Ana Célia da Costa Loreto

"Os Critérios de Aceitabilidade Geométrica e a Representação de Curvas em *La Géométrie* de René Descartes"

História da Ciência

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

São Paulo

2001

Ana Célia da Costa Loreto

“Os Critérios de Aceitabilidade Geométrica e a Representação de Curvas em *La Géométrie* de René Descartes”

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em História da Ciência sob a orientação do Professor Doutor Roberto de Andrade Martins.

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

São Paulo

2001

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadores ou eletrônicos.

Assinatura: ____

Local e Data: ____

.

Mas, assim que terminei todo esse ciclo de estudos, no termo do qual se costuma ser acolhido nas fileiras dos doutos, mudei inteiramente de opinião. Pois encontrava-me enredado em tantas dúvidas e erros, que me parecia não ter tirado outro proveito, ao procurar instruir-me, senão o de ter descoberto cada vez mais a minha ignorância.

René Descartes

Ao meu querido esposo Armando

e às minhas adoráveis filhas Cecilia e Daniela

Agradecimentos

O meu primeiro agradecimento é para todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pela sua dedicação, competência e paciência.

Agradeço aos professores doutores Ubiratan D' Ambrosio e José Luiz Goldfarb, pela leitura crítica e sugestões apresentadas durante o exame de qualificação.

Agradeço especialmente aos professores doutores Roberto de Andrade Martins, e Lilian Al-Chueyr Pereira Martins, pelas críticas, sugestões e auxílio prestados na execução deste trabalho.

Ana Célia da Costa Loreto

aloreto@uol.com.br

São Paulo, 30 de junho de 2001.

Resumo

Este estudo analisa os critérios de aceitabilidade geométrica e a representação de curvas, presentes no ensaio *La Géométrie* de René Descartes, considerando o contexto histórico e científico em que essa obra foi escrita, na primeira metade do século XVII. O objetivo principal é verificar o que Descartes considerava como sendo uma representação suficiente de uma curva; que tipos de representação de curvas ele usou e quais curvas deviam ou não ser aceitas em geometria, de acordo com os seus critérios de seleção.

A dissertação discute primeiramente a educação jesuítica recebida por Descartes e a influência exercida pelo escolasticismo na sua formação intelectual. Depois descreve a simplificação da notação algébrica e alguns passos importantes do desenvolvimento histórico da álgebra e da geometria, desde o final do século XV até o surgimento de *La Géométrie.*

O exame das *Regulae ad Directionem Ingenii* serviu ao objetivo de esclarecer o significado do processo construtivo da geometria cartesiana. Resulta que a classificação cartesiana das curvas é conseqüência direta dos princípios gerais do método analítico cartesiano, tal como foi exposto nas *Regulae.*

Descartes não definiu explicitamente como geométricas apenas as curvas que admitissem equações algébricas. Em *La Géométrie* ele fez uso de dois critérios, o algébrico e o instrumental, sendo o último baseado no uso de instrumentos com os quais a curva pode ser traçada. No entanto, Descartes parece ter percebido que não há equivalência entre a classificação das curvas de acordo com o grau de suas equações e a classificação dos problemas geométricos segundo a facilidade de sua construção.

Palavras-chave: René Descartes, Geometria, Curvas.

Abstract

This work analyses Descartes' different criteria for geometrical acceptability and representation of curves, as they are found in his book *La Géométrie*, taking into account the historical and scientific contexts of the first half of the seventeenth century, when the work of Descartes was written. The main purpose is to find out what Descartes regarded as a sufficient representation of a curve; which ways of representing curves he used; and which curves were geometrically admissible or inadmissible, according to his selection criteria.

This dissertation first discusses Descartes' Jesuitic education and the influence of scholastic thinking over his thought. Next, it describes some important steps in the historical development of algebra and geometry, and the improvement of the algebraic notation from the late fifteenth century up to the appearance of Descartes' *Géométrie*.

The analysis of the *Regulae ad Directionem Ingenii* helped to elucidate the meaning of the constructive procedure of Cartesian geometry. It was found that Descartes' classification of curves was a direct outcome from the general principles of the Cartesian analytic method, as it appears in the *Regulae*.

Descartes did not explicitly characterize "geometrical" curves as those admitting algebraic equations. He used two criteria for geometrical acceptability of curves in the *Géométrie*, namely the algebraic criterion and the instrumental one, the latter being grounded on the use of instruments by which the curve could be traced. Nevertheless, Descartes was seemingly aware that the classification of curves according to the degree of their equations and the classification of geometrical problems according to the way they are built are not equivalent.

Key words: René Descartes, Geometry, Curves.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um ponto de vista geralmente aceito e difundido entre os matemáticos é o de que a obra *La Géométrie* de René Descartes [1] teria o mérito da criação da chamada "geometria analítica". No entanto, esta obra não pode ser considerada como um primeiro texto sobre este assunto. Não aparecem aí, explicitamente, os eixos ou sistemas de coordenadas que agora são denominadas "cartesianas". Não são deduzidas equações da linha reta e de secções cônicas de uma forma sistemática, embora haja algumas equações do segundo grau que são interpretadas como representativas de secções cônicas. Além disso, uma grande parte deste livro consiste em uma teoria de equações algébricas, contendo inclusive a conhecida "regra de Descartes" para determinar o número de raízes positivas e negativas, que ele chamou de raízes verdadeiras e falsas, respectivamente. Em vista do que foi exposto, não é adequada a versão bastante difundida de que Descartes teria criado a "geometria analítica" como ficou conhecida a partir do século XIX, ou como é conhecida na atualidade. A tendência de um historiador é geralmente de desfazer "mitos" tais como este, de "criador da geometria analítica". Não se deve, no entanto, esquecer da contribuição de Descartes, que deve ser avaliada de forma adequada no seu contexto, comparada aos trabalhos de outros, e verificando-se o que o próprio Descartes pensava estar realizando.

Os méritos de *La Géométrie* encontram-se sobretudo na aplicação consistente da álgebra já desenvolvida no século XVI à análise geométrica dos antigos, ampliando a sua aplicabilidade. Uma contribuição importante foi a rejeição por Descartes das restrições de homogeneidade dos seus predecessores, que ainda eram freqüentes na *logistica speciosa* de Viète. Desta forma, expressões como x^2, x^3, xy passaram a ser consideradas como segmentos de reta, e não mais

---

[1] René Descartes, *La Géométrie*, um dos ensaios de seu *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus La Dioptrique, Les Météores et la Géométrie Qui sont des essais de cette méthode*, Leiden, 1637. Foi consultada a edição fac-similar do original, contida na tradução para o inglês de David Eugene Smith e Marcia L. Latham (ed. e trad.), *The Geometry of René Descartes*, Nova Iorque, reimp. Dover, 1954. Nas referências a *La Géométrie*, indicaremos os números de página da edição original seguidos da numeração da edição fac-similar.

como superfícies ou volumes. Uma equação algébrica tornou-se uma relação entre números, efetuando um incremento na abstração matemática. Isto possibilitou o desenvolvimento posterior da álgebra e o tratamento geral das curvas algébricas. Grande parte da notação de Descartes já era como a atual. Encontramos no seu livro expressões tais como: $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Esta difere da nossa notação apenas porque Descartes escrevia "aa" em vez de a^2, embora usasse a^3 para "aaa" e a^4 para "aaaa". Não é difícil seguirmos o conteúdo do seu livro, mas não se deve observá-lo sob o prisma da moderna geometria analítica. Tentar encontrar em *La Géométrie* a geometria analítica atual seria um anacronismo. Certamente a obra de Descartes foi uma das contribuições relevantes em um longo caminho que construiu a nossa geometria analítica, mas não foi nem o primeiro passo, nem o passo decisivo, nem o passo final do processo.

Este trabalho é composto por esta introdução e por quatro capítulos. O capítulo 1 trata da formação intelectual recebida por René Descartes, ao longo dos oito anos formadores de sua única educação institucional, no colégio jesuíta Henri IV de La Flèche. Aborda os métodos de ensino ali adotados, comuns a todos os colégios jesuítas, os procedimentos estabelecidos na *Ratio Studiorum*, as formas principais de instrução utilizadas e o sólido compromisso dos jesuítas com o estudo humanista das letras. A filosofia e a literatura clássicas, que eram produto de uma cultura pagã da antigüidade, eram ali ensinadas sob um ponto de vista "cristianizado". Quanto ao ensino da matemática nos colégios jesuítas, foi profundamente influenciado por Cristóvão Clavius, que argumentava que a matemática devia se tornar uma matéria essencial de estudo no Colégio Jesuíta Romano, pois considerava que a filosofia natural, sem as disciplinas matemáticas, era pouco convincente e fraca em argumentos, portanto incompleta. [2]

A seguir, delineamos o desenvolvimento histórico da álgebra e da geometria desde o final do século XV até a primeira metade do século XVII, quando surgiu a geometria cartesiana. A partir do ressurgimento do platonismo, começou um movimento na Europa que absorveu o platonismo medieval provindo de Santo Agostinho e outros, e que oferecia uma nova interpretação de Platão.

[2] A. C. Crombie, *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition*, Londres, Duckworth, 1994, vol. I., p. 492.

Esse movimento continuou durante o século XVII, e enfatizava o valor da matemática para as artes práticas. [3]

O capítulo 2 apresenta as conexões existentes entre as *Regulae ad Directionem Ingenii* e *La Géométrie*. A matemática que serviu de modelo e critério para a filosofia de Descartes foi em grande parte uma criação do próprio Descartes, e refletia muitos dos seus princípios filosóficos. Uma das metas programáticas de Descartes era tornar a matemática mais simples, conforme ele escreveu em sua obra *Regulae ad Directionem Ingenii* (1628):

> "... alguns traços desta verdadeira matemática [dos antigos gregos] parecem para mim aparecer ainda em Pappus e Diophantus. (...) Finalmente, houve alguns homens mais engenhosos que tentaram neste século reviver a mesma [verdadeira matemática]; pois parece não existir nenhuma outra além daquela arte que nós chamamos pelo bárbaro nome de "álgebra", contanto que ela possa ser desembaraçada dos múltiplos números e inexplicáveis figuras que a encobrem completamente, de modo que não mais deixe de ter a clareza e simplicidade que nós supomos ser possível obter em uma verdadeira matemática".[4]

Conforme esclarecido no mesmo capítulo deste trabalho, tais conexões são evidências de que o programa cartesiano da *Mathesis Universalis* não tinha sido interrompido, bem como é arbitrária a pretensão de que este programa deveria se desenvolver concretamente em detalhes, visto que o dado mais importante para Descartes era o enunciado das regras metódicas do raciocínio.

O capítulo 3 mostra que Descartes não considerava a equação como sendo uma representação suficiente da curva; ele usava outros tipos de representação em

---

[3] A. C. Crombie, *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition*, vol. 1, p. 426.

[4] Descartes, *Règles pour La Direction de L'Esprit*, Regra IV, trad. e notas por J. Sirven, Paris, J. Vrin, 1970, pp. 25-26.

lugar deste.[5] O termo "representação de curvas", para significar modos de especificar curvas para torná-las suficientemente conhecidas, não era usado no século XVII com este significado. Segundo H. J. M. Bos, os matemáticos daquele tempo usavam, no entanto, o termo "construção de curvas" que tem quase o mesmo significado, mas é mais restrito.[6]

Descartes introduziu uma clara distinção entre curvas admissíveis e inadmissíveis. As primeiras ele chamou "geométricas", as outras "mecânicas". As curvas "geométricas" são as que nós agora chamamos curvas algébricas (embora Descartes não o dissesse explicitamente em *La Géométrie,* isto pode ser inferido do que ele estabeleceu); as curvas "mecânicas" são aquelas agora chamadas curvas transcendentes. Como Descartes não considerava a equação uma representação suficiente da curva, ele não podia estabelecer qualquer distinção entre curvas geométricas e não-geométricas, baseado em suas equações; ele tinha que raciocinar baseado nas representações de curvas que ele achava aceitáveis. A aceitabilidade de representações de curvas é, portanto, um conceito crucial em *La Géométrie.*

O capítulo 4 contém as considerações finais, onde foram retomadas, de modo sumário, todas as idéias discutidas e os resultados obtidos.

[5] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Princeton, The Scholar's Bookshef, 1988, p. 88 e p. 102.

[6] H. J. M. Bos, "On the Representation of Curves in Descartes' *Géométrie*", *Archive for History of Exact Sciences*, 24: 295-338, 1981, p. 296.

CAPÍTULO 1

A Formação Intelectual de René Descartes e a Trajetória até a Geometria Cartesiana

1.1. A Formação Jesuítica

Na edição póstuma em latim do ensaio *La Géométrie*, publicada em 1649, há um retrato de Descartes estampado, com uma inscrição ao redor, que diz: *Renatus Des-Cartes, Dominus de Perron, Natus Hagae Turonum, Ano MDXCVI, Ultimo Die Martii.* [7]

Assim ficamos sabendo que Descartes nasceu em 31 de março de 1596, em La Haye, vila da antiga província de Touraine, na divisa com a de Poitou, de onde era originária a sua família. Esta possuía ali o solar de Perron, e por isso a inscrição “Senhor de Perron”, indicando que ele pertencia à baixa ou pequena nobreza. Recebeu em herança, de sua mãe, este título e a propriedade, que vendeu por volta de 1622, perdendo os direitos senhoriais e o título que havia mantido até essa ocasião, mas garantindo uma renda regular e suficiente para levar uma vida independente. [8]

Um fato ocorreu em 1603, que exerceria uma profunda influência sobre a educação do jovem Descartes e determinaria o ambiente do seu desenvolvimento intelectual. Os jesuítas, que haviam sido expulsos da França em 1594, receberam permissão para retornar. Fundaram o Colégio de La Flèche em Anjou, na mesma região do país em que fica La Haye. Descartes ficou órfão de mãe em tenra idade, e viveu na casa de sua avó materna, Jeanne Sain. Ingressou no Colégio de La Flèche em alguma data entre os anos 1604 e 1606, e viveu como interno nos oito anos seguintes da sua vida.

---

[7] A reprodução deste retrato se encontra em W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, Canton, MA, Science History Publications, 1991, p. 1.

[8] A esse respeito, ver S. Gaukroger, *Descartes: uma biografia intelectual*, trad. de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro, Ed. UERJ&Contraponto, 1999, p. 17.

O ensino ministrado pelos jesuítas gozava de boa reputação, inclusive entre os protestantes.[9] O Colégio Henri IV de La Flèche foi inaugurado em 1604 e patrocinado pelo próprio rei Henrique IV, que doou o terreno e reformou o palácio que ali havia, transformando-o em colégio. Em 1606 uma pessoa das relações da família de Descartes, Frei Etiènne Charlet, passou a fazer parte do quadro de professores, tendo sido indicado para Reitor em 1608. Talvez devido a esse relacionamento a família tenha resolvido enviar Descartes à nova escola, onde ele estudou, provavelmente, de 1606 a 1615 (dos dez aos dezenove anos), completando o ciclo de estudos que compreendia seis anos correspondentes à escola fundamental e mais três anos correspondentes ao ensino médio.

O tipo de educação que recebeu ali, o ambiente intelectual em que ele teria sido criado no colégio, os assuntos que estudou e os textos utilizados são relevantes para se estabelecer qual teria sido sua formação. Em várias passagens, inclusive no *Discours de la Méthode*, Descartes relembrou seus tempos no La Flèche e refletiu sobre eles em diversas ocasiões. O colégio desempenhou um papel central em seu desenvolvimento pessoal e intelectual, pois serviu-lhe de lar durante oito anos formadores, além de haver-lhe proporcionado sua única educação institucional significativa.

Os métodos de ensino no La Flèche seguiam os procedimentos estabelecidos na *Ratio Studiorum* para todos os colégios jesuítas. Ela é uma espécie de regimento, que foi elaborado originalmente por Santo Ignácio de Loyola, fundador da Companhia de Jesus e que contém todas as normas, preceitos e orientações sobre o ensino ministrado nos colégios jesuítas. Seu objetivo não era formar teólogos, mas educar cristãos, que seriam testemunhas do Evangelho no mundo. Os jesuítas defendiam a ortodoxia em matéria de fé, mas encorajavam a liberdade de pensamento na discussão de questões de conhecimento.

Havia quatro formas principais de instrução, inspiradas na tradição das universidades medievais: *lectio, repetitiones, sabbatinae disputationes e menstruae disputationes.* [10] A *lectio* consistia na leitura e comentário de um texto; este era ditado aos alunos. Havia duas horas de aulas pela manhã e duas à tarde. O intervalo de tempo, ao término de cada aula, podia ser usado para o

[9] Isto é relatado por W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 2, na nota de rodapé 2.

