprio desenvolvimento, na dimensão da solidariedade;
- proporcionar ao aluno espaço para a reflexão, o espírito crítico, o diálogo franco e a busca da **Verdade.**

Para concretizar seus objetivos, o colégio promove uma pedagogia personalizada: evangélico-libertadora, que integra em uma mesma linha a formação da pessoa e do cristão, procurando um clima que lhe proporcione a vivência dos valores, nos quais queremos educar e favorecer o diálogo entre fé e cultura.

Objetivos Educacionais Gerais para o Ensino Médio.

O Ensino Médio tem como objetivos gerais formar alunos capazes de:

- aproximar-se dos diversos conhecimentos de maneira produtiva;
- perceber as múltiplas interações entre os diferentes componentes curriculares;
- buscar informações nas diversas fontes, selecionar a informação adequada e utilizá-la de modo criativo, consciente e crítico;

- assumir o papel de sujeito no processo de construção de seu conhecimento e da sociedade;
- desenvolver aptidões relacionadas às formações humana e cultural;
- desenvolver a autonomia intelectual e o pensamento crítico;
- ter atitudes solidárias nas relações com os outros.

Com esta proposta pedagógica, o colégio busca o desenvolvimento do pensar e o esforço pessoal em aprender (aprendendo a aprender).

Para os alunos que apresentam dificuldades específicas ou defasagem de conteúdos, o colégio promove atividades de revisão.

As aulas de revisão, na maioria das vezes, são ministradas pelo próprio professor da matéria. Este elabora uma lista de exercícios e acompanha os alunos em sua realização, esclarecendo as dúvidas que forem surgindo.

Esta revisão tem por objetivo conscientizar o jovem da necessidade de um conhecimento global, sem lacunas, permitindo-lhe melhor desempenho nos exames vestibulares e maior versatilidade na resolução de problemas.

Objetivos Específicos por série: 2ª série do Ensino Médio.

- vivenciar valores sócio-morais;
- discernir e escolher uma área para prosseguir seus estudos em busca da realização profissional;
- melhorar cada vez mais seu desempenho nas aulas, visando à excelência acadêmica;
- perceber-se como cidadão participante, com maior responsabilidade social.

Objetivos Gerais da Matemática para o Ensino Médio.

- contribuir para a integração do aluno na sociedade em que vive, proporcionando-lhe os conhecimentos básicos de teoria e prática da Matemática;
- estimular a curiosidade, o interesse e a criatividade do aluno;
- desenvolver no aluno hábitos de estudo, autonomia, responsabilidade, crítica e uso correto da linguagem.

Número de aulas por componente curricular para a 2ª série do Ensino Médio.

Componente Curricular	Número de aulas por semana
Química	4
Geografia	2
Português	6
Matemática	5
História	3
Física	4
Inglês	2
Biologia	4
Desenho Técnico	2
Religião	1

Conteúdo Programático de Matemática – 2006.

O programa de Matemática na 2ª série do Ensino Médio é desenvolvido em três períodos didáticos. Aqui são salientados apenas os conteúdos relacionados à Álgebra.

1º Período Didático - 01/02/2006 a 08/05/2006 (67 dias letivos)

Neste período a professora-pesquisadora trabalhou os conteúdos de Trigonometria e Geometria Espacial. A Geometria Espacial, também, foi trabalhada no segundo período didático.

2º Período Didático – 09/05/2006 a 01/09/2006 (64 dias letivos)

- Inequações logarítmicas
- Introdução às técnicas de contagem
- Princípios básicos de contagem
- Arranjos simples e fatorial

3º Período Didático – 04/09/2006 a 15/12/2006 (69 dias letivos)

Setor A

- Permutação simples
- Binômio de Newton

- Probabilidades

Setor B

- Matrizes
- Determinantes
- Propriedades dos Determinantes
- Sistemas Lineares

3.2 Recursos Didáticos

Os recursos didáticos oferecidos ao professor são:

a) Recursos físicos:

- audiovisual e Data-show;
- sala de informática com 16 computadores;
- apostilas do Anglo Latino;
- disponibilização de um site, pelo Anglo Latino, para eventuais dúvidas do professor e sugestões didáticas quanto ao encaminhamento do conteúdo;
- três retroprojetores;
- laboratório de Física, Química e Biologia;
- mapas e Globo terrestre;

- material concreto de matemática montessoriano, para o Fundamental 1;
- material concreto para o estudo das Expressões algébricas, Fatoração, Trigonometria e Geometria Espacial.

b) Recursos humanos:

- orientação Pedagógica;
- orientação Educacional;
- orientação Social (normas e disciplina do aluno);
- professor de apoio nas aulas realizadas na sala de informática.

3.3 Livro Didático adotado pelo colégio no Ensino Médio

Em 2005, a direção e a coordenação do colégio, em que foi realizada esta pesquisa, decidiram adotar para o Ensino Médio em 2006 um sistema apostilado. Esta decisão deu-se pela preocupação da equipe diretiva quanto ao ingresso de seus alunos no Ensino Superior. A mudança foi implantada aos 1° e 2° anos do Ensino Médio. Ressaltamos que os professores da escola não participaram desta deliberação.

A mudança foi comunicada aos professores no mês de outubro de 2005, em meados de dezembro desse mesmo ano, foi realizado um encontro entre professores e assessores desse sistema, para esclarecer a proposta pedagógica do curso e apresentar o material que seria utilizado pelo professor e aluno.

O sistema apostilado adotado pelo colégio propõe que o conteúdo programático de Matemática do Ensino Médio seja desenvolvido em dois anos e meio. No último semestre do 3º ano do Ensino Médio, é realizada uma revisão de conteúdos para preparação dos alunos para o vestibular.

No início do ano letivo de 2006, cada professor recebeu os seguintes materiais do sistema apostilado:

- livro-texto (anual) – contém o conteúdo que o professor vai trabalhar com o aluno nas aulas. É o curso propriamente dito, como um livro didático convencional;
- separatas/apostila-caderno (bimestral) – o mesmo conteúdo da apostila-caderno do aluno com as respostas dos exercícios de classe e o índice-controle de estudos da tarefa mínima e da tarefa complementar;
- manual do professor (bimestral), na qual são apresentados os objetivos gerais de cada matéria, os objetivos de cada aula, a programação aula por aula, o encaminhamento da aula e outras atividades.

Segundo este sistema, o professor deve preparar as aulas, consultando seu manual, no qual os autores propõem a seguinte estrutura de trabalho:

- encaminhamento – apontam ao professor uma sugestão de como abordar os conceitos ensinados;
- sugestão didática – idéias de como usar outros meios nas aulas: filmes, dvds, pinturas, etc.;
- atividades extras para o enriquecimento das aulas, como pesquisas, redações, textos variados, etc.;

- textos-síntese – resumo correspondente ao livro-texto;
- exercícios.

Em seguida, o professor deve voltar-se ao livro-texto, onde se encontra o conteúdo a ser ensinado para o aluno. Para facilitar o trabalho do professor e conferir maior eficácia de seu curso, existe um roteiro a ser seguido, que se encontra na separata do professor.

Nesta separata, há um roteiro de exposição das aulas. Cabe ao professor observar sua seqüência, para facilitar a organização de suas aulas e certificar-se de que todos os itens do livro-texto foram explorados. Com este material, o professor deverá preparar as respostas às questões que os alunos responderão em classe.

Durante as aulas, o professor deverá atender à seguinte sistemática:

- corrigir a tarefa mínima, sem deixar dúvidas; esta tarefa deve ser bem elaborada e eficaz para um tempo não muito longo;
- desenvolver sua aula do dia, atendendo os requisitos já referidos;
- dentro da própria aula, em seguida ao desenvolvimento do conteúdo, fazer com que os alunos resolvam os exercícios em classe, determinando quais são as questões que compreendem, o que foi aprendido naquele momento e corrigi-los imediatamente;
- esclarecer dúvidas sobre a tarefa complementar.

A seguir, descrevemos o encaminhamento sugerido pelo sistema apostilado, quanto ao ensino e aprendizagem das inequações logarítmicas.

O professor deve fazer com os alunos os dois gráficos que se encontram na apostila-caderno na aula denominada Aula 61. São eles: $f(x) = \log_2 x$, definida para todo x real, x > o e f(x) = $\log_{\frac{1}{2}} x$, definida para todo x real, x> 0. Em seguida, o professor mostrará para aos alunos as desigualdades: $\log_2 2 < \log_2 4$ e 2 < 4 e $\log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 4$ e 2 < 4. Esta aula objetiva estudar gráficos de funções logarítmicas.

Na aula denominada Aula 62 (anexo 7), o professor deverá reservar um tempo em classe, para que os alunos façam os exercícios referentes à aula e, a seguir, colocar as resoluções no quadro-negro, mostrando a importância das condições de existência do logaritmo e da comparação da base com número 1.

Os exercícios propostos na Aula 62 são:

1. Classifique de V (verdadeiro) ou F (falso) cada uma das seguintes afirmações.

a) (   ) $\log_2 7 > \log_2 5$.

b) (   ) $\log_{0,5} 7 < \log_{0,5} 5$

c) (   ) $\log_{\pi} 3 < \log_{\pi} 2$

2. Resolva em R as seguintes inequações:

a) $\log_2 x < \log_2 5$

b) $\log_{0,9} x > \log_{0,9} 5$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x \quad 3) \geq \log_{\frac{1}{3}} 10$

Após cada aula, os alunos resolverão alguns exercícios que estão divididos em tarefa mínima e tarefa complementar. O objetivo da aula 62 é resolver inequações logarítmicas.