[10] Conforme relata S. Gaukroger, *Descartes: uma biografia intelectual*, p. 71-72.

esclarecimento de passagens da leitura que continuassem obscuras. As *repetitiones* consistiam em um resumo que os próprios alunos faziam das aulas a que haviam assistido naquele dia. Era um evento presidido por um estudante, realizado à tardinha ou ao meio-dia, no caso dos alunos em regime de externato. Havia uma longa discussão sobre qualquer dificuldade que alguém experimentasse com o material. As *sabbatinae disputationes* consistiam de um debate regular nas noites de sábado, na presença de um professor. Um dos estudantes era designado com oito dias de antecedência para ser o *respondens* ou *defendens*, que expunha uma tese e a defendia. Em seguida um outro, o *argumentans*, apresentava objeções a ela. O *respondens* do sábado anterior transformava-se no *argumentans* do sábado seguinte. Este último podia levantar até três objeções e, uma vez concluída a disputa, os auxiliares de cada participante podiam acrescentar outras opiniões. Ao fim de cada mês havia uma disputa semelhante, as *menstruae disputationes.* A estas compareciam os professores de filosofia e seus alunos. Para cada professor havia um *respondens*, escolhido entre seus alunos, e cada *respondens* tinha dois adversários, um de sua própria turma e um de uma série superior. Essas disputas eram a principal forma de avaliação, pois eram raros os ensaios escritos. Os freqüentadores das disputas tinham liberdade para aplaudir os bons argumentos e as defesas feitas com argúcia. Havia ainda a competição literária anual (durante três dias), na qual eram lidas as dissertações filosóficas e literárias, e também prosa e poesia escritas em francês, latim e grego; esses eventos eram abertos e atraíam grande público. Depois de 1610, as competições anuais passaram a ser programadas na data da comemoração anual da morte do rei Henrique IV, transformando-se em um grande acontecimento público de toda a região circunvizinha.

Todo o ensino, bem como as disputas, eram feitos em latim, por ser a língua de erudição e também a língua da Igreja Católica. Isto se refletia nos primeiros cinco anos de ensino, cujo currículo era quase exclusivamente dedicado ao latim, ao grego e à literatura clássica.

Ignácio de Loyola, o fundador da Companhia de Jesus, tinha um sólido compromisso com o estudo humanista das letras. As disciplinas da gramática, da retórica e da dialética eram consideradas meios de acostumar a mente à contemplação das idéias e da realidade inteligível, em contraste com a perceptível.

Como se explica que fossem aceitas a filosofia e a literatura clássicas, já que eram produto de uma cultura pagã da Antigüidade Clássica, que sob muitos aspectos era uma antítese ao Cristianismo? A filosofia clássica havia-se "cristianizado" gradativamente, começando com os primeiros Padres da Igreja e prosseguindo com Santo Agostinho, assumindo depois nova forma com Tomás de Aquino.

Santo Agostinho buscou uma conciliação entre a filosofia platônica e a teologia cristã. Seguindo o método da filosofia grega, ele buscou a inteligibilidade da existência, acreditando que isso pudesse ser alcançado por intermédio da Fé Cristã. No entanto, ele afirmava ser impossível acreditar em algo que não fosse compreendido, e juntou o conteúdo da revelação ao da experiência, ou seja, os dados cuja natureza e relações o filósofo cristão tinha que tentar elucidar pela pesquisa racional. [11]

Acreditando na importância primordial do apostolado cristão, Santo Agostinho afirmou com ênfase que caso os filósofos ensinassem qualquer coisa que "é contrária a nossas Escrituras, isto é, à Fé Católica, nós podemos, sem nenhuma dúvida, acreditar que isto seja completamente falso, e que podemos por algum meio ser capazes de mostrá-lo". Santo Agostinho formulou sua Teologia apropriando-se de ensinamentos da doutrina de Platão e interpretando cada indagação filosófica em termos dos ensinamentos cristãos. [12]

Essa interpretação da Antigüidade teve forte influência durante boa parte do século XVII, como o final de uma longa tradição que interpretava o pensamento da Antigüidade Clássica através do pressuposto fundamental do Cristianismo. Sendo assim, era difícil enxergar uma incompatibilidade direta entre o pensamento clássico e o Cristianismo, como se simplesmente comparássemos dois sistemas de pensamento independentes. [13]

Outra indagação que se apresenta é a razão pela qual a filosofia e a literatura clássicas se constituiriam em um ingrediente necessário à educação cristã. Que tipo de contribuição indispensável a cultura clássica poderia dar ao

---

[11] Crombie, *Medieval and Early Modern Science,* 2ª ed, Nova Iorque, Doubleday Anchor Books, 1959, vol. 1, p. 58.

[12] Santo Agostinho, Cap. 21 de *De Genesi ad Litteram*, *apud* Crombie, *op. cit.*, p. 60.

[13] Com respeito a esta questão ver Anthony Grafton, *Defenders of the Text*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1991, cap. I, especialmente p. 31-33.

desenvolvimento de uma doutrina cristã? O que Gaukroger cogita é que, durante a Reforma, os abusos surgidos dentro da Igreja teriam estimulado o desejo nostálgico de um retorno aos tempos anteriores. O projeto era reconstituir o Cristianismo com base numa leitura do Novo Testamento, livre das interpolações introduzidas pelas interpretações da Igreja Medieval. [14]

Os primeiros cinco anos do curso no Colégio de La Flèche compreendiam um ano de aulas preparatórias, três anos de "gramática" e, por fim, um ano de retórica. Durante esse período, o aluno adquiria um bom conhecimento de latim e um conhecimento razoável do grego, além de uma familiaridade com uma vasta gama de textos clássicos, dentre os quais Cícero predominava. Ao que parece, o que o estudo dos textos pretendia produzir não eram propriamente uma compreensão e uma avaliação de seu conteúdo, mas uma apreciação de seu estilo. Havia regras estritas e detalhadas que norteavam a maneira de apresentar o material, e as normas que regiam a exposição dos textos dão uma idéia da natureza do ensino jesuítico. A primeira parte da exposição era o *argumentum*, no qual se fornecia um resumo geral da passagem estudada. Em seguida vinha a *explanatio*, na qual se parafraseavam orações e frases do trecho, para que se pudesse esclarecer o seu sentido. O que vinha a seguir era uma *rhetorica*, na qual se examinava e elaborava a maneira como as regras da retórica, da poética ou mesmo da gramática eram empregadas no texto. Em seguida vinha a *eruditio*, em que se expunham os fatos históricos que se fizessem necessários à compreensão do texto. Por último, na *latinitas*, forneciam-se as citações de outros autores, para corroborar a gramática, o estilo e as imagens do texto. O objetivo principal desse tipo de ensino era o estudo da língua, e em particular da capacidade de pensar, escrever e falar fluentemente em um latim elegante. Segundo Gaukroger, [15] os modelos eram os esperados: Cícero, Ovídio, Virgílio, Tíbulo e Catulo, em latim, acrescidos de Esopo, Dion Crisóstomo, a *Retórica* e a *Poética* de Aristóteles, ao lado de trechos extraídos de Homero, Píndaro, Demóstenes e as cartas de Platão.

O sistema de ensino medieval havia-se estruturado em torno das sete artes liberais, formadas pelo *trivium*, que compreendia as "artes verbais", isto é, a gramática, a retórica e a dialética (lógica), e pelo *quadrivium*, que compreendia as

---

[14] Gaukroger, *Descartes: uma biografia intelectual*, p. 75.

[15] *Ibid.*, p. 77.

“artes matemáticas”, ou seja, a aritmética, a música, a geometria e a astronomia. O *trivium* e o *quadrivium* surgiram por volta do século VII-VIII, no início da Idade Média, e eram complementados desde os séculos XII-XIII, pela filosofia natural.

O currículo de La Flèche também refletia até certo ponto esta ordenação do material, com algumas reformulações. Nos primeiros cinco anos do currículo humanista estudava-se o *trivium*, com exceção da dialética. Nos três anos seguintes, cobria-se o restante dos temas das artes liberais, embora se acrescentassem a metafísica, a filosofia natural e a ética. Era parte também do programa educacional humanista a promoção da matemática, pois a necessidade prática e intelectual essencial das ciências matemáticas e artes na educação foi defendida pelos humanistas por toda a Europa, por exemplo pelo espanhol Juan Luis Vives (1531) e o italiano Alessandro Piccolomini (1542).

As matemáticas e as artes foram posicionadas no centro do novo currículo humanista nas escolas e universidades, e também foram discutidos os méritos da língua vernácula. Cristóvão Clavius frisou, em seu comentário sobre Euclides (1574) que a matemática tinha um valor capital, e defendeu o seu estudo no Colégio Romano. Clavius foi um matemático e cientista jesuíta dos mais destacados, que faleceu em Roma, em 1612, após uma carreira de distinção no Colégio Romano, instituição superior dos jesuítas para ensinamentos mais adiantados.[16] Foi Clavius quem efetivamente estabeleceu a matemática no currículo jesuíta do Colégio Romano, e conseqüentemente nas escolas e colégios jesuítas por toda a Europa e o Novo Mundo, com uma larga influência alcançada sobre a educação européia em geral. [17]

Os jesuítas adotaram, em sua política educacional, uma mistura um pouco eclética de elementos humanistas, escolásticos e científicos, todos direcionados ao fim firmemente estabelecido pelo seu fundador Ignacio de Loyola: “O fim da Sociedade e dos seus estudos é levar nossos membros ao conhecimento e ao amor a Deus e à salvação de suas almas.”[18]

Focalizando o seu fim na teologia, os currículos dos colégios jesuítas incluíam uma gama completa de estudos humanos e úteis: literatura e história,

---

[16] Crombie, *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition*, p. 487.

[17] *Ibid.*, p. 492.

[18] Loyola, *Constitutiones Societatis Iesu*, 1556, *apud* Crombie, *op. cit.*, p. 492.

línguas clássicas e orientais, lógica, física, metafísica e ciência moral e também matemática, na medida adequada ao fim proposto. A lógica incluía a demonstração científica como foi desenvolvida a partir de Aristóteles pelos escolásticos, e tratamento dialético humanista com diferentes tipos de argumentos apropriados aos vários assuntos, alcançando diferentes graus de probabilidade ou certeza. Daí decorreu a doutrina jesuítica da probabilidade moral, por meio da qual as decisões eram baseadas em um equilíbrio, cuidadosamente pesado, de autoridades e de juízos argumentativos.[19]

A defesa assumida pelos jesuítas da confiabilidade racional da natureza e do conhecimento humano, sua forma de racionalidade aristotélica e o seu cultivo das ciências matemáticas e das artes, vieram a exercer uma influência poderosa na formação da identidade da filosofia natural, nos primórdios da Europa moderna. A forma desta influência não era simples, mas ela apareceu em figuras críticas tais como Galileu, Mersenne e Descartes, que se beneficiaram, cada um a seu modo, da política educacional jesuítica.

Os "assuntos filosóficos" eram tratados de um modo diferente da gramática e da retórica dos cinco primeiros anos do ciclo de estudos dos colégios jesuítas. A gama de autores era mais restrita, é provável que se fizesse uso mais difundido de comentários, e as obras lidas eram estudadas sobretudo por seu conteúdo, e não por seu estilo. Gaukroger atribuiu a restrição da gama de autores e a maior utilização de comentários ao fato de que os temas do currículo filosófico eram, de modo geral, mais controvertidos que os do currículo humanista dos cinco primeiros anos. O controle atingia inclusive quem lecionava esses temas, exigindo-se a freqüência aos cursos avançados de teologia e demonstrações de ortodoxia, como pré-requisitos. Algumas áreas, como a metafísica, eram tão controvertidas que eram ensinadas com base em comentários pormenorizados, nos quais a ortodoxia era seguida de perto. [20]

Ignácio de Loyola havia recomendado a seus seguidores a filosofia de Aristóteles, tal como foi interpretada por São Tomás de Aquino (1227-1274). Este havia sido proclamado Doutor da Igreja em 1569 e seus ensinamentos eram considerados o corpo da ortodoxia católica. Mas é bastante provável que não se

[19] Crombie, *Styles of Scientific Thinking*, pp. 492-493.
[20] Gaukroger, *Descartes: Uma Biografia Intelectual*, p. 77.

tenha ensinado um “Tomás de Aquino puro”, assim como não ensinaram um “Aristóteles puro”. A interpretação tomista de Aristóteles vinha sendo questionada por muitos aristotélicos, desde o fim do século XV, os quais ofereciam uma leitura naturalista de Aristóteles, que era de difícil conciliação com o uso da filosofia aristotélica como base da teologia cristã. Além disso, não era claro o que o tomismo ortodoxo significava. Ofereciam-se diversas versões dele, muitas vezes elaboradas como respostas a críticas posteriores. Alguns tomistas divergiam de Tomás de Aquino em diversas questões, inclusive em questões metafísicas.

Em algumas áreas, como a matemática, havia dois tipos diferentes de problemas a serem enfrentados. O primeiro era um conservadorismo inato com respeito à importância dos tópicos do *quadrivium*. Embora estivessem nominalmente no mesmo plano que o *trivium*, os temas do *quadrivium* saíam perdendo em uma comparação, e alguns autores achavam que era assim que devia ser. Em contraste com essa situação, e em conseqüência de uma diversidade de interesses, que incluíam a reforma do calendário e a balística, havia uma clara motivação para o ensino da astronomia, da aritmética e da geometria no século XVI. Num colégio como o de La Flèche, normalmente se esperava que os jovens membros da nobreza e da pequena aristocracia ingressassem em carreiras militares e administrativas ao concluírem o curso. Assim, na educação desses jovens, havia um interesse renovado dispensado a disciplinas que enfatizassem aplicações práticas, como a arte da fortificação, a arquitetura civil e militar. O segundo tipo de problema dizia respeito ao papel e ao *status* dos argumentos matemáticos em áreas como a astronomia, assuntos em que estavam em jogo concepções da filosofia natural que eram profundamente arraigadas. Em 1616, a tentativa de Foscarini de conciliar o copernicanismo com as Escrituras Sagradas levou à condenação da teoria de Copérnico pela Inquisição Romana.

A *Ratio Studiorum* de 1586 recomendava que o *Organon* de Aristóteles formasse o núcleo do ensino da dialética. Também recomendava o comentário do *Organon* feito por Fonseca e, na versão da *Ratio* de 1599, o *Introductio in Dialecticam*, de Toletus. Fonseca e Toletus eram jesuítas e particularmente influentes. A série de comentários sobre Aristóteles produzida na década de 1590 pela Universidade de Coimbra, em Portugal, era muito extensa. Uma leitura ortodoxa de Aristóteles para escolas jesuítas consistia nesses comentários, escritos pelos jesuítas com o intuito de estabelecer uma leitura definitiva de Aristóteles. Descartes deve ter aprendido a maior parte de sua filosofia por seu intermédio.

Na verdade, algumas teorias de Aristóteles eram diretamente contrárias ao ensinamento cristão. Como um exemplo, Aristóteles assegurou que o mundo era eterno, e isto obviamente entrava em conflito com a concepção cristã de Deus como criador do mundo. Além disso, as obras de Aristóteles chegaram ao Ocidente acompanhadas por comentários árabes, com seu caráter determinista absolutamente reforçado, e isto teria contribuído para despertar muita oposição entre os pensadores do mundo cristão ocidental, que já possuíam um sistema filosófico igualmente abrangente baseado nos fatos revelados na religião cristã.

Segundo Étienne Gilson, antes e após São Tomás de Aquino, houve toda uma escola de teólogos que defendia expressamente a doutrina das idéias inatas e estendia a sua aplicação ao problema capital das provas da existência de Deus. Esta era uma corrente de origem platônica, que se manifestou por refutações mais ou menos graves à doutrina de Aristóteles e de São Tomás.

Nas conciliações efetuadas entre a corrente Aristotélica e a corrente Platônica, Gilson cita como uma das mais interessantes a que se acha sugerida aos teólogos em alguns textos de Santo Agostinho e no escrito pseudo-agostiniano *De Spiritu et Anima*, que é a seguinte: em vez de considerar a imagem-objeto como introduzida no sentido pelo próprio objeto material, se admitirá que a alma forma instantaneamente em si a imagem deste objeto; o sentido não desempenha aqui mais que o papel de um excitante, de um mensageiro que anunciará o objeto e convidará a alma a representá-lo. [21]

Esta tese é reencontrada, de maneira deformada, atenuada e adaptada, até em meios profundamente impregnados do espírito tomista e aristotélico, no século XVI. Gilson a localizou nos *Comentarii Collegii Conimbricensis* e até nas *Metaphysicae Disputationes* de Suarez, que eram obras representativas, por excelência, do espírito filosófico em que os professores do jovem Descartes se achavam imersos. [22]

---

[21] E. Gilson, *Études sur le Rôle de la Pensée Médiévale dans la Formation du Système Cartésien*, p. 29.

[22] *Ibid.*, p. 30.

Em meados do século XVI, a questão da certeza e do poder demonstrativo da matemática tornou-se delineada dentro de uma diversidade de controvérsias sobre o método. Um debate era centrado sobre as concepções opostas da relação da matemática com a filosofia natural, atribuídas a Platão e a Aristóteles. Um outro debate dizia respeito à forma lógica da matemática, em particular à relação entre os diferentes modelos para a demonstração científica.