Nestas instruções, percebemos o caráter mecanicista da Tendência Tecnicista. A finalidade do ensino de Matemática nesta tendência é desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno para resolução de exercícios ou de problemas-padrão. Isto porque este modelo, com base no funcionalismo, parte do pressuposto de que a sociedade é um sistema tecnologicamente perfeito, orgânico e funcional.

Continuando com a explanação, Fiorentini acrescenta que nesta tendência:

> Os conteúdos tendem a ser encarados como informações, regras, macetes ou princípios organizados lógica e psicologicamente por especialistas (alguns importados do exterior) e que estariam disponíveis nos livros didáticos, nos módulos de ensino, nos jogos pedagógicos, em "kits" de ensino, nos dispositivos audiovisuais, em programas computacionais. Ou seja, professor e aluno ocupam uma posição secundária, constituindo-se meros executores de um processo cuja concepção, planejamento, coordenação e controle fica a cargo de especialistas. (Fiorentini, 1995, p.18)

Ao confrontarmos os objetivos gerais do colégio, os objetivos da Matemática e a metodologia utilizada, percebemos a existência de uma dicotomia inconsistente.

A contradição se faz presente no momento em que a metodologia não abre espaço para a aprendizagem, na qual o aluno seja o construtor de seu próprio conhecimento.

Segundo Braumann:

> Aprender matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado de cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira frição da matemática. (Braumann apud Ponte *et al*, 2005, p.19)

Neste momento, é necessário, justificar as palavras "não abre espaço", uma das avaliações que faz parte da nota do aluno, refere-se a um simulado aplicado pelo sistema apostilado, em nível Brasil. Este simulado pretende avaliar o nível geral do aluno e o nível deste por disciplina. Para cada simulado, há um conteúdo já programado pelo sistema apostilado, portanto, o professor deve estar sempre com o conteúdo em dia.

Neste momento, gostaria de destacar que, para não prejudicar os alunos em relação ao simulado e ao andamento da matéria, a professora-pesquisadora prontificou-se a dar aulas extras, a fim de repor as aulas utilizadas na pesquisa.

3.4 Método de Ensino do professor

Em 2005, a professora-pesquisadora, no desejo de mudar sua prática pedagógica, já citada no início deste trabalho, realizou algumas mudanças quanto à estrutura de certas aulas.

A introdução do conceito de função deu-se por meio da resolução de alguns problemas. Os alunos formaram grupos para realização desta tarefa, após o término de cada atividade, houve uma discussão quanto à forma de resolução das atividades propostas.

Outro momento de mudança foi no estudo do significado dos coeficientes a e b da função do 1º grau, $f : R \to R / x \mapsto ax + b$,com a $\neq$ 0 e também dos coeficientes a, b e c da função de 2 º grau, $f : R \to R / x \mapsto ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Para estes estudos, a professora elaborou uma aula no laboratório de informática, utilizando o programa Winplot propiciando uma discussão na sala de aula sobre os resultados obtidos.

Entretanto, é preciso ressaltar que, depois dessas aulas, a mudança de metodologia proposta pelo colégio por meio do sistema apostilado levou a professora-pesquisadora voltar à sua prática antiga, ou seja, requerendo o uso de lousa, explicação do conteúdo, alguns exercícios-padrão e correção dos exercícios propostos, segundo a Tendência Tecnicista descrita por Fiorentini (1995).

CAPÍTULO 4

REALIZAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS EM CLASSE

4.1 Introdução

As situações didáticas propostas para este trabalho desenvolveram-se no mês de maio. A escolha desse período justificou-se por ser uma época sem provas. Em nossa experiência, constatamos que, dependendo da disciplina, os alunos costumam ficar mais ansiosos, pedindo mesmo, para que disponibilizemos um tempo de nossas aulas de Matemática para estudarem o conteúdo da prova do dia.

Vale salientar que as turmas que participaram desta pesquisa já tinham estudado no 1º ano do Ensino Médio (2005), a função exponencial, a definição dos logaritmos e as propriedades logarítmicas, decorrentes da definição dos logaritmos via função exponencial. Tinham também estudado a propriedade de mudança de base.

Estes conhecimentos poderiam funcionar, de acordo com nosso quadro teórico, como ferramentas na resolução do problema ou, pelo menos, parte do problema.

Antes de desenvolver as situações propostas, a professora-pesquisadora decidiu revisar os tópicos acima citados, pois estes foram considerados por ela, como conhecimentos antigos para construção dos novos. A revisão foi realizada em duas aulas de 45 minutos, duas aulas antes do início de nossa pesquisa.

É importante justificar a decisão de revisar os conhecimentos anteriores antes de iniciar a pesquisa.

A opção do colégio pelo sistema apostilado, iniciado em 2006, causou, em um primeiro momento, reação positiva nos alunos. O método, na visão deles, poderia facilitar o ingresso às Universidades e Faculdades.

Alguns meses depois do método ser implantado, os alunos, sobretudo, os do 2º ano, apresentaram dificuldades no acompanhamento das aulas e na organização dos estudos.

Conforme eles citaram, as aulas eram muito rápidas, não lhes dando tempo para uma melhor compreensão dos conteúdos expostos pelos professores. Além disso, não estavam conseguindo fazer as lições em razão da grande quantidade de avaliações que eram obrigados a realizar.

Para melhor compreensão deste argumento, apresentamos, abaixo, um quadro referente às datas de provas que o aluno fez no primeiro trimestre.

Quadro VII – Cronograma de Provas do 1º Período Didático – 2º ano do Ensino Médio

Dia / mês	Disciplina	Dia / mês	Disciplina
24/02	Biologia	05/04	Desenho Técnico
07/03	Matemática	07/04	Biologia
08/03	Desenho Técnico	17/04	Português
10/03	Português	18/04	Provas Nacionais

Quadro VII continuação

14/03	Inglês		18/04	Provas Nacionais
15/03	Química		24/04	Física
17/03	História		25/04	Inglês
20/03	Física		26/04	Química
23/03	Geografia		27/04	Geografia
28/03	Redação		28/04	História
31/03	Religião		02/05	Matemática

Depois do término do primeiro período didático, os alunos apresentaram-se desmotivados e indisciplinados diante da grande quantidade de notas abaixo de 6 (média de aprovação).

A seguir, é apresentado o quadro de notas inferiores a 6, neste período, de cada turma participante desta pesquisa. No quadro constaram apenas as matérias da área de exatas.

Quadro VIII – Notas da turma A1 – 2º ano do Ensino Médio

Disciplinas	Notas de 5 a 5,9	Notas abaixo de 5
Desenho Geométrico	10,71%	32,14%
Matemática	7,8%	73,07%
Química	10,71%	67,78%
Física	14,28%	75%

Quadro IX – Notas da turma A 2 – 2º ano do Ensino Médio

Disciplinas	Notas de 5 a 5,9	Notas abaixo de 5
Desenho Geométrico	26,92%	19,23%
Matemática	13,63%	45,45%
Química	11,11%	62,96%
Física	12,50%	58,33%

Diante desse quadro, acreditando que a não disponibilidade dos conhecimentos anteriores pudesse tornar impraticável o início da pesquisa, a professora-pesquisadora decidiu pela revisão.

A revisão foi realizada em duas aulas de 45 minutos, nos moldes da atual prática da professora-pesquisadora, ou seja, pela Tendência Tecnicista descrita por Fiorentini (1995), como uma tentativa de melhorar as condições dos alunos nos tópicos: equação exponencial, definição de logaritmo via equação exponencial e propriedade de mudança de base.

Em um artigo intitulado "Evolução da Relação com o saber em Matemática na Escola Primária: uma crônica sobre cálculo mental", Douady (1994), discorre sobre a relação entre o que o professor propõe-se a ensinar em Matemática e o que os alunos, aos quais ele se dirige, são suscetíveis de aprender de fato, examinando os efeitos sobre as escolhas e decisões dos professores, segundo seja ou não o saber matemático o principal objetivo da relação didática.

Ao discorrer a relação "O saber matemático é um valor para o professor, mas não para os alunos", Douady relata:

> Para o professor, trata-se de obter uma modificação da relação com a Matemática de uma maioria dos alunos da classe. Então este pode ser um desafio muito grande para o professor que se encontrará engajado, através da Matemática, em um processo de modificação da relação com a escola, da relação professor-aluno e das relações entre alunos.

> (...) uma modificação na relação com a Matemática implica para esses alunos uma atribuição de sentido com conteúdos dessa disciplina e a disponibilidade de ferramentas de tratamento sob seu controle. (...) o professor deve então assegurar que seus alunos disponham de um mínimo de meios para fazê-lo. Isso significa, em nível de contrato, que os alunos aceitam o papel de ator e não se refugiam no simples papel de executantes. (Douady, 1994, p. 35,36)

Antes de iniciar as atividades propostas, a professora comunicou à classe a formação dos grupos que iriam trabalhar com os problemas propostos e fez a escolha dos grupos, nesta escolha optou por colocar em um mesmo grupo alunos com diferentes níveis de dificuldade.

Depois, esclareceu aos alunos que o objetivo era analisar uma mudança em sua prática pedagógica, para a construção dos conhecimentos deles, sobre inequações logarítmicas.

Nestas atividades, os alunos assumiriam o papel de investigadores na resolução dos problemas, ou seja, deveriam desenvolver estratégias e justificativas para tal resolução. Estas atividades deveriam ser respondidas a lápis, e eles não poderiam utilizar a borracha. Todas as anotações realizadas por eles deveriam constar na folha de resposta.

Antes de iniciar o trabalho, a classe foi organizada em grupos, cada grupo elegeu um redator com a responsabilidade de expor as resoluções dos problemas no quadro-negro e entregar a folha de resposta à professora.

A professora-pesquisadora optou por não trabalhar com a tabela de logaritmos. Assim, os dados que os alunos necessitassem seriam fornecidos por ela mesma.

Após a resolução de cada problema, os grupos registraram no quadro-negro as soluções obtidas. A professora-pesquisadora e os alunos discutiram a validade das soluções.

Este momento Douady denomina explicitação. Segundo Maranhão:

> Isto requer do professor a abertura de debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo usados, e os novos que estão sendo criados implicitamente. Os alunos formulam suas idéias e essas são validadas ou refutadas. As diversas concepções presentes se revelam, novos conhecimentos podem entrar em conflito com antigos ou, então, podem surgir erros ou contradições. Estes debates servem para assegurar algumas interpretações necessárias, mas podem não ser suficientes para eliminar certas convicções contraditórias. Algumas dessas convicções podem ser fecundas, do ponto de vista cognitivo (da formação de conhecimentos). Nesse caso novas situações podem servir para avanço. (Maranhão, 2002, p.117)

Uma vez o problema resolvido e seus resultados validados ou não, o professor institucionalizou os conhecimentos que acreditou fossem importantes.

De acordo com Maranhão (2002, p.120) " o professor deve ressaltar o que considera importante e o que se deve reter, registrar, de todo o processo pelo qual o aluno passou. Fica explícito que o que se deve reter são objetos de saber matemático".

No desenvolvimento desta pesquisa, tivemos dois momentos de institucionalização: o primeiro, ao término da explanação e discussão dos resultados obtidos do primeiro problema; e o segundo, ao fim dos dois outros problemas que foram propostos pela professora-pesquisadora.

Estes dois problemas objetivavam avaliar os conhecimentos desenvolvidos nas questões 1, 2, 3 e 4.

Maranhão (1996) chama a atenção ao papel de avaliação que se pode atribuir às fases já explicitadas (antigo, pesquisa, explicitação e novo implícito). Esta avaliação poderá levar ao conhecimento do professor, para uma dada situação, os conhecimentos que estão sendo utilizados como novo implícito ou explícito. Isto lhe dará elementos para a formulação de novas situações.

Em nossa pesquisa, as fases citadas acima foram desenvolvidas via resolução dos problemas 1, 2, 3 e 4.

Os dois outros problemas propostos aos alunos, inseridos na fase de reinvestimento, foram selecionados pela professora/ pesquisadora, e foram:

Quadro X – Exercícios de Reinvestimento

1) A desigualdade $\log_2(3x - 3) < \log_2 7$ é verdadeira para qual ou quais valores de x?
2) Qual é o valor de x na inequação $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 2$?

A seguir, apresentamos o desenvolvimento das situações didáticas sistematizadas da seguinte forma:

- um quadro com as respostas de cada problema;
- as dificuldades encontradas pelos alunos, consideradas relevantes para a professora-pesquisadora na resolução dos problemas, e as intervenções da professora-pesquisadora;
- alguns pontos que foram considerados importantes na discussão das respostas;
- análise da professora-pesquisadora quanto à resolução dos problemas elaborados pelos alunos e uma análise do procedimento da professora quanto seu encaminhamento nas dificuldades encontradas por eles.

4.2 Desenvolvimento e análise das situações didáticas

A seguir, apresentamos a descrição das situações didáticas realizadas em uma turma de alunos do 2º ano do Ensino Médio, exemplificando com alguns registros escritos e com nossas análises parciais.

Dois tipos de instrumentos de registro escrito foram utilizados, um deles foi a transcrição de alguns diálogos referentes às interações estabelecidas entre professor e grupo de alunos ou, ainda, entre professor e grupo sala no desenvolvimento das situações didáticas. O outro registro escrito referiu-se às produções dos alunos na resolução dos problemas.

As análises foram feitas com base no quadro teórico ferramenta-objeto e interação entre domínios de Règine Douady.

Na análise dos diálogos, buscou-se identificar as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução dos problemas e, também, as intervenções da professora diante dessas dificuldades.

Priorizamos as produções dos alunos que permitissem uma visão global da classe, no prosseguimento das aulas para análise.

4.2.1 Problema 1

O problema 1 foi desenvolvido por esta turma em duas aulas de 45 minutos. Os itens a, b e c do problema 1 tiveram por objetivo verificar os conhecimentos antigos dos alunos. De acordo com Douady (1984), estes conhecimentos deveriam funcionar, como ferramentas explícitas na aquisição do novo conhecimento (inequações logarítmicas).

Para as análises foi utilizada a sigla G1A1, para representar o grupo 1, G2A2 para representar o grupo 2 e, assim, sucessivamente.

4.2.1.a. Faça uma análise da informação $x < 10000$.

Os alunos, ao iniciarem esta atividade, ficaram muito preocupados em acertar o problema proposto. Diante desta situação, a professora intercedeu chamando a atenção para o objetivo da proposta, ou seja, analisar o processo ensino e aprendizagem, envolvendo professor, aluno e saber matemático, na resolução de problemas enfocando desigualdades e inequações logarítmicas. Neste momento, eles deveriam assumir o papel de investigadores desenvolvendo estratégias e justificativas na resolução dos problemas.

O grupo que denominamos G2A1 (grupo 2) chama a professora para mais esclarecimentos em relação a essa questão. Vejamos o registro do diálogo:

Aluno 1:	Eu preciso do tempo?
Professora:	Em que questão você está?
Aluno 1	Faça uma análise da situação $x < 10000$.
Professora:	E o que você não está sabendo?
Aluno 1	Eu não tenho o tempo. Eu preciso do tempo para fazer a análise.
Professora:	Para fazer a análise, você precisa do tempo?
Aluno 1	Não, é só fazer a análise desta informação.
Professora:	O que significa: “Uma análise sobre esta informação ($x<10000$)”. O que o exercício está questionando?
Aluno 2	É uma prova.

Professora: Uma prova?

Aluno 3 Não, ele quer saber, o que a gente acha deste comentário (x<10000).

Aluno 4 O que a gente acha deste dado.

Professora: (...) é um dado. Ele quer saber do por que ele está colocando este dado. Por que **x** tem que ser menor que 10000. Vocês entenderam?

Aluno 1 Bem, então, colocamos um valor maior que 10000 no lugar de **x** e ...

Professora: Bom, aí vocês é que sabem. Vocês decidem o que precisam fazer.

Neste diálogo, uma das respostas dadas ao aluno, pela professora-pesquisadora, chamou a atenção. Quando o aluno disse: “Eu não tenho o tempo. Eu preciso do tempo para fazer a análise”. O questionamento feito pela professora levou o aluno, imediatamente, a uma mudança de posição. Além disso, a intervenção da professora-pesquisadora não permitiu que ela tivesse conhecimento do tipo de dificuldade do aluno naquele momento, embora esta fosse sua intenção inicial. Parece que ao contrário, sua intervenção interrompeu a reflexão que o aluno desenvolvia.

Para que esta reflexão não fosse interrompida, a professora poderia ter feito o seguinte questionamento: “Explique porque você precisa do tempo para resolver a questão”.

De acordo com Douady:

> Refletindo sobre a aprendizagem escolar, certos erros ou dificuldades apresentadas pelos alunos poderiam apresentar um papel produtivo. A busca pelo novo equilíbrio, tratando-se de trabalho coletivo, poderia impulsionar diálogos para explicitar e rejeitar esses erros. (Douady, 1984, p. 6)

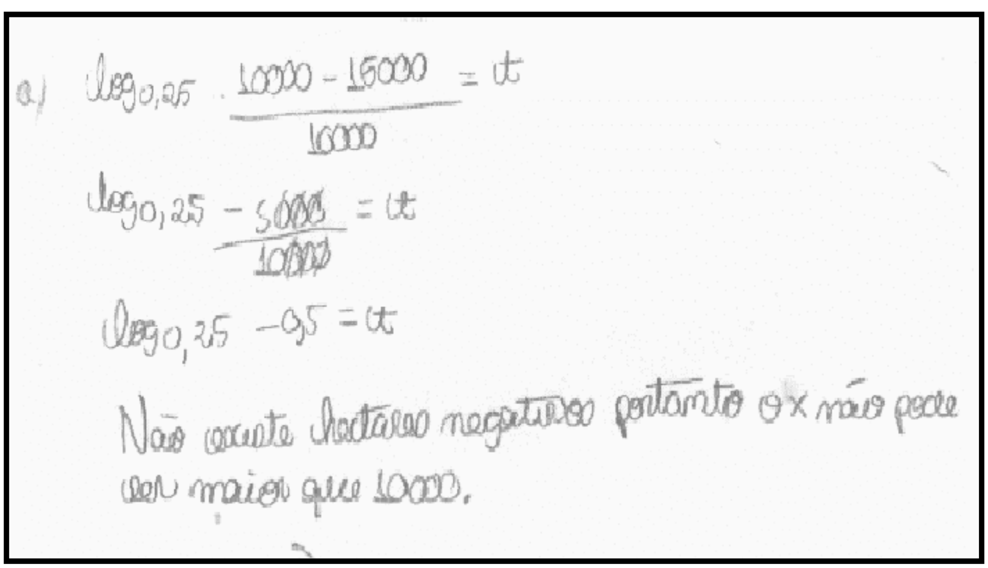
Após o diálogo, o grupo não apresentou nenhum outro questionamento sobre o exercício. Apresento, a seguir, a resposta dada pelo grupo para esse problema.