Segundo Crombie, o matemático jesuíta Clavius, no já citado comentário sobre Euclides, insistiu sobre a diferença essencial na forma lógica, entre as demonstrações lineares da geometria e o silogismo. Clavius deu uma caracterização das disciplinas matemáticas segundo a qual estas lidam com coisas sem qualquer matéria sensível, embora realmente elas estejam imersas na matéria. Tais disciplinas fazem as suas demonstrações a partir de uma posição intermediária, ocupando um lugar mediano entre a metafísica e a ciência natural. Decorre deste ponto de vista que as disciplinas matemáticas admitiriam apenas certezas, que pudessem ser confirmadas e corroboradas pelas corretas demonstrações, daí a necessidade da matemática para as ciências naturais subordinadas, para as artes práticas e para educar a mente em seu caminho rumo à metafísica e à teologia. [23] Em contraste à dúvida deixada pela dialética humanista, quanto à certeza da matemática, Clavius viu na matemática um antídoto ao cepticismo.[24]

O que se incluía na categoria da "matemática" no século XVI, também diferia consideravelmente do que hoje é incluído. A classificação padrão dos assuntos matemáticos era a do *quadrivium* medieval, ou seja, aritmética, geometria, música e astronomia. Entretanto Clavius, cujos comentários matemáticos eram o padrão adotado nos colégios jesuítas, usava também uma segunda classificação, baseada em uma distinção entre as disciplinas que estudavam as coisas abstraídas de sua matéria (correspondentes, de modo sumário, à concepção aristotélica da matemática), e as que estudavam matematicamente os objetos sensíveis (mais ou menos correspondentes às "ciências subalternas" de Aristóteles). Na primeira categoria ficavam a geometria

---

[23] Crombie, *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition*, p. 491.

[24] *Ibid.*, p. 493.

e a aritmética; na segunda, a astrologia, a perspectiva, a geodésica, a música, o cálculo e a aritmética prática, e ainda a mecânica, além da arquitetura civil e militar. [25]

Na classificação do saber humano, segundo São Tomás de Aquino, é notada a presença de um certo número de ciências ditas 'intermediárias' entre a física e a matemática (*scientiae mediae*). Para situar tais ciências, que não são nem puramente matemáticas nem puramente físicas, São Tomás parte das matemáticas puras, e em oposição a estas, que fazem a abstração da matéria sensível, coloca as ciências intermediárias, que aplicam a esta matéria os princípios abstratos das primeiras. As ciências intermediárias mais freqüentemente mencionadas são a astronomia, a música e a perspectiva. [26]

São Tomás utilizou, desde as suas primeiras obras, o esquema da hierarquia das ciências, que é um caso particular da especificação das ciências. Uma ciência seria subalterna a outra quando na ciência superior determina-se o 'porquê' daquilo de que na ciência inferior só se conhece o 'quê'. São os casos da música, que é subalterna à aritmética, e da óptica que é subalterna à geometria. [27]

Na doutrina aristotélica, quando se aplicava a um 'sujeito' princípios que se vinculavam a um outro, a demonstração não seria válida, ou na melhor das hipóteses, seria apenas uma demonstração dialética, ou seja, geral e não plenamente convincente. Isto se devia ao rigor do ideal científico aristotélico, que solicitava que uma demonstração fosse feita apenas a partir de princípios necessários e próprios do 'sujeito' a que fossem aplicados. [28]

Por outro lado, poder-se-ia perguntar por que os princípios matemáticos podiam ser aplicados à física. A resposta, no nível da teoria da subalternação, seria que os sujeitos das duas ciências não estavam totalmente desprovidos de vínculos entre si, e que o da física, ao mesmo tempo em que não era propriamente uma espécie do 'sujeito' da matemática, com ele mantinha relações que podiam

---

[25] J. Sirven, *Les Années d'apprentissage de Descartes (1586-1628)*, Albi, Imprimérie Coopérative du Sud-Ouest, 1928, p. 35.

[26] Carlos Arthur R. do Nascimento, *De Tomás de Aquino a Galileu*, Campinas, Unicamp/IFCH, 1998, p. 21.

[27] *Ibid.*, p. 31.

[28] *Ibid.*, p. 34.

ser assimiladas às da matéria e da forma. Assim ficava preservada a aplicação dos princípios matemáticos a uma matéria física, sem reduzir pura e simplesmente os domínios onde isso era feito ao das matemáticas puras. Este era o caso das ciências intermediárias que não eram espécies propriamente ditas da matemática, como o eram a aritmética e a geometria. [29] Tais ciências intermediárias eram mais matemáticas do que físicas, e não pretendiam explicar a totalidade de um fenômeno, mas somente o seu aspecto quantificável. No entanto, neste domínio restrito, eram dotadas de uma certeza maior do que a da física pura, embora menor do que a das matemáticas puras. [30]

É possível pensar que foram problemas concretos de astronomia, óptica, mecânica e dinâmica que aos poucos forçaram a passagem da física do tipo aristotélico para as ciências físico-matemáticas. As ciências intermediárias dão testemunho de uma crescente aproximação entre a física e a matemática, a qual encontrou o seu ponto culminante na ciência físico-matemática. Essas mesmas ciências intermediárias devem ser levadas em conta quando se estudam as etapas percorridas entre a Idade Média e o Renascimento, pois podem ajudar a perceber melhor a continuidade e as diferenças existentes entre os dois períodos.[31]

Crombie explicou como se deu a passagem do sistema aristotélico para a ciência físico-matemática, com a seguinte citação:

> “Pode-se considerar que Aristóteles [...] das profundezas do seu próprio sistema, fornece uma grande parte das armas que servem para atacá-lo. As mais importantes dessas armas resultam do desenvolvimento das idéias concernentes ao método científico, e em particular à indução e à experiência, e também ao papel das matemáticas na explicação dos fenômenos físicos – pois conduziram progressivamente a uma concepção inteiramente diferente do gênero de questões a serem formuladas nas ciências naturais, ou seja, o gênero de

---

[29] Carlos Arthur R. do Nascimento, *De Tomás de Aquino a Galileu*, p. 39.

[30] *Ibid.*, p. 78.

[31] *Ibid.*, p. 86.

> questões às quais de fato os métodos experimental e matemático estavam em condições de fornecer uma resposta." [32]

A França, na época de Descartes, não era um ambiente muito propício para as especulações do espírito e a vida intelectual, devido à grande agitação provocada pelas discórdias políticas, agravadas na época da dinastia Valois, e às lutas religiosas, exacerbadas pelo Édito de Nantes (1598). Estas provocaram em 1610 o assassinato do Rei Henrique IV por um monge. O coração do rei foi solenemente levado ao Colégio de La Flèche em 4 de junho de 1610, para ali ter sua última morada. W. Shea comentou que na festa de primeiro aniversário desta chegada, em 1611, o fato foi comemorado e um soneto foi declamado, em que se celebrava a recente descoberta dos quatro satélites de Júpiter por Galileu. Devido a esta menção à mais sensacional observação telescópica de Galileu, Shea [33] creditou aos jesuítas um interesse em manter-se informados dos desenvolvimentos científicos recentes e certa habilidade política, já que Galileu havia batizado os quatro satélites "Estrelas Mediceanas", isto é, de Médici, em honra a Cosmo II, o Grão-Duque da Toscana e primo da Rainha Regente da França, Maria de Médici. A regência de Maria de Médici não conseguiu manter um ambiente de tranqüilidade e de ordem. Começava a despontar a figura do Cardeal Richelieu, que pouco depois, em 1619, seria o Secretário de Estado da França.

Após deixar o Colégio de La Flèche, entre 1614 e 1615, Descartes, aos vinte e dois anos, em princípios de 1618, alistou-se no exército do Príncipe Maurício de Nassau, da Holanda. Este era um país de maior tolerância religiosa e de grande atividade mercantil, apesar da guerra em que estava empenhado para livrar-se do domínio estrangeiro. No ano de 1618 teve início a "Guerra dos Trinta Anos", que assolou toda a Europa até 1648. Isto não impediu que nas Universidades e Centros de Estudos de Utrecht, Leyden, Dordrecht e Rotterdam, homens como Simon Stevin, Snellius, Huygens e tantos outros, se dedicassem às matemáticas, à física, às ciências naturais e à medicina. O próprio chefe do

---

[32] Crombie, *Medieval and Early Modern Science*,vol. 1, trad. francesa por Jacques D'Hermies, *Histoire des Sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650)*, Paris, P. U. F. , 1959, p. 215.

[33] W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 3.

exército nacional, o Príncipe de Orange, Maurício de Nassau, foi um incentivador das matemáticas e se deveu a ele a fundação, por volta de 1600, da Escola de Engenheiros anexa à Universidade de Leyden. Parece surpreendente que um *gentilhomme* francês e católico resolvesse alistar-se num exército de uma república protestante. Havia, porém, uma trégua instável entre os holandeses e os franceses. A política pragmática de Henrique IV e, depois dele, de Richelieu, consistia em apoiar os holandeses contra os espanhóis. Portanto, até era adequado e patriótico para Descartes esse alistamento. Ele pode ter estudado um pouco de ciências matemáticas enquanto esteve ligado ao exército, especialmente na área de arquitetura e das fortificações militares.

De fato, Descartes disse a Isaac Beeckman, numa carta de 24 de janeiro de 1619, que vinha se dedicando à "pintura, à arquitetura militar e, acima de tudo, à língua flandrense", no tempo em que uma trégua temporária lhe permitiu não ser convocado para a batalha.[34] De qualquer modo, sua permanência nesse exército teve curta duração. No fim de seu *Compendium Musicae*, escrito em dezembro de 1618, a despeito de suas atividades cotidianas no exército de Maurício de Nassau, declarou estar "ocioso" e instalado "em meio à balbúrdia e a soldados mal educados". Ele estava claramente insatisfeito. Em janeiro de 1619 desligou-se deste exército e engajou-se nas forças de Maximiliano I da Baviera.[35]

No breve período em que estava aquartelado nos arredores de Breda, na Holanda, Descartes havia conhecido Isaac Beeckman, com quem viria a manter correspondência e uma colaboração duradoura em sua vida intelectual. Beeckman era oito anos mais velho que Descartes e natural de Middelburg. Havia estudado teologia em Leyden, entre 1607 e 1610. Em 1618, formara-se em medicina na Universidade de Caen, mas nunca exerceu esta profissão. Em vez disso dedicou-se ao magistério, primeiro na Escola de Latim de Utrecht, a partir de novembro de 1619, depois na Escola de Latim de Rotterdam e, por último, em Dordrecht. Descartes e Beeckman encontraram-se pela primeira vez em Breda, em 10 de novembro de 1618. Afirma-se que os dois homens teriam começado a conversar

---

[34] Ver *Oeuvres de Descartes*, eds. C. Adam e P. Tannery, Paris, J. Vrin, reed. 1996, vol. X, p. 151. Esta edição padrão das obras de Descartes é geralmente abreviada por A. T., e esta notação será adotada daqui por diante neste trabalho, para evitar repetições desnecessárias.

[35] A. T., vol. X, p. 141.

ao lerem um cartaz que exibia um problema matemático. O cartaz estava redigido em flamengo, e Descartes teria pedido a Beeckman que o traduzisse para ele. [36] Beeckman era um homem versado em várias ciências, sobretudo em física e matemáticas, e daria conselhos e incentivos a Descartes. Graças ao diário de Beeckman e à sua correspondência com Descartes, o desenvolvimento de muitas das concepções cartesianas pôde ser conhecido. O intercâmbio intelectual por correspondência entre eles continuou, mesmo após a partida de Beeckman para Middelburg, sua cidade natal. No ambiente intelectual daquela época, os pensadores iam gradualmente se afastando da antiga visão aristotélica da natureza. Em um mundo onde a medição, os cálculos, a engenharia e a quantidade em geral, com as suas relações causais, se tornavam cada vez mais importantes, insistir nas qualidades e na teleologia aristotélicas tornara-se inadequado. Muitos sentiam uma necessidade de busca de um novo método de aproximação da natureza e do homem e, conseqüentemente, uma nova matemática que haveria de tornar-se o exemplo clássico do pensamento quantitativo e lógico. Em uma carta datada de 26 de março de 1619, [37] antes de completar 23 anos de idade, Descartes falou a Beeckman sobre o seu "compasso proporcional" e relatou que com ele havia resolvido questões de matemática como o problema da divisão de um ângulo em partes iguais e questões relativas a três tipos de equações cúbicas. Embora não houvesse terminado o estudo e discussão desses temas, declarou que o método que havia encontrado lhe permitia "resolver quatro vezes mais problemas do que a álgebra comum, alguns deles muito difíceis". Adiantou que estava fazendo outras investigações e se tivesse êxito, como esperava, colocaria tudo isso em ordem, assim que pudesse vencer a sua preguiça natural e dispor de todo o seu tempo livre. Nesta carta podemos encontrar as primeiras evidências de que já estaria desenvolvendo assuntos e conceitos presentes em sua obra *La Géométrie.*

Um mês depois, a 23 de abril de 1619, escreveu ao mesmo Beeckman informando-o de sua partida no dia seguinte com o exército a que pertencia. Dizia que onde quer que se detivessem, pretendia por-se a trabalhar em sua Mecânica ou em sua Geometria, de que Beeckman seria o incentivador e o primeiro autor, pois

---

[36] Ver Adrien Baillet, *La Vie de Monsieur Descartes*, Paris, Daniel Horthemels, 1691, reimp. fac-similar, Genebra, Slatkine, 1970, vol. 1, p. 43.

[37] A. T., vol. X, pp. 156-158.

havia trazido o seu espírito de volta aos bons propósitos quando ele se apartara das ocupações sérias. Se acaso resultasse algo digno de louvor em sua obra, ele acreditava que Beeckman teria o direito de reclamar sua autoria por inteiro. Acrescentou que havia resolvido novas questões mediante o uso de seu compasso, "mas não quero enviar-vos fragmentos soltos: um dia comporei com isso um livro que será novo e nada desprezível". [38]

Ao que parece, no ano de 1619, Descartes já havia começado a criar a sua matemática e adentrado com ela na filosofia racional. Talvez ele já tivesse as suas teorias esboçadas e redigidas, mas não se decidira ainda a publicá-las. Talvez estivesse acossado por dúvidas, ou necessitasse de mais comprovações, além de encontrar a forma mais adequada que lhe permitisse resistir às críticas.

Na verdade, podemos dizer que René Descartes não foi um matemático profissional, mas sim um filósofo que encontrou na matemática uma base para o pensamento racional. Neste sentido, o centro da sua obra não era o estudo da geometria, mas sim a filosofia. Ele buscou, no caráter racional e resolutivo das matemáticas, as condições básicas para a elaboração das regras de seu método geral de raciocínio, capaz de facilitar as descobertas e "encontrar a verdade nas ciências". Não podemos nos esquecer de que Descartes publicou *La Géométrie* como um exemplo de aplicação deste método.

1.2. Os Passos Decisivos Que Abriram Caminho Para A Geometria Cartesiana

A passagem do período medieval para a Renascença não se fez de maneira brusca, nem definitiva. Ao contrário, deu-se paulatinamente e de maneiras diferentes de acordo com a área contemplada. Por um lado, um despertar marcante no campo da arte e da literatura não foi, a princípio, acompanhado por notáveis avanços em ciência e em matemática. Além disso, existem conexões definidas ligando o período medieval ao "moderno", em álgebra e em geometria. Segundo C. Boyer [39] não existem registros de alguma tendência nova e inédita na matemática, comparável à artística, entre a época de Petrarca (1304-1374) e a de

[38] A. T., vol. X, pp. 162-163.

[39] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 54.

Leonardo da Vinci (1452-1519). Por outro lado, numerosas edições das obras de Bradwardine e de Oresme apareceram no fim do século XV e início do século XVI, testemunhando a influência medieval ainda por mais cem anos.

Boyer identificou duas obras notáveis, do final do século XV, baseadas em fontes anteriores, mas contribuindo de alguma forma com futuras linhas de desenvolvimento: *Triparty en la Science des Nombres* , de Nicole Chuquet (1484), e o *Summa de Arithmetica*, de Luca Pacioli (1494). São citados como uma tentativa de delinear uma distinção, não muito clara nem racional, entre a matemática medieval e a do período "moderno".

Já pelos títulos das obras de Chuquet (falecido por volta de 1500) e de Pacioli (falecido por volta de 1509) notam-se indícios de que o período "moderno" apresentou logo uma tendência rumo à álgebra. Boyer é de opinião que o *Triparty* representou uma considerável expansão da ainda incipiente simbologia de Oresme.[40] As potências de uma incógnita são claramente indicadas através de expoentes, nesta obra. Indicações tais como $.5.,.6^{2}.,.10^{3}.$, designavam respectivamente 5x, $6x^2$ e $10x^3$. Inclusive inteiros negativos e o zero são indicados como expoentes, pois o que hoje é escrito $9x^0$ era indicado por $.9^{0}.$, e a expressão atual $72x \div 8x^3 = 9x^{-2}$ podia ser lida como $.72^{1}.$ dividido por $.8^{3}.$ é igual a $.9^{2m}.$ Um exemplo da notação abreviada para raízes utilizada por Chuquet: $R^2.7$ para $\sqrt{7}$ e $R^4.10.$ para $\sqrt[4]{10}$. Os símbolos particulares para tais abreviações não são tão significativos quanto o é a tendência em direção à álgebra simbólica que elas representam. [41] Esta tendência instrumentalizou a matemática para transcender mais facilmente as limitações da visualização geométrica e estabeleceu o uso de potências acima do cubo. Segundo Boyer, o próprio Chuquet teria se referido a termos do quarto grau, usando uma terminologia equivalente a "quadrado-quadrado".