Quadro XI – Resposta do grupo G2A1 – Problema 1 – questão 1a

Se a condição x < 10000 não for cumprida, o resultado não dará certo.

Na resolução proposta pelo grupo G2A1 (Figura 1), observamos que os alunos atribuíram valores para x e apresentaram a resposta na linguagem natural. Desta forma, percebemos que houve uma interação entre os domínios: algébrico, numérico e da linguagem natural.

Figura - 1



a) $\log_{0,25} \dfrac{10000-15000}{10000} = t$

$\log_{0,25} -\dfrac{5000}{10000} = t$

$\log_{0,25} -0,5 = t$

Não existe hectares negativos portanto o x não pode ser maior que 10000.

Segundo Maranhão:

> Douady (1984) afirma que se pode considerar a existência de um estado heterogêneo de conhecimentos entre os diversos domínios que varia não só para um aluno, mas também de um aluno para outro. Isso deve ser levado em conta na escolha e na condução de uma seqüência didática. (Maranhão, 2002, p.120)

Outro grupo que solicitou a presença da professora foi o G3A1. Vejamos o diálogo:

Aluno: Este é o expoente do logaritmo? (o aluno aponta para a expressão $\frac{10000 - x}{10000}$)

Professora: O logaritmo tem expoente?

Aluno: Não responde.

Professora: O logaritmo tem relação com alguma matéria que a gente viu anteriormente?

Aluno: É o negócio da função exponencial

Professora: Então, pensem um pouco.

Ao perguntar se o logaritmo tinha relação com outra matéria vista anteriormente, professora procurou desafiar o aluno a adaptar seus conhecimentos antigos na resolução do problema.

Após o diálogo, a professora decidiu permanecer com o grupo, como ouvinte.

As discussões realizadas com o grupo não estavam contribuindo para a resolução do problema, pois este não conseguia chegar a um consenso.

A professora resolveu intervir novamente. Vejamos mais um trecho do diálogo:

Professora: Dê-me um exemplo de uma equação logarítmica.

Aluno: Qualquer uma?

Professora: Sim, qualquer uma.

Aluno: $\log_2 4 = x$

Professora: Transforme esta equação em exponencial.

Aluno: $2^x = 4$

Professora Pensem novamente.

De acordo com Douady e Glorian:

> As concepções dos alunos são o resultado de uma troca entre os problemas que eles têm a resolver e os interlocutores em comunicação com eles (outros alunos, professor, além da bagagem exterior à classe: pais, televisão, jornais, revistas, games etc.). No decorrer dessas trocas os conhecimentos anteriores são mobilizados para serem modificados, ampliados ou rejeitados. (Douady e Glorian apud Maranhão, 1996, p.38)

Voltando à questão proposta, o grupo escreve:

$$\log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000} = t \ ; \ 0,25^t = \frac{10000 - x}{10000}$$

Após o diálogo acima, este grupo também não apresentou outro questionamento sobre o exercício. A seguir, destaco a resposta proposta pelo grupo para o problema em questão.

Quadro XII – Resposta do grupo G3A1 – Problema 1 – questão 1a

Pois se x for maior que 10000 o resultado do log é negativo e não existe log negativo por este motivo x não pode ser maior que 10000

A professora questionou o grupo sobre o significado de "o resultado do log é negativo", que apontou para a fração algébrica $\frac{10000 - x}{10000}$, justificando que $0{,}25^t$ nunca será negativo, pois a base é positiva.

Ao confrontarmos o diálogo e a solução do problema fornecida pelo grupo, consideramos que a intervenção da professora foi orientadora para a superação das dificuldades do grupo, que respondeu ao questionamento da professora e justificou a solução obtida, utilizando como ferramenta explícita conhecimentos sobre potenciação.

Para Douady (1984), quando um aluno pode formular e justificar o emprego de um conceito na resolução de um problema, ele usa uma ferramenta explícita.

Diante da dificuldade apresentada pelos outros grupos para iniciar a resolução da questão **1a** do problema 1, a mesma do grupo G3A1, a professora resolveu intervir novamente, nesta vez, envolvendo a classe toda, conforme o diálogo (transcrito) seguinte:

Professora: Pessoal, vamos dar uma parada. Podemos dar uma parada? [...] Deixe-me ver se posso ajudá-los na identificação dos elementos presentes no logaritmo. Quando pedi um exemplo de uma equação logarítmica a um colega de vocês, ele me deu: $\log_2 4 = x$. O que representa o 2?

Aluno: É a base.

Professora: E o 4?

Aluno: O expoente.

Professora: É o expoente? Será?

Aluno: Não.

Professora: Transformem esta equação logarítmica em equação exponencial.

Aluno: $2^x = 4$

Professora: Então o 4 é o expoente, [...]?

Aluno: Não.

Professora: Quem é o expoente?

Aluno: O **x**.

Professora: Voltemos ao nosso exercício ($t = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)$). Quem está assumindo o papel do 4 neste logaritmo?

Aluno: É $\frac{10000 - x}{10000}$

Professora: Transformem esta equação logarítmica em uma equação exponencial.

Aluno $0,25^t = \frac{10000 - x}{10000}$

Professora: Melhorou para vocês?

Alunos: Sim.

Professora: Então, vamos lá.

Ao analisarmos o diálogo acima, um momento que nos chamou a atenção referiu-se à fala da professora-pesquisadora quanto à dificuldade dos alunos na identificação dos elementos presentes no logaritmo.

Talvez a professora-pesquisadora ao se referir à dificuldade do aluno na identificação dos elementos do logaritmo, acreditasse haver uma falha de compreensão da definição, previamente ensinada de logaritmos. Por isso, os alunos estavam confundindo os termos da equação exponencial correspondente ao logaritmo dado no problema.

Citamos isso, porque durante o diálogo ela enfocou também as frases: ”É o expoente? Será?”; “Como vocês podem transformar este logaritmo em exponencial?"; "Voltemos ao nosso exercício ($\log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000} = t$). Quem está assumindo o papel do número 4 neste logaritmo?".

De acordo com Douady:

> Ter conhecimentos em Matemática é ser capaz de colocá-los em jogo, provocando seu funcionamento como ferramentas explícitas, adaptadas aos problemas que lhes dá seus significados, com ou sem palavra-chave que marque sua utilização na formulação do problema. (Douady, 1984, p. 11)

A nosso ver, esta não compreensão talvez fosse resultado de um ensino de caráter mecanicista, utilizado pela professora-pesquisadora no ano anterior e, também, na revisão que fez deste conhecimento. Esta tendência privilegia o mecanismo em detrimento da compreensão

Segundo Fiorentini:

> [...] essa tendência pedagógica, a aprendizagem da Matemática consiste, basicamente, no desenvolvimento de habilidades e atitudes e na fixação de conceitos ou princípios. [...] A *finalidade do ensino da Matemática* na tendência tecnicista, portanto, seria a de desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno para a resolução de exercícios ou de problemas-padrão. (Fiorentini, 1995, p.17)

É também possível que a forma de apresentação do logaritmo tenha se constituído em dificuldade na resolução do problema.

A apresentação dos logaritmos pela professora-pesquisadora, em 2005, deu-se na forma $\log_a x = y$. Os alunos realizaram exercícios, na maioria das vezes, propostos dessa forma. Esta apresentação, também, encontra-se presente no livro didático utilizado pela professora e pela turma.

O fato pôde ser constatado no segundo diálogo deste trabalho, quando a professora pediu ao aluno um exemplo de logaritmo e ele lhe deu $\log_2 4 = x$.

Ao mudarmos a apresentação para a forma $y = \log_a x$, foi possível que o aluno tivesse encontrado dificuldades.

Se considerarmos que houve também esta dificuldade, o problema proporcionou ao aluno outro momento de compreensão dos logaritmos.

De acordo com Douady (1984), na medida que certos erros (dificuldades) aparecem como fator de desequilíbrio (contradição, por exemplo), compreende-se que eles podem apresentar um papel produtivo.

Assim, embora, possivelmente, os processos de reflexão dos grupos tenham sido interrompidos por iniciativa própria, a mediação da professora oportunizou que a maioria dos alunos continuasse na busca da solução do problema.

A seguir, destacam-se as soluções realizadas pelos outros grupos, após a intervenção da professora.

Quadro XIII – Respostas dos grupos: G1A1, G4A1, G5A1 e G6A1 – Problema 1 – questão 1a

G1A1	$x \leq 10000$, pois x hectares será positivo. E se x fosse > 10000, x seria negativo e o t não existiria, pois seria negativo.
G4A1	Não respondeu
G5A1	Não existe logaritmo de um número negativo
G6A1	Como o numerador do log é (10000 – x) com x < 10000 a fração é apenas positiva. Um número x qualquer elevado a y qualquer, não pode resultar em um número negativo.

Como podemos notar apenas um grupo deixou de responder à questão proposta. Quando indagado sobre o porquê deixaram de ter respondido à questão, o grupo esclareceu que deixou a questão para resolver ao término das outras e que acabou se esquecendo de resolvê-la.

Os outros grupos de alguma forma resolveram a questão, ou seja, exploraram o problema e justificaram suas soluções.