Seria de grande interesse sabermos mais sobre a inspiração de Chuquet para a sua obra – se foi influenciado por fontes gregas; ou se, direta ou indiretamente, ela proveio de Oresme, ou quem teriam sido os intermediários, se os houve. Gino Loria enxergou alguma influência italiana aparente no *Triparty en*

---

[40] Boyer, *History of Analytic Geometry*, pp. 54-55.

[41] G. Loria, *Storia delle Matematiche*, 2ª ed. Milão, Cisalpino-Goliardica, 1982, p. 271.

la Science des Nombres e levantou a possibilidade de que o autor conhecesse o *Liber Abaci,* de Fibonacci, de 1202. [42]

Leonardo de Pisa, também chamado Fibonacci ("membro da casa dos Bonacci") viajou pelo Oriente como mercador. No regresso, teria escrito o seu *Liber Abaci*, em 1202, que estava cheio de informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens. Em *Practica Geometriae* (1220), Leonardo descreveu de forma semelhante o que tinha descoberto na geometria e na trigonometria. Em algumas ocasiões, substituiu números por letras, a fim de generalizar sua prova, desenvolveu análise indeterminada e a seqüência de números tal que cada termo é igual à soma dos dois precedentes. [43] Também pode ter sido um investigador original, pois os seus livros contêm muitos exemplos que parecem não existir nas obras árabes.[44] O *Liber Abaci* foi um meio pelo qual o sistema de numeração indo-árabe foi introduzido na Europa Ocidental. O seu uso ocasional, segundo Struik, [45] data de alguns séculos anteriores a Leonardo, quando foi importado pelos mercadores, embaixadores, eruditos, peregrinos e soldados vindos da Espanha e do Oriente. Assim, uma linha importante de desenvolvimento da matemática passou pelo crescimento das cidades mercantis sofrendo a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura.

O próprio C. Boyer, porém, mencionou que Chuquet citou somente dois autores, Anicius Boethius, ou Boécio (480-524) e Campanus, separados em suas épocas por um intervalo de setecentos anos. Boécio fez tradução e resumos de obras gregas na passagem do século V para o século VI. Os tratados de Boécio sobre a aritmética continham uma idéia elementar do tratamento de problemas teóricos baseados nas propriedades dos números. A chamada 'geometria de Boécio' era de fato uma compilação posterior, da qual a maior parte de sua própria contribuição tinha sido suprimida. Ela continha certos axiomas, definições

---

[42] Loria, *Storia delle Matematiche*, pp. 271-273.

[43] Crombie, *Medieval and Early Modern Science,* vol. 2, p. 5.

[44] L. C. Karpinski, em um artigo em *American Mathematical Monthly*, vol. 21, 1914, pp. 37-48, fazendo uso do manuscrito da Álgebra de Abu Kamil, reivindicou que Leonardo seguiu este autor em uma série completa de problemas.

[45] D. J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, trad. portuguesa de J. C. S. Guerreiro, Lisboa, Gradiva, 1992, p. 139.

e conclusões de Euclides, mas consistia principalmente de uma descrição do ábaco, o dispositivo geralmente usado para os cálculos, e de métodos práticos de estimativas e afins. [46]

A obra de Chuquet permaneceu inédita por quase quatrocentos anos, mas naquela época muitas obras circulavam em forma de manuscrito. Parte de seu conteúdo apareceu em 1520, e depois em 1538, em uma obra chamada *Arismétique*, de Estienne de la Roche (nascido cerca de 1480). É possível que outros tenham tido conhecimento da álgebra simbólica, tal como a de Chuquet, mas não se pode afirmar que este tenha aberto o caminho para as notações utilizadas por Descartes. [47]

A fonte principal da álgebra européia talvez tenha sido mais a Itália do que a França. A influência dos filósofos escolásticos, tais como Bradwardine e Oresme tinha continuado nas Universidades em Pavia, Bolonha e Pádua. A matemática especulativa não desapareceu durante a Idade Média, sendo cultivada pelos filósofos escolásticos, e não pelos homens práticos. Entre aqueles, o estudo de Platão e Aristóteles, combinado com meditações sobre a natureza da Divindade, conduziu a especulações sobre a natureza do movimento, do contínuo e do infinito. [48]

No século XIV, Thomas Bradwardine, que se tornou arcebispo de Cantuária, investigou os polígonos estrelados depois de ter estudado Boécio. Bradwardine e seus seguidores, no Merton College de Oxford, introduziram desenvolvimentos na teoria das proporções. Na sua obra *Tractatus Proportionum* (1328), as proporções foram desenvolvidas principalmente em conexão com certos problemas da física. [49]

No seu método de expressar relações funcionais utilizado na mecânica, Bradwardine alcançou a generalidade por meio do uso de letras do alfabeto, no lugar de números, para as quantidades variáveis, ao passo que as operações de adição, divisão e multiplicação, realizadas com essas quantidades, eram descritas em palavras, em vez de serem representadas por símbolos como na álgebra

---

[46] Crombie, *Medieval and Early Modern Science*, vol. 2, p. 4.

[47] Boyer, *History of Analitic Geometry*, p. 55.

[48] Struik, *História Concisa das Matemáticas*, p. 141.

[49] Crombie, *op. cit.*, vol. 2, p. 6. e p. 56.

moderna. Esse método foi adotado por outros escritores de tratados sobre ‘proporções’, como por exemplo um grupo do Merton College, conhecido como “os calculadores”, especialmente Richard Swineshead [1344-1354], autor do livro *Liber Calculationum*, conhecido como *Calculator.* [50]

Um importante matemático eclesiástico da Idade Média foi Nicole Oresme, bispo de Lisieux, na Normandia, que trabalhou com potências fracionárias, que mais tarde foram desenvolvidas por Stevin, e deu regras para operar com elas. Segundo Struik, ele teria escrito $\boxed{1p\frac{1}{2}\ 4}$ ou $\boxed{\frac{p.1}{1.2}\ 4}$, significando $4^{1\frac{1}{2}}$, ou $4^{\frac{3}{2}}$. Oresme utilizou um método gráfico em conexão com problemas cinemáticos, e dessa maneira deu um passo em direção à introdução, dentro da geometria, da idéia de movimento, que era ausente na geometria grega. Usou o seu método para representar a mudança linear da velocidade em movimentos uniformemente variados. [51]

Oresme também escreveu um trabalho *De latitudinibus formarum* (cerca de 1360), no qual traçou um gráfico de uma variável dependente (*latitudo*) contra uma independente (*longitudo*), que é submetida a variação. Revelou uma espécie de vaga transição ou transferência das coordenadas na esfera celeste ou terrestre, conhecidas pelos antigos, para um germe ou embrião da geometria das coordenadas retangulares, hoje conhecidas por coordenadas “cartesianas”. Este trabalho foi impresso várias vezes, entre 1482 e 1515, e pode ter influenciado os matemáticos do Renascimento, inclusive Descartes.

Havia também uma forte tendência nos círculos não-acadêmicos em direção à aritmética comercial. A álgebra indo-arábica havia possuído a tendência a enfatizar aspectos aplicados do assunto, em detrimento de questões sobre fundamentos lógicos. Na Itália, na época de Leonardo da Vinci, esta tendência oriental era contrabalanceada por duas forças contrárias – um escolasticismo resistente e um interesse crescente nos clássicos da geometria grega. [52] O mais

---

[50] Crombie, *Medieval and Early Modern Science*, vol. 2., p. 89.

[51] *Ibid.*, p. 92.

[52] Ver E. W. Strong, *Procedures and Methaphysics. A Study in the philosophy of mathematical-physical science in the sixteenth and seventeenth centuries*, Berkeley, CA, University of California Press, 1936.

impressionante livro de matemática impresso nos primeiros tempos após a invenção da imprensa talvez tenha sido o do franciscano Luca Pacioli, que surgiu em 1494 com o nome de *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (*in-folio*, 600 páginas)[53]. Escrito em italiano, continha tudo o que era conhecido naquela época sobre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Por essa época, o uso de numerais indo-arábicos estava bem estabelecido e a notação aritmética não diferia muito da nossa.

A álgebra em *Summa de Arithmetica*, de Luca Pacioli, não era tão desenvolvida quanto a do *Liber Abaci*. No entanto, ela mostra a mesma tendência em direção ao simbolismo que a obra de Chuquet já evidenciava. Um exemplo de notação algébrica adotada por ele é: $\text{R̸}\,\mathrm{V}\,40\,\overline{\mathrm{m}}\,\text{R̸}\;\;320$ cuja notação atual é $\sqrt{40-\sqrt{320}}$.[54]

Além do mais, a influência de Pacioli foi difundida, pois sua obra efetuava a ligação entre matemáticos e técnicos dos Países Baixos com o aprendizado latino da Itália.[55] C. Boyer menciona que uma secção da *Summa* era devotada ao "método de resolução de vários casos de figuras quadriláteras retangulares pelo método algébrico". [56] Tais aplicações da álgebra à geometria viriam a apresentar-se amiúde na obra de Viète, considerado o maior dos matemáticos do século XVI. Pacioli e seus sucessores foram tolhidos neste aspecto pelo fato de que a própria álgebra não estava livre de limitações da geometria. Como na álgebra geométrica grega, ele construiu equações geometricamente, um costume que persistiu por mais de três séculos. Na *Summa de Arithmetica*, Pacioli tinha comparado a impossibilidade de solução algébrica da equação cúbica com a da quadratura do círculo. [57]

---

[53] De acordo com D. J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, p. 145, Pacioli também publicou o primeiro tratado de contabilidade de dupla entrada [partida dobrada] como parte de sua *Summa*.

[54] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, Nova Iorque, Macmillan, 1917, 5ª reimp. 1950, p. 228.

[55] Loria, *Storia delle Matematiche*, p. 282.

[56] Boyer, *History of Analitic Geometry*., p. 56.

[57] Loria, *op. cit.*, pp. 279-281.

Os matemáticos italianos, no início do século XVI, desenvolveram uma teoria matemática que conduziu às soluções algébricas gerais de equações cúbicas, atribuída a Scipio del Ferro (1465-1526) e seus alunos da Universidade de Bolonha, por volta de 1515. Esta Universidade era uma das maiores e mais famosas da Europa naquela época. Entre seus alunos, estiveram Pacioli, Albrecht Dürer e Copérnico. Em relação às equações cúbicas, elas podiam ser reduzidas a três tipos que, em notação atual, são correspondentes às equações: $x^3 + px = q$; $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$ onde "p" e "q" são números positivos. Pode-se acreditar, segundo E. Bortolotti, [58] que del Ferro resolveu todos os tipos. Nunca publicou as suas soluções, contudo a fama da descoberta tornou-se conhecida e, depois da morte de Scipio, um calculador veneziano chamado Nicolò Tartaglia (1506-1557), alcunhado de "O Gago", redescobriu os seus métodos (1535). Tartaglia mostrou publicamente os seus resultados, mas guardou segredo em relação ao método pelo qual os obtivera. Depois, revelou as suas idéias a um ilustrado médico de Milão, Girolamo Cardano (1501-1576). Mas quando Cardano publicou, em 1545, o seu pequeno, mas notável livro de álgebra, com o título de *Ars Magna* , Tartaglia descobriu que o método era amplamente divulgado no livro, com o devido reconhecimento ao seu descobridor, mas ficou desgostoso. Seguiu-se um amargo debate, com insultos lançados de ambas as partes, no qual Cardano foi defendido por um estudioso mais novo, Ludovico Ferrari.

A descoberta da solução da equação cúbica foi publicada somente uma geração mais tarde por causa dessa desagradável controvérsia entre Cardano e Tartaglia. [59] Tal solução foi de grande importância na história da matemática por várias razões. Entre estas destacamos o impulso que ela forneceu ao desenvolvimento da álgebra em geral e à teoria das equações em particular. Este desenvolvimento foi essencial ao despontar de métodos analíticos. As obras de Ferro, Cardano e Tartaglia sobre a cúbica e a de Ferrari (1522-ca. 1560) sobre a quártica romperam temporariamente a conexão até então existente entre equações cúbicas determinadas e curvas dadas por equações indeterminadas do segundo

---

[58] E. Bortolotti, "L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI", *Periódico de Matemática*, série 4, vol. 5, 1925, pp. 147-184.

[59] Cajori, *A History of Elementary Mathematics,* pp. 224-225.

grau. Cúbicas e quárticas eram agora solucionáveis pelo cálculo, no lugar da intersecção entre cônicas. Ainda por volta de mais de um século, a relação entre álgebra e geometria iria se restringir a uma mútua colaboração na solução de problemas determinados. Não havia uma associação recíproca entre curvas e equações indeterminadas. Surgira uma confiança maior nas operações da álgebra, independentemente de qualquer significado geométrico, diminuindo a dependência desta em relação à geometria. O desenvolvimento das operações, das notações e dos conceitos na aritmética e na álgebra talvez tenha sido a contribuição principal do século XVI para a história da geometria analítica. Os antigos gregos tinham possuído um tipo de análise algébrica na forma geométrica, na qual a solução de equações determinadas era alcançada através da redução dos problemas a questões de determinação de intersecções entre curvas conhecidas. Os árabes haviam dado continuidade a este ponto de vista, com respeito às equações cúbicas. Mas o sucesso obtido neste início do período renascentista quanto à resolução de cúbicas e quárticas por meios algébricos levou mais tarde ao desenvolvimento de uma teoria elementar das equações. [60]

Na sua *Ars Magna*, Cardano considerou números negativos, chamando-os de "fictícios", mas foi incapaz de fazer avançar o chamado "caso irredutível" da equação cúbica, no qual há três raízes reais que aparecem como somas ou diferenças daqueles que agora chamamos de "números complexos". Esta dificuldade foi resolvida por um dos últimos grandes matemáticos bolonheses do século XVI, Rafael Bombelli (nascido ca. 1530), cuja *Algebra* foi publicada em 1572.

A álgebra de Bombelli contribuiu para esta tendência de formalização de grandezas algébricas e das operações realizadas com elas, através do uso sistemático de letras e de abreviações para operações e relações. A idéia de denotar grandezas por letras certamente não era nova, pois ela havia sido encontrada não somente entre os indianos, mas também entre os gregos, pelo menos desde a época de Aristóteles. Todavia, a aplicação de sinais especiais e abreviações para operações aos símbolos literais que indicavam quantidades

[60] A esse respeito, ver Bos, "Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the 'Construction of Equations', 1637-1750", *Archive for History of Exact Sciences* 30: 331-380, 1984.

parece ser devida, em grande parte, a Bombelli. [61] A forma particular de suas notações tem menor relevância do que a idéia da álgebra simbólica, mas ambas, a forma e a idéia, parecem ter tido uma grande influência. [62]

A *Algebra* de Bombelli também foi relevante por ter feito uso de provas algébricas, independente de justificação geométrica, por ter sugerido a aplicação de coordenadas retangulares na localização de um ponto em um plano e por ter usado uma unidade arbitrária de comprimento em construções geométricas. Estas idéias, segundo Boyer, passaram quase que despercebidas pelos seus sucessores. No seu livro, Bombelli introduziu também números imaginários. Ele escreveu uma expressão equivalente ao nosso 3i como $\sqrt{0-9}$ (literalmente: R[0m.9], R para raiz, m. para menos). [63] Este fato permitiu-lhe tratar o caso irredutível da equação cúbica. Os números imaginários, abordados nas obras de Cardano e de Bombelli, começavam a perder parte de seu caráter “sobrenatural”, mas sua aceitação total só se deu no século XIX.

Em um manuscrito que não fazia parte de sua *Algebra* e que nunca foi publicado, Bombelli estudou as construções ou soluções gráficas de problemas determinados de uma maneira um tanto análoga àquela que Descartes fez uso depois em sua *Géométrie*.[64] Na mesma época, por volta de 1587, Paolo Bonasoni compôs uma obra similar, com o título *Algebra Geometrica.* Nela, Bonasoni tentou dar uma base lógica para a álgebra, fundamentando-a sobre a geometria, uma idéia que retrocedia a Fibonacci. Bonasoni mostrou que todos os problemas redutíveis a equações do segundo grau podiam ser construídos apenas com régua e compasso. Ele forneceu algumas construções gráficas para estes problemas, incluindo algumas pela aplicação de áreas. No entanto, Bonasoni não fez uso de símbolos para operações, nem da notação exponencial de Bombelli, mas usou

---

[61] Boyer, *History of Analytic Geometry,* p. 58.

[62] Para uma abordagem do surgimento das notações, ver Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations,* Chicago, Open Court, 1928-1929, 2 vols.

[63] De acordo com D. J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, p. 148.

[64] As matemáticas italianas dos séculos XVI e XVII são discutidas em uma série de artigos de Ettore Bortolotti, escritos entre 1922 e 1928, por exemplo no *Periodico di Matematica,* vol. 5, 1925, pp. 147-184. *Ibid.*, vol. 6, 1926; pp. 217-230; *Ibid.*, vol. 8, 1928, pp. 19-59; *Scientia*, 1923, pp. 385-394; ainda: “L’algebra nella storia e nella preistoria della scienza”, *Osiris*, vol.1 (1936), pp. 184-230, sobre a obra dos algebristas italianos.

letras para representar tanto as quantidades dadas como as desconhecidas. Infelizmente a obra de Bonasoni nunca foi publicada e só se tomou conhecimento dela por meio de artigos e obras de pesquisadores. [65] A obra dos algebristas italianos impulsionou o estudo de todas as classes de equações, mas não havia naquela época uma notação satisfatória (com a possível exceção daquela de Bonasoni) para o que agora seria chamado de parâmetro. As quantidades eram números conhecidos – caso em que os algarismos indo-arábicos eram utilizados – ou números desconhecidos – e neste caso abreviações apropriadas foram inventadas. Os problemas que surgiam eram geralmente casos particulares que levavam a equações com coeficientes numéricos especificados. Neste ponto, os algebristas italianos não diferiam substancialmente dos "cossistas" aritméticos da Alemanha. Eles estavam familiarizados com casos de polinômios e equações polinomiais, mas a noção de um polinômio propriamente dito não havia surgido ainda.

1.2.1. François Viète, um algebrista francês do século XVI.

Boyer [66] creditou a introdução da idéia de um parâmetro a François Viète (1540-1603). Viète foi um jurista francês, ligado à Corte de Henrique IV, que durante a guerra contra a Espanha, decifrou cartas escritas pela Corte espanhola a seu governador na Holanda. Tais cartas eram escritas em um código cifrado, com mais de quinhentos caracteres, com significação variada, e os espanhóis atribuíram a descoberta da chave do código à magia. [67]

Os principais resultados de Viète faziam parte do desenvolvimento da teoria das equações (por exemplo: *In Artem Analyticam Isagoge,* 1591), onde se encontram algumas das primeiras representações de números por letras. O uso de coeficientes numéricos tinha impedido a discussão de casos gerais de problemas algébricos. O trabalho dos algebristas do século XVI (os "cossistas", segundo a palavra italiana *cosa* usada para designar a incógnita) era expresso através de uma

---

[65] Ver Ettore Bortollotti, *Studi e Ricerche sulla Storia della Matematica in Italia nei Secoli XVI e XVII*, Bolonha, s. c. e., 1928.

[66] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 59.

[67] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, pp. 229-230.

notação um tanto complicada. Na *logistica speciosa* de Viète surgiu um simbolismo geral, no qual as letras eram usadas para exprimir coeficientes numéricos, embora A^2 ainda fosse escrito como "A quadratum". Os sinais " + " e " – " já eram usados com o seu significado atual. Sua obra não foi somente uma contribuição à notação, mas também às idéias algébricas. Todavia, o desenvolvimento da técnica algébrica deu-se inclusive como resultado do aperfeiçoamento da notação, pois existe uma relação profunda entre conteúdo e forma. O aperfeiçoamento da notação feito por Viète foi seguido, uma geração mais tarde, pela obra *La Géométrie* de Descartes, com suas aplicações da álgebra à geometria, e pela notação atualmente usada.

A álgebra antes de Viète tratava, em geral, de equações numéricas particulares, tais como a cúbica "*cubus* p. 6 *rebus aequalis* 20", isto é, $x^3 + 6x = 20$, que foi fornecida por Cardano. Por outro lado, Viète em sua obra *De Recognitione Aequationum* estudou as propriedades das equações da forma "A cub.–B planum in A aequatur B plano in Z", isto é, $x^3 - b^2x = b^2c$. [68] Viète usava vogais para designar quantidades desconhecidas e consoantes para representar quantidades consideradas conhecidas. Assim, ele tornou possível a distinção não somente de dois, mas de três tipos de grandezas em álgebra – especificamente números dados, parâmetros e variáveis. O próprio Viète não fez referência explícita a parâmetros e variáveis, mas apenas introduziu o germe para estas idéias. Ele não foi o primeiro a usar símbolos em equações, pois os embriões de uma álgebra literal são encontrados na obra de Bombelli. Porém, Viète parece ter dado origem à prática de usar letras como coeficientes dos termos em uma equação – isto é, de considerar equações cujos coeficientes não eram números fixos. Tornou-se possível assim construir uma teoria geral das equações e estudar não as equações cúbicas, mas "a" equação cúbica em geral. A relevância deste ponto de vista parece ter sido compreendida por Viète, pois ele confrontou a *logistica numerosa* de uso comum com sua *logística speciosa.* A primeira aplicava os cálculos aos números: a última tratava de "species" ou " as formas das coisas". Esta última tornou-se possível através de seus "elementos alfabéticos". Estas "coisas" podiam ser elementos geométricos incomensuráveis, cujas relações

---

[68]Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, pp. 229-230.

entre si não eram possíveis de se expressar em termos de números inteiros. Assim, de acordo com Cajori, [69] Viète chegou bem próximo à idéia de uma variável algébrica real, bastante importante no desenvolvimento da matemática em geral, e da geometria analítica em particular. É necessário ressaltar que, por um lado, tinha havido antecipações geométricas da idéia de uma variável real, notadamente na latitude de formas medieval. Por outro lado, as vogais de Viète não eram, estritamente falando, variáveis no sentido de símbolos que representavam qualquer um de toda uma classe de valores aceitáveis. A notação que ele utilizava de vogais e de consoantes, como era aplicada a equações determinadas, não era tanto uma distinção entre variável e quantidades fixas, mas sim entre aquelas constantes que eram assumidas como sendo desconhecidas e as que eram assumidamente conhecidas. Foi somente mais tarde, quando tais notações convencionais foram aplicadas a representações gráficas de equações indeterminadas, que as vogais vieram a ser encaradas como variáveis, em vez de quantidades fixas desconhecidas. Tal notação literal de Viète facilitou naturalmente esta transição de um ponto de vista para o outro. L. C. Karpinski declarou que foi a notação literal algébrica de Viète que "deu uma língua à geometria analítica de Descartes". [70]

Viète restringiu sua abordagem a equações em uma só variável, que não podiam, portanto, representar um lugar geométrico. No entanto, ele foi um dos que aplicaram sistematicamente a álgebra à solução de problemas geométricos. De fato, suas vogais e consoantes geralmente se referiam a magnitudes geométricas, como é possível inferir-se através dos nomes pelos quais elas eram designadas. Sua distinção entre parâmetros e incógnitas surgiu com esta terminologia, bem como na convenção "vogal x consoante": as primeiras nove potências de uma quantidade constante dada eram conhecidas, respectivamente, como *longitudo* ou *latitudo* (lembrando a obra de Oresme), *planum, solidum, plano-planum*, (...) , *solido-solido-solidum*. As potências correspondentes de uma quantidade desconhecida eram designadas, respectivamente, por *latus* ou *radix, quadratum, cubus, quadrato-quadratum*, (...) , *cubo-cubo-cubus*. Embora continuasse a usar

[69] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, pp. 233-234.

[70] Ver L. C. Karpinski, "The Origin of the Mathematics as Taught to Freshmen", *Scripta Mathematica* 6: 133-140, 1939.

uma nomenclatura geométrica, para potências de quantidades, reminiscente daquela de Diofanto e de Chuquet, Viète, em sua álgebra, foi além da terceira dimensão. Viète chegou a um conhecimento parcial das relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação. Infelizmente ele rejeitou todas as raízes não positivas e não pôde assim perceber completamente as relações em questão. [71]

Na terminologia usada por Viète, para quantidades conhecidas e desconhecidas, percebe-se uma estreita conexão entre operações algébricas e visualização geométrica. Esta relação, no entanto, não representava uma antecipação da geometria cartesiana. Ao menos quanto a um aspecto, reforçou a tendência (já vista desde há muito tempo, em Pappus) de visualizar equações cúbicas na forma de representações estereométricas mais do que graficamente em duas dimensões. Se A^3 ou B^3 fossem entendidos como magnitudes numéricas – ou melhor ainda, como quantidades lineares – em vez de sê-lo como cubos geométricos, a associação destas quantidades a linhas em um diagrama de coordenadas talvez fosse facilitada. A associação da álgebra e da geometria, no sentido usado por Viète, levou a uma noção de que todas as equações deveriam ser homogêneas, em termos das variáveis e dos coeficientes. Isto significava que as constantes ou parâmetros em uma dada expressão, bem como as magnitudes desconhecidas, possuíam dimensionalidade geométrica. A equação $x^2 + bx = c^2$, por exemplo, era interpretada como uma proporção entre as linhas $x : c = c : (x + b)$. Boyer viu nesta constatação uma evidência de que a geometria analítica não é apenas uma combinação da álgebra e geometria, visto que, segundo ele, tal conexão serviu para encobrir o caminho em direção ao uso de coordenadas. [72] A obra de Viète, na visão de Boyer, abrangia a aplicação da álgebra à geometria, mas não era uma geometria com coordenadas e não incluía problemas de lugares geométricos. Reciprocamente, sua aplicação de geometria à álgebra não tomava a forma da representação gráfica de equações ou funções através de um sistema de coordenadas. [73]

[71] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, p. 230.

[72] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 61.

[73] Boyer cometeu aqui o equívoco de uma manifestação anacrônica, ao observar a obra de Viète com a lente da ‘geometria analítica’, que é bem posterior a essa época. *Loc.cit.*

Em um estudo, o *Supplementum Geometriae* de 1513, Viète [74] ressaltou que a representação das raízes de uma cúbica irredutível ou de uma equação biquadrática é equivalente à trissecção do ângulo ou à duplicação do cubo, dando a estes problemas um significado mais amplo do que eles tinham previamente. Para resolver estes problemas Viète propôs fazer uma extensão dos postulados euclidianos para incluir construções por instrumentos similares ao antigo mesolábio de Eratóstenes. A obra de Descartes apresentou um esforço para estender tal sistematização às equações de graus mais altos e ele também sugeriu uma liberação em relação aos postulados usuais. Apesar disso, não se deve considerar apressadamente a obra de Descartes como sendo nada mais que uma aplicação de equações a curvas de maior grau, que não haviam sido tratadas suficientemente por Viète e pelos antigos. Descartes sofreu influência da arte analítica de Viète como uma ferramenta algébrica. Talvez devido a limitações quanto ao aspecto geométrico, Descartes teve que buscar novas curvas para efetuar as construções.

O caminho imediato para a geometria cartesiana parece ter sido preparado mais por desenvolvimentos algébricos do que por geométricos. Boyer [75] citou vários trabalhos relevantes dos anos de 1629 e 1631, a saber: *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, de Albert Girard (1595-1632); a *Artis Analyticae Praxis*, de Thomas Harriot (1560-1621), e a *Clavis Mathematicae*, de William Oughtred (1574-1660). Estes três livros apresentaram grande ênfase nas abreviações e símbolos algébricos. Segundo Boyer, a *Invention Nouvelle en l'Algèbre* popularizou a notação do expoente de potências, que foi transmitida de Chuquet e Bombelli até Stevin.

Por exemplo, Girard escrevia como "3 esgale á –6 1 +20" o que agora poderia aparecer como $x^3 = -6x + 20$. Nota-se que continua a faltar um símbolo específico para representar a igualdade e que a terminologia geométrica de Viète já tinha desaparecido por completo. Um aspecto inesperado da obra de

[74] Sobre a obra de Viète, ver *Opera Mathematica*, ed. Van Schooten, Leiden, Lugduni Batavorum, 1646. Reeditado com um prefácio de J. E. Hofmann, Nova Iorque/Hildesheim, s. c. e., 1970.

[75] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 69.

Girard é o livre uso de quantidades negativas, tanto geométricas, quanto algébricas, em equações e nas suas soluções. [76]

A obra de Harriot só foi publicada postumamente, em 1631, mas já tinha sido escrita bem antes. Ele descobriu a relação existente entre os coeficientes e as raízes de uma equação em sua forma mais simples. Esta descoberta foi feita, portanto, quase que ao mesmo tempo por ele na Inglaterra e por Girard e Viète no continente europeu. Harriot, em sua obra, não incluía, ainda, um reconhecimento de raízes negativas, mas apresentava uma forma modificada das notações de Viète, de sua teoria de equações, e apresentava ênfase na analítica ou tratamento algébrico dos problemas geométricos. [77]

Harriot adotou vogais e consoantes minúsculas no lugar das letras maiúsculas de Viète, mas a substituição de *aaaa*, por exemplo, em vez de *A* quad.*quad.* foi de maior importância. Ele utilizou formas tais como: "aaa—3bba". O cálculo literal já estava mais próximo da notação cartesiana, que utilizava a^3 em vez de "aaa". [78]

Uma terceira ligação entre Viète e Descartes, além de Girard e Harriot, foi a de Oughtred, possivelmente a de maior influência. Em sua *Clavis Mathematicae* se encontra a mesma tendência em direção ao simbolismo que era evidente em Girard e em Harriot. Como na obra de Girard, o sinal de "menos" era usado não somente como símbolo da operação de subtração, mas também como indicativo de um número "negativo". Boyer relatou ainda que poucos dos novos sinais e abreviaturas, que Oughtred usou, sobreviveram. Uma exceção importante a ser citada é o símbolo "×" para a multiplicação, que até hoje é usado, Suas abreviações "Aq" e "Ac" para a segunda e terceira potências da incógnita, que Viète escrevia *A quadr.* e *A cubus*, foram substituídas poucos anos mais tarde pela notação exponencial.

Vamos apresentar alguns exemplos das notações utilizadas por Viète, Girard e Descartes. Por meio da sua notação Viète escrevia "*a* cubus + *b* in *a* quadr.3 + *a* in *b* quadr.3 +b cubo aequalia $\overline{a+b}$ cubo" para designar a expressão

---

[76] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, p. 231.

[77] *Ibid.*

[78] Boyer, *History of Analytic Geometry* p. 70.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$. O traço colocado acima era um vínculo introduzido por ele como um sinal de agregação. Segundo Cajori, os parênteses só apareceram com Girard. Em equações numéricas, Viète designava a quantidade desconhecida por N, o seu quadrado por Q e o seu cubo por C.

O símbolo O utilizado para x foi adotado por Girard, enquanto os símbolos da desigualdade > e < foram introduzidos por Harriot. Os exemplos a seguir são ilustrativos: [79]

	NOTAÇÃO ANTIGA	**NOTAÇÃO ATUAL**
Viète	$1C - 8Q + 16N$ aequ.40	$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$
Viète	*A* cubus + *B* plano 3 in *A*, æquari *Z* solido 2	$x^3 + 3bx = 2c$
Girard	$1\ 3 \infty 13\ 1 + 12$	$x^3 = 13x + 12$
Descartes	$x^{3*} + px + q \infty 0$	$x^3 + px + q = 0$
Harriot	$aaa - 3bba = 2ccc$	$a^3 - 3ab^2 = 2c^3$
Oughtred	$\left\{\begin{array}{l} Aqqcc \\ 120AqqcEc \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} A^{10} \\ 120A^7E^3 \end{array}\right.$

[79] Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, p. 234.

Oughtred deu bastante importância à “arte analítica”. Em sua obra, a aritmética dos números foi contrastada com a “muito mais conveniente” *arithmetica speciosa*, “na qual tomando a coisa procurada como conhecida, nós achamos o que procurávamos.” [80] A arte analítica era uma notação, bem como uma forma de apresentação. A chave de Oughtred para a matemática envolvia três partes: cálculo aritmético , cálculo algébrico simbólico e aplicações da álgebra à geometria. Boyer [81] afirmou que Oughtred herdou a matéria aí tratada de Viète e de Ghetaldi. A álgebra de Oughtred é mais formal e mais livre da dependência sobre a geometria do que a de seus predecessores. No entanto, ela continha a construção usual de fórmulas algébricas por régua e compasso. Esta construção continuou a ser a principal conexão entre a álgebra e a geometria e tornou-se o propósito do Livro I de *La Géométrie*, de Descartes. A *Clavis Mathematicae* teve ao todo cinco edições em latim e duas edições em inglês, durante o século XVII.

Estes três matemáticos, Girard, Harriot e Oughtred, não tratavam de problemas de lugares geométricos (*loci*). Girard tentou fazer uma reconstrução dos *Porismas* de Euclides, e vislumbrou a oportunidade que isto podia proporcionar de aplicação da álgebra à geometria. Os períodos antigo e medieval careciam de uma álgebra na qual pudessem expressar problemas de lugares geométricos e representações gráficas da latitude de figuras. Já no período moderno, as primeiras aplicações da álgebra à geometria não incluíam um estudo algébrico dos lugares geométricos e da variabilidade de funções e, portanto, não utilizavam coordenadas geométricas. Durante os primeiros séculos da era moderna a atividade matemática dedicou-se em larga medida ao desenvolvimento da aritmética e da técnica algébrica, e à recuperação da geometria dos antigos. Houve pouco desenvolvimento na teoria das curvas e a linha reta e o círculo continuavam a desempenhar um papel central na geometria e na ciência em geral.