Terminada a fase de resolução e discussão das respostas, do problema 1 questão **1a**, a professora decidiu que deveria apresentar aos alunos uma forma mais sistematizada na resolução desta questão. Aproveitou a ferramenta (condição de existência da função exponencial) e trabalhou a condição de existência do logaritmando, utilizada pelo grupo G5A1, apresentando aos alunos à seguinte resolução:

$$\log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000} = t \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}25^{t} = \frac{10000 - x}{10000}$$

O resultado $0{,}25^{t}$ será sempre um número real positivo, logo:

$$\frac{10000 - x}{10000} > 0$$

$$10000 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -10000$$

$$x < 10000$$

Neste momento, ficou evidente a preocupação da professora em sistematizar o conhecimento investigado pelo aluno na compreensão de uma das condições de existência dos logaritmos.

De acordo com Douady (1984), na fase de institucionalização:

> O professor passa, desde então, a uma etapa de institucionalização do que é novo e a conservá-lo com convenções em curso, se for necessário, definições, teoremas e demonstrações. Este novo é destinado a funcionar ulteriormente como antigo. (Douady, 1984, p.16)

A condição de existência dos logaritmos poderá ser utilizada como conhecimento antigo na resolução do problema 3.

4.2.1.b Para um tempo igual a 2 anos, determine quantos hectares foram desmatados.

Nesta questão houve 100% de acerto. Todos os grupos utilizaram como ferramenta a noção de logaritmo via equação exponencial. A professora, diante do resultado, decidiu que não havia necessidade de discutir as soluções encontradas por eles.

4.2.1.c Determine o tempo para um desmatamento de 8750 hectares.

Dos seis grupos, quatro resolveram a questão de forma correta; um grupo sentiu dificuldade em encontrar bases iguais para os dois membros da igualdade na resolução da equação exponencial, e o outro determinou o tempo por meio de uma regra de três.

Relato abaixo um diálogo que surgiu quanto à dificuldade da mudança de base. O grupo G2A1 chama a professora.

Aluno 1: Como resolvemos isto? (e aponta para a igualdade $0{,}25^t = 0{,}125$)

Professora: Tem outra forma de trabalhar o decimal?

Aluno 1: Tem, transformar em fração. (O aluno escreve $\left(\frac{25}{100}\right)^t = \frac{125}{1000}$)

Aluno 2: Eu falei.

Aluno 3: Eu prefiro trabalhar com decimal..

Aluno 1: E agora?

Professora: Quando você resolve uma equação exponencial (uma parada na fala da professora, por alguns instantes). O que é importante na resolução de uma equação exponencial?

Aluno 2: Encontrar uma mesma base.

Após esta resposta, a professora deixou grupo, que já se encontrava envolvido na procura de uma mesma base.

Depois de alguns minutos, o grupo voltou a chamá-la.

Aluno 1: Transformamos o decimal em fração e simplificamos para ficar mais fácil. Como vamos fatorar isto? (e mostra a equação $\frac{1^t}{4} = \frac{1}{8}$)

Professora: Como você fatora o 4?

Aluno 1: 2^2.

Professora: E a fração $\frac{1}{4}$.

Aluno 1: $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

O grupo terminou o problema de forma correta.

Nos apontamentos da professora-pesquisadora, foi feita uma observação sobre esse diálogo, pois ela acreditava que a dificuldade do aluno não estava na fatoração, mas na forma incorreta de escrever a sentença: $\frac{1^t}{4} = \frac{1}{8}$, que não tem solução, pois a igualdade é falsa. Se o aluno tivesse escrito a equação da forma $\left(\frac{1}{4}\right)^t = \frac{1}{8}$, talvez não tivesse surgido esta dúvida.

Apesar da percepção da professora sobre este aspecto, em nenhum momento do diálogo, ela deixou transparecer a forma incorreta de escrever a sentença $\frac{1}{4}^{t} = \frac{1}{8}$, para o grupo.

Outro momento que mereceu destaque, foi a hesitação da professora quando o aluno ao apresentar a equação $\left(\frac{25}{100}\right)^{t} = \frac{125}{1000}$, perguntou: “E agora?”

Pela fala inicial da professora, parecia que ela iria dizer ao grupo o que ele deveria fazer. A pausa foi um momento de reflexão para refazer sua resposta.

Segundo Ponte:

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. (Ponte et al, 2005, p. 47)

No diálogo anterior, acreditamos que a professora conseguiu propiciar ao grupo um momento de reflexão, levando-o à superação das dificuldades e, consequentemente, à solução do problema.

Douady (1984), ao se referir quanto ao entendimento do conhecimento matemático, diz que um ensino é eficaz na medida em que ele dá lugar às reflexões do aluno no sentido de reconhecer, dar condições de adaptação, integração e interação aos conhecimentos matemáticos.

Após a atividade **1c**, os relatores de cada grupo voltaram ao quadro-negro para mostrarem os resultados obtidos. A professora-pesquisadora, antes de iniciar as discussões, propôs aos dois grupos, G3A1 e G1A1 que obtiveram um resultado incoerente, refletir e tentar procurar o erro. Depois de alguns minutos, o redator do grupo G3A1 foi à lousa e mostrou para a turma onde estava o erro e refez o exercício.

O grupo G1A1 não conseguiu resolver o problema. A professora pediu que a classe ajudasse os colegas na solução.

Abaixo, é apresentada a resolução escrita pelo grupo G1A1 na lousa e as propostas da classe para resolução do problema.

Resolução do grupo G1A1

$$0,25^{t} = \frac{10000 - 8750}{10000}$$

$$0,25^{t} x 10^{4} = 1250$$

$$0,25^{t} x 10^{4} = 1,25 x 10^{-3}$$

$$\frac{0,25^{t}}{1,25} = \frac{10^{4}}{10^{-3}}$$

$$\frac{0,25^{t}}{1,25} = 10^{-1}$$

$$\frac{(0,5^{2})^{t}}{1,25} = 10^{-1}$$

A classe identificou três erros cometidos pelo grupo G1A1. O primeiro referiu-se à notação científica do número 1250. Segundo a classe, o número 1250 deveria ser escrito na forma $1250 = 1,25 x 10^{3}$.

De acordo com a classe, o segundo erro apontado estaria na operação inversa do número 10^{4}.

A nosso ver, a classe referia-se à equivalência não procedente das linhas 3 e 4 da resolução apresentada, pois $0{,}25^{t}x10^{4} = 1{,}25x10^{-3}$ não equivale a $\frac{0{,}25^{t}}{1{,}25} = \frac{10^{4}}{10^{-3}}$.

O terceiro erro mencionado pela classe, referiu-se à divisão de potências de mesma base. A divisão $\frac{10^{4}}{10^{-3}}$ não resulta 10^{-1} mas, $10^{4-(-3)} = 10^{7}$.

O redator do grupo voltou à lousa, corrigiu os erros e reescreveu a solução, dando continuidade ao exercício. Abaixo transcrevo a resolução escrita pelo redator do grupo G1A1, após as intervenções da classe.

$$0{,}25^{t} = \frac{10000 - 8750}{10000}$$

$$0{,}25^{t}\ 10^{4} = 1250$$

$$0{,}25^{t}10^{4} = 1{,}2510^{3}$$

$$\frac{0{,}25^{t}}{1{,}25} = \frac{10^{3}}{10^{4}}$$

$$\frac{0{,}25^{t}}{1{,}25} = \frac{10^{3}}{10^{4}}\ ;\ \frac{0{,}25^{t}}{1{,}25} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\left(0{,}5^{2}\right)^{t}}{1{,}25} = \frac{1}{10}$$

Depois de algumas tentativas, a turma e o grupo G1A1 decidiram que o caminho proposto por este grupo era muito trabalhoso, ou seja, trabalhar com a notação científica não foi um bom caminho. A professora aceitou a opinião da classe e do grupo e finalizou a discussão.

4.2.1.d No período de 6 meses a 1 ano, qual será a área desmatada?

Nesta atividade, a professora-pesquisadora praticamente não interveio, segundo ela, as ferramentas que poderiam ser utilizadas na a resolução do problema já tinham sido consolidadas pelos exercícios anteriores, portanto, neste momento o grupo teria a oportunidade de vivenciar uma investigação, sem intervenção direta da professora, frente a um novo saber que se apresentava, como ferramenta implícita, as inequações logarítmicas.

Na resolução deste problema, os grupos não solicitaram a ajuda da professora.

Após as soluções dos problemas terem sido colocadas no quadro-negro, a professora solicitou que cada grupo explicasse como tinha atingido o objetivo.

Relato um momento da discussão que me pareceu significativa no quadro teórico adotado.

A professora-pesquisadora questionava a forma de pensar que o grupo G1A1 tinha utilizado na resolução do exercício **1d**. Antes de relatar o diálogo, apresento a resposta do grupo para esse problema.

Quadro XIV – Resposta do grupo G1A1 – Problema 1 – questão 1d

5000 hectares. (Utilizaram para a resolução um tempo igual a 6 meses.)

Vamos ao diálogo:

Aluno: (G1A1)	Fizemos a diferença entre 1 ano e 6 meses. Sabemos que estamos errados, pois o problema pediu de 6 meses a 1 ano e não entre 6 meses e 1 ano.
Professora:	Como seria o enunciado para este tipo de resolução?
Aluno: (G1A1)	Qual foi o desmatamento em um período de 6 meses?