Durante o começo do século XVI houve algumas contribuições para a teoria das curvas. [82] O estudo das cônicas foi revivido, especialmente por Werner; na mesma época, Albrecht Dürer (1471-1528) fez acréscimos significativos à teoria das curvas mais avançadas. Ao introduzir a idéia de um ponto assintótico,

---

[80] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 71.

[81] *Ibid.*

[82] *Ibid.*, p. 72.

Dürer ilustrou-a por uma curva bastante assemelhada à espiral logarítmica. Esta curva pode ter sido sugerida devido ao interesse despertado naquela época na construção de mapas; é a projeção estereográfica plana do loxódromo sobre a esfera. Dürer também reviveu a antiga definição cinemática das curvas, dando como exemplos uma epiciclóide e uma nova conchóide. Todavia, é típica daquela época uma abordagem casual e não sistematicamente desenvolvida. Por exemplo, Bovelles tornou a ciclóide conhecida no início do século XVI, e Galileu referiu-se a ela próximo do fim deste século, mas nenhum dos dois determinou a equação ou propriedades desta curva.

Durante o primeiro terço do século XVII, o estudo da geometria centrou-se sobre as cônicas, já que o número de curvas conhecidas era pouco maior do que tinha sido dois mil anos atrás. Na década de 1634 a 1644, todavia, a situação mudou completamente. Desenvolveram-se possibilidades latentes nos métodos de definição de curvas previamente adotadas e novos princípios foram surgindo e sendo desenvolvidos. A ciclóide já havia sido notada diversas vezes antes, mas quando Mersenne (1588-1648), em 1634, e Galileu (1564-1642), em 1639, sugeriram-na como uma curva digna de estudo, sua forma e propriedades foram prontamente determinadas através da composição de movimentos. Este era um método antigo, que uma nova abordagem viria a suplementar, inclusive com a introdução de coordenadas. [83]

1.2.2. Pierre de Fermat e René Descartes

Pierre Fermat [1608-1665] foi um jurista de Toulouse que tinha um profundo interesse nas obras de geometria da antigüidade clássica, e escreveu um pequeno ensaio sobre geometria, o *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*. Este foi publicado apenas postumamente em 1679, mas provavelmente foi escrito antes da publicação do livro de Descartes. No *Isagoge* encontramos as equações:

[83] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 73.

$$\begin{cases} y = mx \\ xy = k^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 \pm a^2 y^2 = b^2 \end{cases}$$

atribuídas a retas e cônicas, referidas a um sistema de eixos, em geral perpendiculares.

Descartes e Fermat sofreram a influência de Viète, mas continuaram os seus estudos em direções diferentes. Fermat manteve a notação de Viète, aplicando-a ao estudo dos lugares geométricos. Como foi escrito na notação de Viète, o ensaio *Isagoge* parece mais arcaico que *La Géométrie* de Descartes. Quando o *Isagoge* foi publicado, já existiam outras publicações em que a álgebra era aplicada aos resultados da geometria de Apolônio, a saber o *Tractatus de Sectionibus Conicis* (1655), de John Wallis, e uma parte dos *Elementa Curvarum Linearum* (1659), escrito por Johan de Witt. Segundo D. J. Struik, [84] ambos os trabalhos foram escritos sob a influência direta de Descartes.

René Descartes adotou um dos propósitos de Viète – a construção geométrica das raízes de equações algébricas – e deu continuidade a ele juntamente com o simbolismo algébrico moderno.

Segundo W. Shea, [85] a notação empregada por Descartes em 1619 foi emprestada de Clavius. Onde nós escreveríamos $x^2 = ax + b$, Clavius escrevia em sua álgebra: z&ν+N, onde & representa o nosso =, ν é um radical (ou x) e z é o quadrado ou x^2. Descartes em sua carta de 26 de março de 1619 [86], utilizou o simbolismo: "1z&0ν+0N", onde a inclusão de um coeficiente antes de ν e de N não tem muita importância, já que eles representavam números que podiam variar. À época em que ele escreveu as *Regulae ad Directionem Ingenii*, por volta de 1628, Descartes havia melhorado consideravelmente a sua notação. O símbolo "&" , que representava nosso = , foi substituído por: ∞ que ele manteve em *La Géométrie*. É usualmente considerado que esse símbolo seja um conectivo representando as duas primeiras letras de "*æquare*". O símbolo "=" foi sugerido

[84] Struik, *História Concisa das Matemáticas*, p. 167.

[85] Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 48.

[86] Carta a Isaac Beeckman, 26 de março de 1619, em A.T.,vol. X, pp. 156-158.

por Robert Recorde (1510-1558), em seu *The Whetstone of Witte*, em 1557. O seu uso sistemático só se deu no século XVIII.

As duas formas de abordar a geometria, a de Descartes e a de Fermat, acabaram por conduzir ao mesmo princípio fundamental da geometria analítica, que Fermat enunciou precisa e claramente no seu *Isagoge*:

> "Sempre que em uma equação final duas quantidades variáveis [dois segmentos de reta ou duas incógnitas] são encontradas, nós temos um lugar geométrico (locus), onde a extremidade de um deles [dos segmentos] descreve uma linha, reta ou curva." [87]

Fermat estava interessado nas tentativas de reconstituição de alguns tratados gregos perdidos, baseadas nas informações fornecidas por Pappus e outros comentadores. Ele escreveu uma reconstituição de dois livros de Apolônio em *Plane Loci*, em estilo clássico, sem nenhuma referência à arte analítica de Viète. Apesar disso, ele estava bem familiarizado com o conteúdo e o método de Viète e de outros escritores do princípio da modernidade. [88]

Por volta de 1629, Fermat parece ter tido a idéia de um tratamento analítico de máximos e mínimos, e quase simultaneamente aplicou a análise de Viète aos problemas de lugares geométricos. Todos gostariam de saber como se deu a transição da arte analítica de Viète para os princípios fundamentais da geometria analítica, mas Fermat deu somente algumas sugestões incidentais acerca disso. [89]

Na terminologia de Viète as vogais representavam previamente as incógnitas, mas apesar disso eram grandezas fixadas ou determinadas. O ponto de vista de Fermat deu um significado às equações indeterminadas em duas variáveis, ao permitir que uma das vogais assumisse sucessivos valores lineares, medidos ao longo de um dado eixo, a partir de um ponto inicial. As linhas

[87] *Oeuvres de Fermat*, eds. P. Tannery e C. Henry, Paris, Gauthier-Villas, 1891, vol. I, p. 91.

[88] Loria, *Storia delle Matematiche*, p. 476 e Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 74.

[89] Loria, *op. cit.*, pp. 489-490.

correspondentes representando a outra vogal, como era determinado pela equação dada, eram traçadas como ordenadas, formando um dado ângulo com o eixo. [90]

Começando com uma equação algébrica, Fermat mostrou como esta equação podia ser considerada como definidora de um lugar geométrico de pontos – uma curva – com respeito a um dado sistema de coordenadas. Fermat não criou as coordenadas e nem foi o primeiro a usar a representação gráfica. O mesmo se pode dizer de Descartes. O raciocínio analítico vinha sendo usado na matemática há algum tempo, e a aplicação da álgebra à geometria até se tornara um lugar comum.

Parece não ter havido ocorrência anterior a Fermat e Descartes da constatação de que, em geral, uma dada equação algébrica em duas variáveis determina, por si só, uma única curva geométrica. O reconhecimento deste princípio, juntamente com seu uso como um procedimento algorítmico formalizado, constituiu uma contribuição importante destes dois matemáticos.

---

[90] Loria, *Storia delle Matematiche*, p. 477-478.

CAPÍTULO 2

***Regulae ad Directionem Ingenii* x *La Géométrie*:**

A conexão entre o método e a geometria de Descartes

As conexões existentes entre *La Géométrie* e a obra filosófica de Descartes foram, de alguma forma, subestimadas nas pesquisas dedicadas ao estudo daquele texto. Um motivo que contribuiu bastante para isso foi a apresentação de *La Géométrie* como um ensaio do "método" ou como aplicação das regras estabelecidas no *Discours de la Méthode*. Esta afirmação parece paradoxal, visto que a própria apresentação coloca o único tratado matemático orgânico de Descartes como dependente do método a ser seguido "*pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*" e dos princípios metafísicos que estão na sua base. Entretanto, a conexão estabelecida por esta via entre *La Géométrie* e o método cartesiano parece débil. Isto originou uma discrepância na pesquisa dedicada ao estudo daquele texto, separando a análise de orientação "filosófico-humanista" daquela de orientação "científica".

A razão fundamental para que o vínculo entre *La Géométrie* e as regras do *Discours de la Méthode* pareça débil está na generalidade dos preceitos metodológicos contidos no *Discours* e resumidos nas quatro famosas regras que supostamente deviam governar o pensamento científico. É inegável a constatação de que se tentarmos estabelecer uma estreita conexão entre os preceitos do *Discours de la Méthode* e os conteúdos de *La Géométrie*, como se Descartes houvesse se esforçado para obter os resultados desta última como aplicações "diretas" de suas regras metodológicas, ficaremos muito decepcionados. A impressão que resultaria seria a de um liame genérico e vago. Ao contrário, se alargarmos o exame da obra cartesiana, sobretudo se considerarmos as *Regulae ad Directionem Ingenii*, é possível perceber uma ligação muito mais estreita entre o método de Descartes e o conteúdo de *La Géométrie*. Assim poderemos examinar em termos mais precisos algumas questões relativas à obra matemática de Descartes.

O lugar que a geometria ocupava na concepção de Descartes fica esclarecido na Regra IV, que contém os famosos trechos concernentes ao significado da *Mathesis Universalis.* Destacamos o paralelismo entre a crítica de Descartes às ciências particulares (ou à especialização do saber) e a reivindicação da necessidade de se criar uma forma de saber universal. Além disso, há a crítica do modo de fazer matemática (aritmética e geometria) que emerge da tradição e a reivindicação de uma 'verdadeira' matemática, que seria bem observada nos antigos como a ciência mais fácil e necessária de todas para formar e preparar os espíritos a compreender outras ciências mais elevadas. [91]

De acordo com a Regra IV, a "matemática universal" ou *Mathesis Universalis* de Descartes seria uma ciência da "ordem" e da "medida", onde quer que elas aparecessem nas várias disciplinas matemáticas. Os axiomas, princípios e métodos comuns a todos os campos propriamente matemáticos seriam abrangidos pela *Mathesis*. A palavra "medida" poderia ser entendida como "quantidade em geral", ou seja, o objeto abstrato com que se lida após tê-lo abstraído de determinados objetos matemáticos, dentro das disciplinas matemáticas particulares. A palavra "ordem" parece ter uma conotação de achar esquemas gerais de análise para problemas, uma vez que tenham sido estabelecidos em termos abstratos. Tudo isto reflete idéias inspiradas no neo-platonismo, em uma "matemática geral" que foi corrente no fim do século XVI e começo do século XVII. [92]

Descartes argumentou que "não basta atender à etimologia da palavra", segundo a qual "o termo matemática significa simplesmente disciplina", pois neste caso "as outras ciências não teriam menos direito que a geometria de serem chamadas de partes das matemáticas". [93] A substância da matemática, ou seja, aquilo que a faz ser apontada como uma ciência geral ou *Mathesis Universalis*, é o estudo de todas as coisas concernentes à ordem e à medida, "sem importar se

[91] "... como se esta disciplina parecesse a mais fácil e necessária de todas para educar e preparar os espíritos a compreender outras ciências mais elevadas". (Descartes, *Règles pour la Direction de L'Esprit*, Regra IV, p. 24).

[92] Descartes, *Règles pour la Direction de L'Esprit*, Regra IV, pp. 26-28. No decorrer deste capítulo 2, sempre que citarmos as *Regulae* estaremos nos referindo a esta obra, e indicaremos apenas o número da Regra correspondente e a página onde a mesma se encontra.

[93] Regra IV, pp. 26-27.

esta medida é baseada em números, figuras ou astros, sons ou qualquer outro objeto” [94]

A ligação entre a *Mathesis Universalis* e o procedimento dedutivo é evidente. Como aquela busca a ordem nas coisas, assim – ensina-o a Regra V – “todo o método consiste na ordem e na disposição das coisas, por meio das quais é preciso direcionar a força da mente para se descobrir qualquer verdade.” [95] Isto implica em que a classificação das coisas não deverá mais ser feita por categorias, como na tradição filosófica escolástica, mas segundo a ordem dedutiva. [96] Como conseqüência, “para se alcançar a ciência é necessário percorrer uma a uma, com um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, as coisas que se relacionam com o nosso objetivo e abrangê-las em uma enumeração suficiente e ordenada.” [97]

E. J. Dijksterhuis fez algumas observações que, embora genéricas, têm o mérito de especificar corretamente o liame existente entre La *Géométrie* e as *Regulae*[98]. Ele observou que:

> “... se verdadeiramente desejamos tomar consciência do método de Descartes, não deveríamos ler tanto o encantador *Discours*, que é uma conversação mais do que um tratado, mas sim a obra *Regulae ad Directionem Ingenii* [...]. As *Regulae* contêm de fato uma exposição da denominada *Mathesis Universalis*, que Descartes sempre considerou uma das suas maiores descobertas metodológicas e que desejava ver aplicada em toda a ciência da natureza.” [99]

---

[94] Regra IV, pp. 26-27.

[95] Regra V, p. 29.

[96] Esta conseqüência é discutida na Regra VI, p. 31.

[97] Regra VII, p. 39.

[98] Estas observações estão contidas E. J. Dijksterhuis, *Il Meccanicismo e l’Immagine del Mondo*, Milão, Feltrinelli, 1971, p. 542.

[99] *Ibid.*

E mais adiante, prosseguiu afirmando:

> "O ensaio *La Géométrie*, no qual Descartes apresentou sua nova descoberta, merece [...] de pleno direito ser definido como uma demonstração do método cartesiano; não contém todavia uma aplicação das quatro regras do *Discours*. De fato o verdadeiro *Discours de la Méthode* é constituído pelas *Regulae ad Directionem Ingenii*." [100]

Não se trata, entretanto, de identificar completamente a *Mathesis Universalis* com a álgebra, a ponto de inferir que o ideal de Descartes fosse nada mais que a sistemática aplicação do método algébrico a toda a ciência. *La Géométrie* desse modo transformar-se-ia na aplicação do método da álgebra à geometria, o que em parte é verdadeiro mas, em nossa opinião, insuficiente para definir os caracteres específicos da geometria cartesiana. É importante salientar aqui o caráter marcadamente construtivo que a análise tem na geometria cartesiana – um caráter inexistente na acepção moderna do termo "análise".

Na geometria cartesiana, nenhum tipo de raciocínio é admitido se ele não permitir uma construção explícita daquilo que é procurado ou do resultado a demonstrar. Assim, é excluída da matemática cartesiana toda forma de raciocínio por absurdo. [101]Além disso, os entes sobre os quais se raciocina devem ser todos construtíveis, sendo portanto impensável uma definição deles pela via convencional ou axiomática. Ainda há a acrescentar que as cadeias dedutivas admissíveis devem ser "finitas". Até mesmo as formas "embrionárias" de raciocínio indutivo que se acham na obra de Descartes se diferenciam do raciocínio indutivo matemático moderno. Este último permite que, com um número finito de passos, se dê um "salto" do finito ao infinito.

---

[100] Dijksterhuis, *Il Meccanicismo e l'Immagine del Mondo*, p. 543.

[101] Esta opinião de Giorgio Israel é exposta em "*Dalle Regulae alla Géométrie*", *in* G. Belgioioso *et alii*, orgs, *Descartes: Il Metodo e i Saggi*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1990, vol. 2, p. 443.

A diferença entre método analítico e método sintético e a avaliação que Descartes fez de ambos são expostas de modo bastante claro em uma passagem da *Resposta à Segunda Objeção às Meditationes*. [102] Descartes observou que nas obras dos geômetras a maneira de demonstrar é dupla: "uma se faz pela análise ou resolução, e a outra pela síntese ou composição".

A descrição que Descartes fez dos procedimentos do método sintético faz menção à geometria dos antigos (e em particular ao modelo euclidiano) . Este procedimento visaria arrebatar o consenso do próprio leitor enquanto faz uso – diferentemente do método analítico – dos procedimentos de "coerção" típicos da lógica formal. Nota-se, em particular, a referência ao método de demonstração por absurdo, que Descartes declarou aqui implicitamente (como conseqüência de sua refutação à síntese) não querer incluir no seu método. A sua descrição é a seguinte:

> "A síntese, ao contrário [da análise], por ser uma visão diferente e examinando as causas pelos seus efeitos (se bem que a prova que ela proporciona muitas vezes também investigue os efeitos pelas causas) demonstra na verdade claramente o que está contido em suas conclusões e se serve de uma longa seqüência de definições, de condições, de axiomas, de teoremas e de problemas, a fim de que, se desses não provierem algumas conseqüências, ela [a síntese] faz ver como tais conseqüências estão contidas nos antecedentes, e que ela arranca o consentimento do leitor, por mais teimoso que ele possa ser; mas ela não dá, como a outra, uma inteira satisfação aos espíritos daqueles que desejam aprender, porque ela não ensina o método pelo qual a coisa foi inventada." [103]

---

[102] Descartes, *Les Méditations Métaphysiques de René Descartes, in* A.Bridoux, ed., R. Descartes, *Oeuvres et Lettres*, Paris, Gallimard, 1953, p. 388.