Aluno: (G4A1)	Ta errado
Professora:	Por quê?
Aluno: (G4A1)	Não dá para responder.
Professora:	Por que não dá para responder?
Aluno: (G4A1)	Porque a diferença entre 6 meses e 1 ano e entre 2 anos e 2 anos e meio é diferente.
Professora:	Como você poderia explicar isto?
Aluno: (G4A1)	Esta função pode ser transformada numa exponencial.
Professora	Sim.
Aluno: (G4A1)	É só fazer o gráfico e olhar.
Professora:	Como está este gráfico no Plano Cartesiano?
Aluno: (G4A1)	É uma curva decrescente. (E mostrava com a mão a curva da exponencial) A professora fez um esboço do gráfico na lousa.
Professora:	Como você justificaria ela ser decrescente?
Aluno: (G4A1)	A base da exponencial é um número menor que 1.
Professora:	E agora?
Aluno: (G4A1)	Podemos verificar no gráfico que em cada intervalo de tempo há variação diferente quanto ao número de hectares.

Após este diálogo, uma aluna comunicou à classe que não conseguia enxergar no gráfico a justificativa do aluno. A professora voltou ao grupo-sala e perguntou quem teria outra forma de explicação que permitisse a esta aluna uma melhor compreensão da situação.

Um aluno sugeriu que ela calculasse o desmatamento ocorrido no período de 6 meses e comparasse o desmatamento verificado no período do exercício que tinha sido resolvido.

Neste diálogo, a professora-pesquisadora com seus questionamentos oportunizou ao aluno expor seu raciocínio e validar a observação feita por ele mesmo, na discussão realizada no grupo sala.

Não podemos também deixar de citar a interação entre domínios que este aluno realizou, quando usou o gráfico da função exponencial para validar sua observação.

Conforme refere Maranhão (2002), é precisamente pelo fato dos conhecimentos de certo domínio não serem suficientes para avançar, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios.

O quadro abaixo apresenta as respostas dos alunos referentes a questão.

Quadro XV – Respostas dos grupos: G1A1, G2A1, G3A1, G4A1, G5A1 e G6A1 – Problema 1 – questão 1d

G1A1	5000 hectares. (utilizaram para a resolução, um tempo igual a 6 meses)
G2A1	Não conseguiram terminar a resolução da equação exponencial. (utilizaram para a resolução um tempo igual a 1,5 anos)
G3A1	9531,5 hectares (utilizaram para a resolução um tempo igual a 1 ano mais 6 meses)
G4A1	De 5000 a 7500 hectares desmatados entre 6 meses e 1 ano
G5A1	De 5000 a 7500 hectares desmatados
G6A1	$S = \{ x \in R \quad 5000 \leq x < 7500 \}$

Todos os grupos apresentaram respostas para esta questão. Quatro grupos usaram a linguagem natural, e o grupo G6A1, a linguagem algébrica na resposta. A resposta dada pelo grupo G6A1 demonstrou a habilidade deste grupo, ou de algum aluno dele, quanto à linguagem matemática.

Todos os grupos utilizaram como ferramenta a definição do logaritmo via equação exponencial para resolução da inequação logarítmica.

Para o aluno:

> o caráter de ferramenta pode ser implícito ou explícito. [...]. Um aluno é confrontado com um problema que ele deve resolver. Isto faz parte do seu contrato com o professor. Suas concepções próprias o permitem se engajar num procedimento graças às suas noções e técnicas que ele sabe utilizar, a propósito das quais ele pode fazer declarações, mas ele não conhece necessariamente as condições e os limites de seu emprego. (Douady, 1984, p.11)

Os alunos utilizaram o logaritmo como ferramenta implícita, pois, nesse momento, eles ainda não poderiam formular e justificar o emprego dessa ferramenta na resolução das inequações logarítmicas.

4.3 Análise Global do problema 1

No desenvolvimento da questão **1a** do problema 1, constatamos uma falha nos conhecimentos sobre logaritmos.

Na elaboração das situações, a professora-pesquisadora apontou esse conhecimento como antigo, ou seja, ele funcionaria como ferramenta explícita na aquisição de um novo conhecimento, as inequações logarítmicas.

Douady (1984) refere-se que uma ferramenta é considerada explícita, quando o aluno pode formulá-la e justificá-la na resolução do problema.

A revisão dos conhecimentos prévios, realizada pela professora, não oportunizou aos alunos a superação das dificuldades quanto à aprendizagem desse conhecimento.

Para Maranhão (2002), é possível haver certa diferença entre o que a estrutura curricular (ou que o professor) supõe que os alunos conheçam e o que realmente cada aluno tem de conhecimentos em condição de usar em novas aprendizagens (disponíveis). Isso deve ser levado em conta na condução de uma seqüência de situações implicadas na dialética-ferramenta-objeto.

Se considerarmos o objetivo citado pela professora-pesquisadora em relação às questões 1a, 1b e 1c do problema 1, constatamos sua preocupação na verificação dos conhecimentos antigos antes de iniciar a introdução do novo conhecimento (inequações logarítmicas).

Por outro lado, a dificuldade inicial encontrada pelos alunos não impediu que eles continuassem a resolução da situação proposta pela professora. A maioria empenhou-se em resolver os problemas. As análises mostraram que as intervenções da professora-pesquisadora promoveram a continuidade do envolvimento do aluno nesta pesquisa.

Outro fato que nos chamou a atenção, foi a dificuldade apresentada pela professora-pesquisadora no momento inicial da pesquisa, quanto à forma de orientação de seus alunos.

Até que ponto o professora-pesquisadora pode orientar seu aluno sem tolher sua liberdade?

Acreditamos que a resolução da questão 1a proporcionou aos alunos um momento rico de aprendizagem. Esta crença pôde ser constatada no desenvolvimento das questões seguintes (1b, 1c e 1d).

Os alunos trabalharam com maior autonomia na resolução destas questões, o que lhes possibilitou vivenciar uma situação de investigação, proporcionando-lhes melhor compreensão das noções em jogo.

Podemos, também, verificar nos diálogos apresentados pela professora com os grupos e com a classe, que no desenrolar da pesquisa ela foi desenvolvendo melhores estratégias na intervenção com seus alunos, isto é, maior adequação, segundo o quadro teórico empregado na investigação.

A fase de discussão dos resultados do trabalho realizado constituiu-se em um momento rico de aprendizagem aos alunos, pois eles puderam partilhar seus conhecimentos e colocar em confronto suas estratégias, conjecturas e validações.

Segundo Ponte *et al*:

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. (Ponte et al , 2005, p.41)

É necessário esclarecer que esta pesquisa realizou seis situações didáticas na classe, entretanto, neste trabalho apresentamos a análise da primeira situação didática realizada pelos alunos. Esta escolha justifica-se por considerarmos estes momentos suficientes para representar as ocorrências da classe e sua reflexão sobre elas.

CAPÍTULO 5

REFLEXÕES DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

No desenvolvimento das situações didáticas, pude constatar que, apesar das dificuldades iniciais na investigação em torno da resolução dos problemas, os alunos aderiram com entusiasmo às situações propostas. Este entusiasmo contribuiu, para que pudessem organizar e analisar os dados do enunciado, formular e testar conjecturas, atingindo uma nova concepção sobre o modo de aprender Matemática.

Para confirmar minha constatação, transcrevo abaixo algumas respostas escritas pelos alunos quando, ao final das situações didáticas, foi-lhes solicitado que fizessem uma análise crítica das aulas.

No momento, apresento o relato de apenas oito alunos, mas gostaria de citar que 91% dos alunos que participaram da pesquisa gostaram das aulas. A escolha dos depoimentos justificou-se por serem, a meu ver, aqueles que melhor esclareceram o porquê de suas opiniões.

Aluno 1: Eu gostei muito porque nós tivemos que resolver os exercícios sozinhos com apenas alguns “toques” da Sueli.

Aluno 2: Em particular adorei (...) pude melhorar a minha atenção aos detalhes.

Aluno 3: Durante essas aulas amadurecemos nosso conhecimento sobre logaritmos.

Aluno 4: Acho que foi muito bom. Nós ajudamos a professora e ela a nós, foi muito produtivo. Aprendemos com mais facilidade.

Aluno 5: As aulas foram muito boas, pois, todos do grupo colocaram suas propostas para a resolução do problema.

Aluno 6: As aulas foram melhores que as tradicionais. Tivemos a oportunidade de discutir e encontrar relações por nós mesmos. Tudo isso fez a aula ser mais produtiva e com mais interessados em participar. Todas as aulas deveriam ser como essas.

Aluno 7: Foram muito melhores, pois entendemos como buscar a solução e não decorar, aprendemos a trabalhar e testar todas as idéias e analisar nossas conclusões.

Aluno 8: Minha análise é que nas últimas aulas, consegui discutir minhas idéias e tirar dúvidas.

Diante das falas, outro fato que me chamou a atenção, referiu-se à mudança de visão do aluno em relação ao papel do professor. Segundo eles, o professor passa a ser um companheiro de aprendizagem, "*nós ajudamos a professora e ela a nós* e também um orientador", *"nós tivemos que resolver os exercícios sozinhos com apenas alguns toques da Sueli".*

O trabalho em grupo foi também relevante, pois contribuiu para que os alunos, na medida que interagiam com os colegas, podiam apresentar suas próprias idéias e, além disso, percebiam que a resolução dos problemas podia muitas vezes, ser realizada sob diferentes abordagens.

Vale salientar que, no decorrer das aulas, alguns alunos pediram para trocar de grupo, o que lhes foi permitido. Acredito que devemos fazer mudanças na medida que estas privilegiem o aprendizado do aluno.

Transcrevo abaixo algumas opiniões dadas por outros alunos, quanto ao trabalho em grupo. A seleção destes alunos obedeceu ao mesmo critério dos depoimentos anteriores.

Aluno 9: Minha análise é que nas últimas aulas (...) consegui discutir minhas idéias e tirar muitas dúvidas, isso foi bom, pois estamos em grupo e eu acho que trabalhar em grupo é muito bom e ajuda bastante.

Aluno 10: (...) aulas em grupo são muito interessantes, pois "falamos a mesma língua", ou seja, nos entendemos bem.

Aluno 11: Foi uma maneira interessante de aprendizagem, de se aprender com os amigos.

Aluno 12: Eu gostei muito, porque tive a oportunidade de sentar com pessoas que entendem a matéria com mais dificuldade que eu, e outras que têm muito mais facilidade, então a gente pode discutir, fazer junto e cada um superar suas dificuldades.

Aluno 13: Interagir com outros pontos de vista é essencial para compreender as resoluções de diferentes enunciados.

Aluno 14: Essas últimas aulas foram descontraídas, pois fizemos grupos, (...) e ainda aprendemos no final. Mais o mais divertido do ponto de vista intelectual foi que eu fiquei no grupo da Ana Paula, uma aluna nova que chegou na mesma conclusão que eu, em vários problemas, com um pensamento completamente diferente, por isso acho que esse trabalho, esse projeto, foi muito lucrativo (...).

As reflexões acima e a análise apresentada no Capítulo 4 levam-me a acreditar que os problemas propostos oportunizaram aos alunos a investigação, levando-os a formulação de conjecturas e sua validação, atendendo, portanto, a um dos objetivos desta pesquisa.

Esta forma de aprender matemática fez com que eles mudassem sua visão da Matemática, ou ainda, a aprendizagem da Matemática passa a ser domínio de todos e não apenas, como eles dizem, para os “inteligentes”.

Em relação a meu trabalho como professora e investigadora diante de uma nova prática pedagógica, esta pesquisa mostrou-se como uma experiência relevante na medida que ajudou mudar minha concepção do que é ensinar. Não basta que eu entre na sala de aula, transmita o conteúdo, faça alguns exercícios e corrija a lição, não há uma aprendizagem real sem a interação do aluno, não se atinge o processo de formação e comunicação do conhecimento matemático.

Como é rica esta interação. Percebi a importância de ouvir meu aluno e observar a criatividade de cada um na resolução dos problemas.

Nesta interação, fui adquirindo maior habilidade na forma de questioná-lo. Ao repetir a pergunta que me fazia levava-o, a uma mudança rápida de posição. Este era o contrato didático que tinha se estabelecido entre nós no decorrer das aulas “tradicionais”. Esta situação não me permitia compreender seu modo de pensar, não lhe dando condições, para que ele trilhasse seu próprio caminho na resolução do problema.

Ao final desta experiência, ficou claro que as aulas de abordagem investigativa tornam o ensino de Matemática mais dinâmico. Este dinamismo favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno diante da

Matemática, que, por sua vez o conduz a uma maior confiança e autonomia frente à aprendizagem.

Esta experiência representou um rico momento de reflexão quanto ao ensino da Matemática; um rico momento de verificação quanto a meus conhecimentos de Matemática e, também, um rico momento de aprendizagem. Neste sentido a aprendizagem, minha e a de meu aluno, apresentou-se como uma via de mão dupla: o aluno aprende os procedimentos sob a orientação do professor e o professor aprende com as questões formuladas pelos alunos.

Ao término da pesquisa, infelizmente, tive de voltar à minha velha prática pedagógica. O material apostilado adotado pelo colégio impõe sobre os professores um compromisso, como o cumprimento do conteúdo, pois a cada período ocorre uma troca de material para o aluno que exige do professor, não só o término da apostila antiga como a utilização da nova apostila. A respeito disso, transcrevo abaixo a opinião de um aluno em relação à importância do cumprimento do conteúdo, advindo da pesquisa que realizei sobre as aulas durante a fase deste estudo:

Aluno 15: Hoje em dia para dar todo o conteúdo e tempo de revisar para o Vestibular, as aulas têm que ser rápidas. Este novo tipo de aula não responde a este quesito. Mas não é por isso que não é mais interessante e a matéria é mais absorvida por nós.

O colégio, por sua vez, pressiona o professor a este cumprimento.

Refletindo sobre o assunto com minha orientadora ficou claro que os objetivos institucionais do colégio mudaram. Estes, por sinal, provavelmente, correspondam à grande maioria dos pais dos alunos do colégio.

Portanto, eu não poderia mais atender aos propósitos da escola e ela aos meus. Por isso, atualmente, trabalho em outro colégio com propósitos similares aos que atingi pela vivência desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresenta-se aqui um resumo do trabalho, relembrando: seu objetivo, as questões que lhe deram origem, o contexto teórico e a metodologia adotada. Em seguida, para responder às questões de pesquisa, são mostrados os resultados e as conclusões mais relevantes sobre as mudanças das concepções e atitudes dos alunos e da professora-pesquisadora diante das situações didáticas apresentadas. Finalmente, são destacadas algumas implicações e recomendações para futuras pesquisas.

Sobre o trabalho

Este trabalho relatou uma experiência pedagógica, realizada com uma turma da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular, alunos da professora-pesquisadora. Esta pesquisa teve como objetivo analisar as relações pedagógicas estabelecidas entre professor, aluno e saber matemático no desenvolvimento da resolução de problemas envolvendo desigualdades e inequações logarítmicas.

A opção por este tema foi motivada pelas dificuldades que os alunos e a professora-pesquisadora apresentavam no ensino e aprendizagem deste tópico.

Tomou-se como referencial teórico a noção ***dialética-ferramenta-objeto e interação entre domínios*** da pesquisadora francesa Règine Douady (1984)

Para esta pesquisadora, o conhecimento matemático constrói-se dentro de situações didáticas, envolvendo o tripé professor, aluno e saber, nas quais a classe simula uma sociedade de investigadores em atividade. Estas situações contribuirão para que o aluno construa seu próprio conhecimento na medida que formula conjecturas, hipóteses e argumentos para sustentar sua tese e validar seu conhecimento.

Para analisar as situações didáticas desenvolvidas ao longo das aulas da professora-pesquisadora foram elaborados e adaptados seis problemas, envolvendo as inequações logarítmicas, segundo o quadro teórico deste trabalho.

A investigação assumiu uma abordagem qualitativa e os principais instrumentos de análise foram: gravações em fita cassete de alguns diálogos realizados com os alunos e, também, a discussão geral, realizada após cada atividade. Além desses dados, utilizamos também para a análise as produções escritas dos alunos nas aulas onde realizaram a resolução dos problemas e as reflexões feitas pelos participantes, alunos e professora-pesquisadora Utilizamos, também, na análise dos dados a noção de ***dialética-ferramenta-objeto e interação entre domínios*** de Douady (1984). É preciso salientar que, neste trabalho, destacamos a análise da primeira situação didática realizada com os alunos e as demais análises serão objeto de futuras publicações.

Respondendo às questões de pesquisa

Neste momento, são apresentadas de forma sucinta as relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e o saber matemático na resolução dos problemas, envolvendo as desigualdades e inequações logarítmicas.

Aluno e saber matemático

Os alunos, apesar das dificuldades iniciais, foram com entusiasmo, questionando o professor, discutindo com os colegas e desenvolvendo estratégias para resolver os problemas. Percebemos que durante o desenvolvimento na resolução dos problemas eles foram adquirindo maior autoconfiança e autonomia na medida que foram solicitando cada vez menos a presença da professora-pesquisadora, para que esta respondesse a seus questionamentos e validasse suas trajetórias.

Outro fato que me chamou à atenção foi a mudança de compreensão da Matemática. No início do estudo, a maioria dos alunos acreditava que sua compreensão era privilégio de poucos, mas, ao final do trabalho relatam que: "*amadurecemos nossos conhecimentos*", "*pudemos discutir e encontrar as relações por nós mesmos*", "*tivemos maior interesse em participar*", "*foi muito produtivo*", entre outros.

Podemos, portanto, concluir que a resolução dos problemas em uma abordagem investigativa contribuiu para que o aluno evoluísse na compreensão que tinha em relação à Matemática.

Aluno e Professor

As situações didáticas propostas possibilitaram, também, aos alunos, uma visão diferente da função do professor em sala de aula. No início do estudo, o professor limitava-se a transmitir conteúdos matemáticos, realizar alguns exercícios padrões e corrigir as lições propostas. Ao final do estudo notou-se que o aluno passou a ver o professor como um companheiro de aprendizagem, *"nós* *ajudamos a professora e ela a nós"*, *"nós tivemos que resolver os exercícios sozinhos com apenas alguns toques da Sueli*".

As situações didáticas propostas oportunizaram que os alunos tivessem um contato com uma professora de atitude diferente em relação ao processo usual de ensino e aprendizagem da Matemática.

Professor e prática pedagógica

Ao vivenciar as situações didáticas propostas neste trabalho a professora-pesquisadora pôde analisar mais atentamente sua prática pedagógica. Percebeu a importância de ouvir o aluno para compreender seu modo de pensar e desenvolver melhores estratégias na intervenção com eles.

Apesar da dificuldade inicial, da professora-pesquisadora, na fase de inicial deste estudo, conseguiu levar os alunos a ultrapassar certos bloqueios e tornar mais rica a investigação na resolução dos problemas.

Aluno e aluno

O trabalho em grupo foi bastante relevante, pois, além de tornar as aulas mais interessantes e envolventes, permitiu que os alunos apresentassem suas próprias idéias e perceberam que a resolução de problemas pode ser realizada sob diferentes abordagens. Além disso, ensinou aos alunos uma das competências que deve ser desenvolvida pela escola, o trabalho em equipe.