[103] *Ibid.*

Descartes reprovou na síntese a ausência de um processo construtivo, pois "ela não ensina o método pelo qual a coisa foi inventada". O método analítico, pelo contrário, possui esta grande superioridade, não desconhecida dos antigos, mas que dela guardavam "segredo". De fato, o trecho citado acima prossegue assim:

> "Os antigos geômetras tinham o costume de se servirem somente desta síntese nos seus escritos, não que eles ignorassem inteiramente a análise mas, a meu ver, porque eles se ocuparam tanto dela que a reservaram para si mesmos, como um segredo de importância". [104]

Nota-se uma estreita consonância entre as *Meditationes* e as *Regulae* sobre este ponto de vista a respeito do método sintético e do método analítico. Nas *Regulae*, Descartes observou que, embora tivesse lido a maior parte das coisas que se costumam ensinar na aritmética e na geometria, não o satisfizeram plenamente os autores. Neles lia muitas coisas acerca dos números que comprovava serem verdadeiras, por cálculos feitos depois, e quanto às figuras, apresentavam, por assim dizer, muitas verdades ante os olhos, que derivavam necessariamente de certos princípios. Mas parecia-lhe que não deixavam ver suficientemente por que tais coisas eram assim e como se fazia o seu descobrimento. Ele criticou certo gênero de demonstrações superficiais, que muitas vezes se fazem por casualidade, mais que por arte, e que pertencem mais aos olhos e à imaginação do que ao entendimento. [105] A seguir, declarou suspeitar que os primeiros filósofos conhecessem uma matemática muito diferente da matemática vulgar de seu tempo e que depois os próprios escritores a tivessem suprimido por conveniência. Realmente, como o haviam feito muitos artesãos, a respeito de seus inventos, assim talvez temessem que ela, sendo tão fácil e simples, perdesse o seu valor depois de divulgada. [106]

---

[104] Descartes, *Les Méditations Métaphysiques de René Descartes*, p. 388.

[105] Regra IV, p. 23.

[106] Regra IV, p. 25.

O valor do procedimento analítico provém em conseqüência da ligação que ele tem com a “verdadeira via” através da qual é alcançada a invenção e porque mostra o liame de dependência causal. Ele provém, portanto, do caráter “construtivo” deste método. Descartes ainda esclareceu, em sua resposta à *Segunda Objeção às Meditationes*, que, em se tratando de questões metafísicas, há uma particular inadequação da síntese em seu tratamento, ao passo que ela é mais aceitável nas questões de geometria. Isto vem da natureza das noções básicas da geometria que, não estando em contradição com os sentidos, são acolhidas de modo unânime. [107] Conseqüentemente, os axiomas da geometria são aceitáveis somente enquanto o próprio conteúdo de verdade “é claro” e “distinto”. Somente em virtude disto o método sintético pode ser utilmente aceito em geometria, bem entendido, após a análise. São estabelecidas assim, uma vez mais, a superioridade e a prioridade do método analítico-construtivo em relação ao sintético-formal.

O exame das *Regulae* servirá ao objetivo de esclarecer, em termos mais precisos, o significado do método construtivo, e para mostrar como ele se traduz diretamente no conceito de “construção geométrica” e em uma precisa definição da modalidade de tal construção. Descartes fez um reexame crítico do conceito de possibilidade e facilidade de construção de uma figura geométrica em vigor na geometria precedente e introduziu uma nova interpretação desse conceito. A classificação cartesiana das curvas, que é talvez a contribuição mais importante dada por Descartes à matemática, é conseqüência direta dos princípios gerais do método analítico cartesiano, tal como são expostos nas *Regulae*.

Entre 1619, época dos primeiros escritos matemáticos de Descartes e 1637, quando foram publicados o *Discours* e os *Ensaios*, houve a redação das *Regulae*. Neste texto encontra-se a explicação do seu “apego” à visão clássica construtiva da geometria e também da importância por ele atribuída aos procedimentos algébricos. Descartes passou de uma visão quase ortodoxa clássica para uma visão que atribuía um papel importante a esses procedimentos.

---

[107] Descartes, *Les Méditations Métaphysiques de René Descartes*, p. 388. O contrário ocorreria na metafísica, onde “a principal dificuldade é conceber clara e distintamente as primeiras noções” (*loc. cit*).

John A. Schuster [108] sustentou que Descartes teria abandonado depois de 1628 o programa da *Mathesis Universalis*, formulado nas *Regulae*, porque teria encontrado dificuldade em construir uma teoria geométrica das equações. Não existem provas, nem ao menos fortes indícios, de que seja verdadeiro este ponto de vista. Em primeiro lugar, Descartes não era muito sensível à dificuldade técnica, nem aos detalhes, e a excessiva importância atribuída às contradições e às dificuldades técnicas dos textos cartesianos é uma arbitrariedade. [109] Portanto, querer atribuir, sem provas convincentes, a mudança de abordagem de Descartes na geometria a problemas técnicos, e não a uma mudança de programa científico geral, seria errôneo.

Stephen Gaukroger, como Schuster, defendeu, sem apresentar evidências, que Descartes teria abandonado, depois de 1628, o seu programa de *Mathesis Universalis*. [110] Isto não é corroborado por todas as conexões que existem entre as *Regulae* e *La Géométrie*. Além disso, seria arbitrário falar em um programa da *Mathesis Universalis* que Descartes pretendesse desenvolver concretamente em detalhes. O que transparece é que era mais importante para ele o enunciado das regras metódicas de raciocínio. O método expresso nas *Regulae* foi colocado ali justamente para propiciar uma abordagem algébrica, e portanto, ao partir para esta abordagem, Descartes não se veria obrigado a abandoná-las. Os procedimentos da álgebra, que são enquadrados de uma forma construtiva, têm um papel fundamental no método enunciado nas *Regulae*. Imaginar um programa do qual

---

[108] J. A. Schuster, "Descartes'Mathesis Universalis: 1618-1628", *in* S. Gaukroger, ed., *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*, Brighton, Harvester Press, 1980, pp. 55-80.

[109] A seguinte passagem é uma prova disto: "Mas eu não me detenho a explicar isto com mais detalhe para não privar a cada um do prazer de aprendê-lo por si mesmo, nem impedir o cultivo útil do próprio espírito exercitando-o, que é, na minha opinião, a principal utilidade que se pode obter desta ciência. Pois não me refiro a coisas tão difíceis que os que sejam um pouco versados na geometria comum e na álgebra e que apliquem com cuidado tudo o que está neste tratado, não possam encontrar". (*La Géométrie,* A. T., VI, p. 274, *The Geometry of René Descartes*, pp. 301-302; p. 11-12).

[110] Gaukroger, *Descartes, Uma Biografia Intelectual*, p. 273; Schuster, "Whatever Should We Do With Cartesian Method?", *in* S. Voss, ed, *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes*, Nova Iorque/Oxford, Oxford University Press, 1993, p. 218.

não há prova convincente de que tenha existido e que teria supostamente entrado em crise, por razões técnicas, é deixar-se levar por devaneios.

A verdade é que em 1628 Descartes escreveu os princípios de um novo método, o que induziu uma mudança na sua consideração dos problemas da geometria. As características deste método indicam que ele era analítico e encontrava nos métodos da álgebra a forma eletiva de abordagem dos problemas, e que era um método analítico 'construtivo', e portanto encontrava nos procedimentos construtivos da geometria clássica a sua referência principal. As características específicas deste procedimento analítico construtivo modificaram o quadro da geometria, em particular os critérios de representação e admissibilidade de curvas.

O ponto de vista de Henk J. M. Bos [111] é de que estaria presente uma contradição no tema principal das relações entre álgebra e geometria na obra de Descartes. Esta contradição Bos atribuiu à coexistência de dois programas para a abordagem da geometria. Um deles seria do tipo clássico, enunciado claramente em 1619, que via a geometria como a ciência que 'constrói' ou resolve problemas geométricos. Este programa mudou um pouco a classificação antiga das curvas, fundamentando-a sobre o uso de instrumentos que são a generalização da régua e do compasso, e nele a álgebra estaria ausente. O outro programa seria o que atribuiu um papel bem mais amplo à álgebra [112] e que derrubou a classificação antiga das curvas, abrindo caminho à distinção moderna entre curvas algébricas e transcendentes. Houve a coexistência dos dois programas, pois Descartes no segundo ponto de vista não abandonou a visão da geometria como ciência de "construção". Segundo Bos, Descartes teria se embaraçado com algumas dificuldades importantes. A principal delas, que ele destacou, seria a contradição nos critérios de aceitabilidade geométrica das curvas, que estaria presente nos programas de *La Géométrie*.

A explicação fornecida por Bos, embora acurada e penetrante, é entretanto somente descritiva: não diz nada sobre os eventuais motivos que teriam levado Descartes a colocar-se sob uma nova e difícil posição programática, mas

[111] Bos, "On the Representation of Curves in Descartes *Géométrie*", p. 322.

[112] Apesar disso, como Bos observou, "em nenhuma parte em *La Géométrie* Descartes usou uma equação para introduzir ou para representar uma curva". (Bos, *loc.cit.*).

mantendo ainda uma ligação problemática com a velha posição. Para se tentar dar uma resposta a esta questão, deve-se levar em conta que no período entre 1619 e 1637 aconteceu um fato muito importante, a saber, o enunciado dos princípios do 'método' por Descartes. O próprio Bos destacou que tal enunciado teve uma influência sobre o programa de *La Géométrie*, ao observar:

> "O uso das palavras-chave claro e distinto [...] mostra que Descartes via um paralelo entre as séries de movimentos interdependentes em um instrumento, [como o seu compasso], todos regulados pelos primeiros movimentos, e as 'longas cadeias de razões' na matemática, discutidas no *Discours de la Méthode*, as quais, desde que cada passo no argumento fosse claro, asseguravam resultados tão claros e certos como o seu ponto de partida." [113]

Entretanto, restringindo ao *Discours de la Méthode* a conexão existente entre o método e a geometria, Bos impediu que a amplidão e a complexidade da ligação aparecessem, pois este texto é muito narrativo e autobiográfico, como uma conversação. O aparecimento crucial ocorrido entre 1619 e 1637 foi o das *Regulae* e é neste texto que devemos buscar tal conexão. De fato, é nas *Regulae ad Directionem Ingenii* que são encontrados importantes germes do pensamento de Descartes a propósito da matemática, do conhecimento do mundo e da questão da certeza do conhecimento em relação à subjetividade.

Devido ao fato de que o método de Descartes é 'analítico' e 'construtivo', ele tem uma necessidade da álgebra como linguagem universal para refletir a sua generalidade. Como é, ao mesmo tempo, construtivo, não admite lacunas ou rupturas no seu proceder. O esforço de Descartes estaria em manter juntas estas duas exigências. As eventuais contradições internas ao seu texto não seriam conseqüência da coexistência entre duas visões diversas da geometria. Representariam a dificuldade de uma única visão coerente, ditada pelas exigências

---

[113] Bos, "On the Representation of Curves in Descartes *Géométrie*", p. 310.

de um programa filosófico e não pelas exigências de natureza matemática. [114] As ditas ‘incoerências’ de Descartes só existem à luz dos requisitos da geometria analítica moderna, que possui dentro de si uma coexistência equilibrada entre geometria e álgebra. As dificuldades enxergadas por Bos não existiam para Descartes. Mesmo que tivessem existido, Descartes não as resolveria da maneira como Bos propôs, isto é, simplesmente definindo como curvas geométricas aquelas que admitissem equações algébricas. Descartes não o faria devido ao seu apego a uma visão antiga da geometria, mas porque estaria radicalmente em contradição com a sua abordagem metodológica. Pelo contrário, a subordinação da álgebra à geometria era uma conseqüência necessária dos princípios metodológicos cartesianos, e não um resquício do passado.

As *Regulae ad Directionem Ingenii* tornaram possível uma conexão entre a geometria e o método, o que permitiu uma releitura de *La Géométrie*, trazendo à tona aspectos de grande interesse; no entanto, não pretendemos desenvolver aqui uma análise detalhada e exaustiva das *Regulae*.

Apenas, de modo sintético, enunciaremos e descreveremos alguns pontos importantes que emergem das *Regulae* e que estabelecem a conexão já citada. O primeiro ponto é a afirmação de que o processo do conhecimento se dá através de via dupla: pela via da ‘intuição’ (um ato elementar que consiste na concepção de um ‘espírito puro e atento’, a qual não deixa dúvida sobre o que é compreendido e é a matriz da formação das idéias claras e distintas) e pela via da ‘dedução‘ (que é uma cadeia de intuições). [115]

O segundo aspecto fundamental é que o raciocínio, que invariavelmente é baseado sobre o uso de concatenações de atos elementares de intuição, tem caráter dedutivo. [116]

---

[114] O próprio Bos observou: “Embora apresentasse contradições na estrutura e no programa, havia uma unidade de visão subjacente.” (Bos, “On the Representation of Curves in Descartes *Géométrie*”, p. 332).

[115] “Por intuição, eu entendo [excluindo os sentidos ou a imaginação] o conceito que a inteligência [*mentis*] pura e atenta forma com tanta facilidade e distinção que não fica absolutamente nenhuma dúvida sobre o que nós compreendemos (...), conceito que nasce unicamente da luz da razão, (...)”. Descartes, *Règles pour la Direction de L’Esprit*, Regra III, p. 14.

[116] Regra III, pp. 16-17.

O terceiro aspecto é dado pelo caráter 'construtivo' do procedimento dedutivo. A cadeia de deduções sobre o qual ele é baseado não deve ser interrompida e o resultado deve ser alcançado sem saltos. O raciocínio não pode chegar a uma conclusão diversa de uma preexistente, isto é, ele deve mostrar todas as ligações e as relações entre os dois resultados, construindo uma cadeia de intuições que os une. A garantia da validade de tal raciocínio era que a cadeia dedutiva podia ser percorrida novamente com um movimento 'ordenado e contínuo' que mostrasse que a validade da construção que conduz à verdade final é sempre verificável. [117]

O quarto aspecto é a redutibilidade de toda diferença entre objetos a diferenças entre 'figurações' geométricas: é esta a primeira forma que assume nas *Regulae* a idéia cartesiana da redução das diferenças a diferenças de extensão, que está na base da concepção quantitativa cartesiana do Universo.[118] No início, esta idéia não se apresenta nas *Regulae* como um princípio metafísico (a redutibilidade de cada objeto à extensão), mas como um auxílio intuitivo que permita representar aquelas relações difíceis de conceber em uma forma mais acessível à intuição. Depois desta primeira apresentação, mostra-se uma interpretação que esconde o explícito valor metafísico que o conceito de extensão assumirá na obra posterior. Descartes propôs, na verdade, uma interpretação quantitativa do Universo, que tem no seu centro a matemática, ou melhor, a *Mathesis Universalis*. Esta era uma matemática diversa daquela "vulgar" da época, era um saber universal que permitia reduzir a análise de cada fenômeno a questões de 'ordem' e de 'relações' .[119] Na cadeia dedutiva do raciocínio, cada intuição podia ser confrontada com a sua sucessiva, como se faz com a razão de duas grandezas.[120] O raciocínio dedutivo revelava, assim, a sua natureza de 'seqüência de relações concatenadas' . Há uma analogia com o que ocorre em uma progressão matemática, na qual cada termo é determinado pela razão que o liga com o precedente. A teoria das proporções tem um papel fundamental, pois o

[117] Regra VII, p. 39 e Regra XI, p. 66.

[118] Regra XII, p. 75.

[119] Regra IV, p. 24.

[120] Regra XIV, p. 110.

raciocínio dedutivo, transitando pela linguagem algébrica, vem traduzido em uma seqüência de proporções.

Já foi citado que, devido ao caráter construtivo do procedimento dedutivo, nenhum elo da cadeia de deduções podia ser pulado, nem tampouco podia ser 'dado' sem que se definisse o procedimento que permitia alcançá-lo, 'por construção', isto é, a partir de uma outra verdade conhecida. Disto advém uma conseqüência importante: a tradução do procedimento dedutivo na linguagem algébrica, isto é, mediante equações obtidas pela teoria das proporções, era unidirecional. No campo das relações entre álgebra e geometria, havia uma transição unidirecional da própria relação: podia-se passar do problema geométrico à sua tradução algébrica, mas não se podia fazer o inverso, pois não existiam 'problemas algébricos' dados por si mesmos. Por conseguinte, a *Mathesis Universalis* contemplaria somente problemas de construção geométrica.