Outro momento que se faz importante destacar, refere-se à fase de discussão dos resultados do trabalho realizado que propiciou aos alunos partilhar seus conhecimentos e colocar em confronto suas estratégias, conjecturas e validações.

Considerações Finais

Diante das considerações acima citadas, este estudo apresentou indícios de que a resolução de problemas numa abordagem investigativa representa um contexto rico, desafiador e estimulante, tanto ao aluno como ao professor. Para o aluno, porque este passou a ser o construtor de sua própria aprendizagem, na medida que lhe permitiu mobilizar conhecimentos, desenvolver sua capacidade de gerenciar informações, ampliar seus conhecimentos e procedimentos matemáticos, mudando sua concepção de aprendizagem. Ao professor, porque pôde refletir sobre sua prática pedagógica, o que lhe permitiu mudar a visão do que é ensinar.

Neste trabalho, ficou claro que a resolução de problemas por meio de uma abordagem investigativa proporcionou aos alunos da pesquisa o desenvolvimento de uma melhor compreensão da Matemática.

No entanto, tendo em consideração a abordagem qualitativa adotada na pesquisa, não foi possível generalizar as conclusões obtidas neste estudo. Acreditamos ser necessário o desenvolvimento de estudos análogos com alunos pertencentes a contextos socioeconômicos diferentes.

Caso estes estudos confirmem as conclusões obtidas neste trabalho, deveremos, então, investigar de que forma a resolução de problemas, em uma abordagem investigativa, poderá ser introduzida no currículo e como deveremos preparar os professores diante desse currículo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais:* ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: *Didáctica das Matemáticas,* BRUN, Jean. (org). Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Yves, BOSH, Marianna, GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas- O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre. Ed. Artmed, 2001.

D'AMBROSIO**,** Ubiratan. *Educação Matemática.* 2ed. Papirus**.** Campinas, 1997.

DOUADY, R. *Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Thèse de Doctorat d' Etat (specialité didactique des mathematiques***)**. Paris, Université Paris VII, p. 1-28, 1984.

DOUADY, Régine*. Evolução da relação com o saber em Matemática: uma crônica sobre cálculo mental.* Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 62, abr / jun. 1994. Disponível em: <www.dominiopublico.gov.br/dowload/texto/me000635. Pdf#search=%22Regine%20Douady%22. Acesso em : 08 jun. 2006.

DOUADY, Regine; GLORIAN, Marie Jeanne Perrin. *Un processus d'aprendissage du concept d'aire de surface plane.* Educational studies in Mathemmatics. 20: p.387-424, Kluwer Acadimic Plublisher. Printed in Netherlands, 1989.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. *Um estudo das potencialidades Pedagógicas das Investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico* Faculdade de Educação, Unicamp, Brasil. Fiorentini, D. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CIBEM V – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Porto. v. 1. p. 1-13, 2005.

FIORENTINI, Dario. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. In. Revista Zetetiké, Campinas, SP, ano 3, n. 4, p. 1- 37, 1995.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A; MIGUEL, A. *Contribuições para um Repensar a Educação Algébrica Elementar.* Proposições, Campinas, FE/UNICAMP,v.4, n.1, p. 78-91, mar. 1993.

FONTALVA, Gerson Martins. *Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio.* Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006, 134p.

FREITAS**,** José Luiz de. M., Situações Didáticas**.** In: MACHADO**,** S. D. A. *Educação Matemática: Uma introdução***.** São Paulo: EDUC, p. 65-87, 2002.

GÓMEZ, Pedro. *Resumen y comentários al artículo***:** Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches em Didactique des Mathématiques***,** *7(2), 5-31***.** Disponível em:
<http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/resumes/douady(86)/douady(86).html>.
Acesso em: 30 de jan. 2006.

KARRER, Monica. *Uma Seqüência para Introduzir o Conceito de Logaritmos Significativamente.* Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999. 1 v. 237 p.

MARANHÃO, Maria Cristina S. A., *Uma engenharia didática para a aprendizagem de concepção de tempo*. Tese (Doutoramento em Psicologia da Educação) – programa de Estudos Pós Graduados em Psicologia da Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1996.

MARANHÃO, Maria Cristina S. A. Dialética-ferramenta-objeto**.** In: MACHADO**,** S. D. A. *Educação Matemática: uma introdução***.** 2. ed**.** São Paulo: EDUC, p. 115-134, 2002.

MARANHÃO, Maria Cristina S. A., MACHADO, Silvia D. A., COELHO, Sônia P. *Projeto: o que se entende por álgebra?* VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, jul. 2004.

MARINHO, Alzir Foumy. *Inequação: a construção do seu significado.* Dissertação (mestrado em Educação Matemática), Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1999, 1 v. 178 p.

NCTM (1991) *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE. (original em inglês, publicado em 1989).

ONUCHIC**,** Lourdes de la Rosa, ALLEVATO**,** Norma Suely G. Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de *problemas*. In**:** BICUDO**,** Maria Aparecida, V. BORBA**,** Marcelo de, C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento***.** São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 128p.

PERRENOUD, P. *Construir as Competências Desde a Escola***,** Trad. Bruno Charles Magne. Porto Alegre. Artmed, 1999.

PESCUMA, Derna; CASTILHO, Antonio Paulo F. de. *Referências bibliográficas: um guia para documentar pesquisas.* São Paulo: Olho d'Água, 2003.

PESCUMA, Derna; CASTILHO, Antonio paulo F. de. *Trabalho acadêmico – o que é? como fazer?: um guia para suas apresentações.* São Paulo: Olho d'Água, 2005.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemática na sala de aula*. *"Tendências em Educação Matemática*". Belo Horizonte. Autêntica, 2005.

SEGURADO, Irene, PONTE, João Pedro da. *Concepções sobre a Matemática e Trabalho Investigativo*. Projeto: Matemática para todos – Investigações na sala de aula. Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/ >. Acesso em: 14 maio. 2006.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do trabalho científico.* 22. ed. rev. amp. São Paulo: Cortez, 2002

FONTALVA, Gerson Martins. *Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio.* Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TSAMIR**,** P; ALMOG, N, TIROSH**.** *D. Students' solutions of inequalities. Proceedings of PME 22*. Stellenbosch, South Africa, vol. IV, pp. 129-136, 1998.

TRALDI, JR, A. *Sistema de Inequações do 1° grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações***.** Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. 1 v., 112 p.

ANEXOS

ANEXO 1 – PROBLEMA – 1

1) Os técnicos do Ibama (Instituto do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis), avaliando a velocidade de desmatamento de certa região, relacionaram, através da fórmula a seguir, o número x de hectares que serão desmatados em t anos:

$$t(x) = \log_{0,25} \frac{10000 - x}{10000}, \text{com } x < 10000$$

1a) Faça uma análise da informação x < 10000.

1b) Para um tempo igual a 2 anos, determine quantos hectares serão desmatados.

1c) Determine o tempo para um desmatamento de 8750 hectares.

1d) No período de 6 meses a 1 ano, qual será a área desmatada?

ANEXO 2 – PROBLEMA – 2

2) Responda: Se 3 > 2, então $\log_a 3 > \log_a 2$, para **a** pertencente ao conjunto dos números reais. Justifique sua resposta.

ANEXO 3 – PROBLEMA – 3

3) Complete as tabelas abaixo.

3a) Baseando-se nas tabelas abaixo, avalie sua resposta e sua justificativa para a questão 2.

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
1		
2		
3		
5		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
-1		
-2		
-3		
-4		

a	$\log_a 3$	$\log_a 2$
0		
1/2		
1/3		
2/3		

ANEXO 4 – PROBLEMA – 4

4) Complete:

Se a base a > 1 e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ ________ x_2.

Se a base estiver entre 0 e 1, isto é, 0 < a < 1 e $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1$ _____ x_2

ANEXO 5 – PROBLEMA – 5

5) Numa fábrica, o lucro y originado pela produção de x peças é dado, em milhares de reais, pela expressão:

$y = \log_{10}(100 + x) + k$, sendo k uma constante real.

5a) Sabendo-se que não havendo produção não há lucro, determine k.

5b) Determine o número de peças necessário para se obter um lucro superior a 1000 reais.

ANEXO 6 – PROBLEMA – 6

6) As populações de duas cidades A e B são dadas em milhares de habitantes pelas expressões: A = $\log_2(1+t)^2$ e B = $\log_2(4t+4)$ em que a variável t representa o tempo em anos.

6a) Complete a tabela abaixo.

Tempo (anos)	População da cidade A	População da cidade B
1		
7		
15		

6b) Determine em que instante a população de uma das cidades é maior ou igual à da outra.

ANEXO 7 – Aula 62

Aula 62

nesta aula

Logaritmos

- Exercícios

em classe

1. Classifique em V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações:
   a) ( ) $\log_2 7 > \log_2 5$
   b) ( ) $\log_{0,5} 7 < \log_{0,5} 5$
   c) ( ) $\log_\pi 3 < \log_\pi 2$

2. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:
   a) $\log_2 x < \log_2 5$
   b) $\log_{0,9} x > \log_{0,9} 5$
   c) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 3) \geq \log_{\frac{1}{3}} 10$

em casa

Consulte

Livro-texto 1 – Capítulo 16
Caderno de Exercícios 1 – Capítulo 16

Tarefa Mínima

Faça o exercício 34.

Tarefa Complementar

Faça os exercícios de 35 a 37.