O quinto e último aspecto é um paralelo entre os procedimentos das 'artes mecânicas' e o procedimento construtivo do raciocínio dedutivo, que percorre todas as *Regulae.*[121] Este paralelismo se dá, especificamente, entre os procedimentos das 'artes' mecânicas e as construções geométricas. Dele descende, de modo evidente, o critério instrumental para demarcação entre curvas admissíveis, ou não, na geometria, introduzido por Descartes. Este critério conduz a mudanças na classificação antiga das curvas, à própria reclassificação cartesiana e, salvo algumas diferenças significativas, mas não decisivas, à moderna classificação das curvas em algébricas e transcendentes.

Chamamos a atenção para dois temas de caráter geral que podem ter se constituído na razão de ser das *Regulae*. O primeiro deles é a defesa do princípio da unidade do saber, em detrimento do saber compartimentado em especialidades. Este é um tema que está no centro da Regra I, [122] mas que aparece novamente em muitas outras passagens, e que traz como uma conseqüência importante a falta de interesse de Descartes no estudo de problemas matemáticos específicos.

---

[121] Regra VIII, pp. 51-52.

[122] "Se alguém, pois, quer seriamente investigar a verdade das coisas, não deve optar por uma ciência particular; elas são todas unidas e dependentes umas das outras. Que pense, pois, somente em aumentar a luz natural da sua razão, (...)". Regra I, p. 4.

> "Eu não teria em alta estima estas regras, se elas só servissem para resolver problemas vãos com os quais os ociosos calculadores e geômetras acostumaram a entreter-se: pois então acreditaria que não tivesse conseguido outra coisa que haver-me ocupado em bagatelas, talvez com mais sutileza que os outros. Embora eu pretenda falar aqui muitas vezes de figuras e de números, porque de nenhuma outra disciplina podem tirar-se exemplos tão evidentes e certos, todavia aquele que atentamente considere o meu pensamento, facilmente se aperceberá que eu não penso aqui nada das matemáticas correntes, mas sim que eu exponho outra disciplina, da qual elas são mais o envoltório do que as partes." [123]

De certa forma, esta declaração exprime a intenção de não tratar da matemática em si, mas buscar na matemática (e em uma certa matemática diversa da 'vulgar' daquela época) uma ajuda para a determinação dos princípios de um método universal de raciocínio.

O segundo tema de caráter geral é a refutação de uma abordagem histórica da ciência. A Regra III estabelece uma contraposição entre saber histórico e saber científico. Nela, Descartes observou que ainda que lêssemos todas as obras dos antigos, não chegaríamos a ser filósofos, se não pudéssemos "exprimir um juízo sólido sobre as questões propostas, pois, neste caso, pareceríamos ter aprendido não ciência, mas história."[124] Esta contraposição se deve à exigência que Descartes fazia de defender a necessidade de uma 'anulação' do saber precedente para favorecer o desenvolvimento de uma ciência livre de influências, sem preconceitos ou pré-julgamentos do saber escolástico. Ele queria reexaminar os princípios estabelecidos, fora de toda referência à tradição histórica, somente pelo seu valor conceitual. Talvez isto lhe tenha sido particularmente útil para derrubar a antiga classificação das curvas, consolidada por uma tradição secular.

---

[123] Regra IV, pp. 21-22.

[124] Regra III, pp. 12-13.

Voltamos agora à análise dos cinco pontos fundamentais que já foram enunciados e em torno dos quais se desenvolveram as *Regulae*. Os primeiros dois pontos já foram expostos na Regra III. Gostaria de sublinhar que, ao definir ‘intuição’ como a “concepção apreendida por um espírito puro e atento, que nasce apenas da luz da razão”, Descartes enfatizou o caráter puramente ‘intelectivo’ deste ato, diferenciando-o assim do “mutável testemunho dos sentidos” ou do “juízo enganoso da imaginação.” [125] A ‘dedução’ é, ao contrário, o meio para conhecer a maior parte das coisas que não são evidentes por si mesmas, porque são deduzidas de princípios verdadeiros e conhecidos através de uma cadeia de atos elementares de intuição. A diferença entre o primeiro ato e o segundo consiste sobretudo em que este último necessitou de um “movimento” ou de uma “sucessão”. Este “movimento” seria a chave do processo dedutivo. Trata-se de um “movimento contínuo e ininterrupto do pensamento que tem uma intuição clara de cada coisa.” [126] Aqui se encontram refletidos os dois princípios fundamentais da concepção cartesiana: o princípio da ‘continuidade’ e o princípio da ‘plenitude’. Eles trazem como conseqüência uma concepção do Universo como um *continuum*, sem lacerações nem interrupções. De fato, sabemos que Descartes refutava radicalmente a possibilidade do ‘vácuo’. No caso dos processos do raciocínio, analogamente aos processos materiais, estes princípios se refletem na idéia do caráter ‘contínuo’ da cadeia dedutiva e na ausência de ruptura ou interrupção. A ‘continuidade’ se apresenta como uma característica que conduz à ‘compreensão da totalidade’. O caráter ‘ininterrupto’ do movimento do pensamento no ato de deduzir quer dizer que não é permitido saltar algum elo da cadeia, caso contrário se perderia completamente a certeza das conclusões.

Estas características do raciocínio dedutivo contribuem para o *status* da geometria. O raciocínio geométrico deve ter caráter construtivo, baseando-se cada um dos passos da cadeia no que o precede. O objeto geométrico é pensável apenas enquanto for construído através de uma sucessão. Segue-se a impossibilidade de conceber o ponto geométrico ‘isolado’. Ao construir, por exemplo, uma curva, tem-se que dizer como passar de um ponto ao sucessivo, com um procedimento ‘contínuo’ e ‘ininterrupto’. Como no espaço físico, no espaço geométrico não

---

[125] Regra III, p. 14.

[126] *Id.*, p. 16.

poderia existir o ‘vácuo’. Daí, a impossibilidade da concepção de lugar geométrico fixado abstratamente mediante uma equação, e não definido mediante uma construção. É igualmente dependente desta visão a recusa do ‘raciocínio por absurdo’, do qual já falamos antes. Por não ser construtivo, já que salta todos os elos da cadeia e confronta diretamente o último ao primeiro, e além do mais, por não respeitar a regra da transição unidirecional entre a geometria e a álgebra, este tipo de raciocínio foi refutado.

O conceito de ‘enumeração suficiente’, citado na Regra VII, poderia ser considerado como um “embrião” do princípio da indução matemática, que é conhecido na matemática moderna. [127] A indução foi considerada, ao lado da intuição, porque definia de modo preciso a inferência em cada ponto da cadeia. Esta noção de ‘indução’ em Descartes não está subjacente a algum conceito claro de numeração dos passos. A indução cartesiana é explicada pelo conteúdo da Regra XI.[128] Cada passo deve ser verificado, “construído”, nada pode ser omitido. O pensamento de Descartes a respeito do infinito é outro aspecto fundamental. Há, por exemplo, nos *Principia*, [129] uma distinção entre infinito e indefinido, reservando a Deus o primeiro atributo. Neste texto Descartes declarou que não se ocuparia mais das disputas sobre o infinito, considerando simplesmente ridícula a pretensão que os homens ‘finitos’ têm de chamar alguma coisa de infinito.

Como já foi tratado anteriormente, um dos objetos da *Mathesis Universalis* é o estudo da medida. Mesmo neste nível existe um paralelismo entre matemática e método dedutivo. Para estabelecer esta coligação deve intervir o conceito de ‘extensão’ e a idéia de redutibilidade de cada objeto à propriedade da extensão. É na Regra XII que se introduziu este aspecto da filosofia cartesiana, na representação das diferenças entre objetos como diferenças entre ‘figuras’. O número infinito das figuras era suficiente para descrever todas as diferenças entre as coisas sensíveis. Desta forma, nas *Regulae*, apareceu a idéia da descrição quantitativa das diferenças entre objetos sensíveis, que se exprimiu na forma diversa de duas figuras geométricas. Este é um aspecto importante, pois ao

---

[127] Regra VII, p. 39.

[128] Regra XI, pp. 66-70.

[129] Descartes, *Principia Philosophiae*, I, art. XXIV, XXV, XXVI e XXVII; A.T., vol. 8, pp. 13-15.

estabelecer a centralização do conceito de extensão, fica simultaneamente estabelecido o papel central que tem a geometria, enquanto ciência da extensão, no processo do conhecimento.

Entretanto, a forma que assumiu o princípio da ‘redução à extensão’ nas *Regulae* é um tanto diferente, ao menos aparentemente, da acepção que é subjacente ao texto de *La Géométrie*. Neste último não aparece a justaposição entre a extensão figurada (que se volta à imaginação) e a quantidade. Esta justaposição desapareceu e, antes, transformou-se em relação hierárquica. O papel da imaginação desapareceu de fato e a extensão foi resolvida explicitamente em grandeza, mediante o instrumento da álgebra. A descrição quantitativa das diferenças através da extensão foi realizada de modo puramente intelectual e o instrumento de tal realização é a descrição algébrica. As proposições sucessivas abandonaram a referência genérica `a representação ‘figurada’ das diferenças, em prol de uma descrição própria em termos da teoria das proporções. A seguir, logo depois, foi introduzido o conceito de ‘problema com incógnitas’ e, conseqüentemente, o conceito de equação. A parte final do Livro I, ainda que incompleta, mostra com suficiente evidência que a idéia da centralização do instrumento algébrico já era clara para Descartes.

Uma conseqüência importante observada é que a relação estabelecida entre extensão e quantidade esclarece o caráter da subordinação da álgebra à centralização da geometria. Em primeiro lugar está a geometria que é a ciência da extensão e o instrumento de descrição e análise da substância das coisas. A álgebra tem um papel essencial, mas subordinado, em tornar possível o tratamento da extensão como descrição quantitativa. Esta hierarquia se apresenta de modo bem claro no fim das primeiras páginas de *La Géométrie,* pois a primeira preocupação de Descartes foi a de mostrar “como o cálculo aritmético se relaciona às operações da geometria.” [130]

Para a solução de certos problemas, em que não é suficiente o procedimento dedutivo, Descartes introduziu a *Ars Analytica*, que ele adotou e expôs e que consistia em desenvolver alguma coisa que dependia de muitas outras. Esta ‘arte’ não é outra senão o método para resolver os problemas nos quais aparecem ‘incógnitas’. Na Regra XIII isto fica esclarecido, quando aparece

[130] Descartes, *La Géométrie*, p. 297; p. 3.

o conceito de designação de alguma coisa que não é conhecida por alguma coisa conhecida, isto é, a 'arte' de resolver equações.

> "Primeiramente é necessário que em toda questão haja algo desconhecido pois do contrário se inquirirá em vão; em segundo lugar, isso mesmo deve estar designado de alguma maneira, pois do contrário, não estaríamos determinados a investigar isso melhor que qualquer outra coisa; em terceiro lugar, não pode ser designado senão por algo que seja conhecido." [131]

A Regra XIV contém um passo importante na direção de traduzir na forma algébrica as questões 'perfeitamente compreendidas'. Descartes observou que cada conhecimento que não é adquirido através da intuição simples, se adquire por confronto. As naturezas comuns se encontram em objetos distintos, as 'relações' e 'proporções', que se trata de reduzir a 'igualdades', isto é, equações. Somente a grandeza é suscetível a esta redução e entre as grandezas está a 'extensão'. Desta maneira, a formulação de uma questão perfeitamente determinada se transforma na redução de proporções a igualdades. Nesta regra XIV há a transição da definição das diferenças entre coisas mediante 'figuras' para uma definição destas diferenças mediante as relações ou proporções entre grandezas extensas.[132]

Na Regra XVI a álgebra faz a sua intervenção e é introduzida como instrumento de representação simbólica. A álgebra consiste no "abstrair dos números os termos da dificuldade para examinar-lhes a natureza." [133] Esta regra é importante porque aí aparece a eliminação da distinção entre a raiz 'primeira' (a própria incógnita), raiz quadrada, raiz cúbica, etc, todas reduzidas à linguagem da teoria das proporções.

---

[131] Regra XIII, p. 96.

[132] Regra XIV, p. 106.

[133] Regra XVI, p. 132.

> "É necessário notar ainda que, por número de relações, deve-se compreender as proporções que se seguem em ordem contínua. Por outro lado, dentro da Álgebra ordinária, esforçam-se por exprimi-las através de diversas dimensões e de diversas figuras, as quais se chamam a primeira raiz, a segunda quadrado, a terceira cubo, a quarta biquadrado, etc." [134]
>
> [...] "Faz-se necessário por conseguinte notar sobretudo que a raiz, o quadrado, o cubo, etc, não são outra coisa senão as grandezas continuamente proporcionais que se supõe sempre dominadas por esta unidade adotada de que nós já tínhamos falado antes." [135]

Torna-se evidente que a mudança de nomenclatura não é de tanta importância quanto a idéia de tomar-se um segmento de reta para ser a unidade, à qual a primeira grandeza proporcional se relaciona imediatamente e por uma só relação; a segunda por intermédio da primeira e por duas relações; a terceira por intermédio da primeira e da segunda, e por três relações, etc. São chamadas então, dentro da seqüência, primeira proporcional, esta grandeza que em Álgebra se chama raiz; segunda proporcional, aquela que se chama quadrado, e assim por diante. Foi esta abordagem que permitiu a Descartes desvencilhar-se do ponto de vista tradicional que considerava como quadrado uma área, como cubo um volume. Libertando-se desta limitação dimensional, ele considerou os segmentos como grandezas proporcionais, mais do que como lados ou arestas de figuras geométricas, e assumiu uma homogeneidade dimensional implícita, diferente da tradicional. Através disso, conseguiu resolver problemas geométricos que conduziam a equações do quarto grau ou superiores, sem a preocupação de identificar a quarta potência, a quinta, a sexta, etc. com nenhum sólido geométrico. Foi esta nova perspectiva que permitiu a resolução do problema de

---

[134] Regra XVI, pp. 130-131.

[135] *Ibid.* Tal "unidade" foi citada anteriormente na Regra XIV, p. 115 e p. 118.

Pappus, no caso das quatro retas, e o desenvolvimento de toda a geometria exposta em *La Géométrie*.

Na Regra XVII está exposto de modo mais claro o procedimento que Descartes sugeriu para a resolução de uma questão perfeitamente determinada, seja ela traduzida em equações, ou em uma cadeia de proporções.

> "A dificuldade proposta deve ser diretamente percorrida, abstraindo-se dela os seus termos que são conhecidos e os outros desconhecidos e examinando por intuição a mútua dependência de cada um deles por relacionamento com os outros, através das verdadeiras razões." [136]

A regra XVIII, com o objetivo de estabelecer estas mútuas dependências, ensina que bastam somente quatro operações (a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão), o que permite reduzir a definição das 'mútuas dependências' a uma seqüência de proporções.[137] O próximo passo, o da Regra XIX, será o de buscar tantas grandezas expressas de modos diferentes quantas sejam as incógnitas, para percorrer diretamente a dificuldade. [138]Assim são encontradas as equações e terminam-se todas as operações que haviam sido deixadas em suspenso (Regra XX).[139] Segundo a Regra XXI, se forem obtidas diversas equações deste tipo, tratar-se-á de reduzi-las a uma só, "isto é, àquela cujos termos ocuparem os graus mínimos na série de grandezas em proporção contínua, segundo a qual os mesmos termos devem ser ordenados".[140]

Nas primeiras páginas de *La Géométrie*, com uma analogia de termos e com a mesma seqüência metódica, encontramos a tradução do procedimento já exposto. Damo-nos conta ao ler o seguinte trecho:

---

[136] Regra XVII, p. 135.

[137] Regra XVIII, p. 138.

[138] Regra XIX, p. 147.

[139] Regra XX, p. 148.

[140] Regra XXI, p. 149.

"Assim, querendo resolver algum problema, deve-se de antemão considerar como já feito, e dar nomes a todas as linhas que pareçam necessárias para construí-lo, tanto às que são desconhecidas como às outras. Em seguida, sem considerar nenhuma diferença entre estas linhas conhecidas e desconhecidas, deve-se examinar a dificuldade segundo a ordem que se apresente como a mais natural de todas, na forma como aquelas linhas dependem mutuamente umas das outras, até que se haja encontrado a maneira de expressar uma mesma quantidade de duas maneiras: o que se denomina uma equação, pois [o resultado de] os termos de uma dessas duas formas são iguais aos da outra. Devem encontrar-se tantas equações quantas forem as linhas desconhecidas, e caso não possam ser obtidas tantas equações, apesar de nada do que se deseja no problema ter sido omitido, isso prova que o mesmo não está inteiramente determinado e então podem tomar-se à discrição linhas conhecidas para todas aquelas às quais não corresponda nenhuma equação. Depois disto, se restarem ainda outras, é necessário recorrer, por ordem, a cada uma das equações restantes, seja considerando-a isolada, seja comparando-a com as outras, para explicar cada uma destas linhas desconhecidas, e fazer que ao final, não reste mais que uma só, igual a alguma outra que seja conhecida. Ou melhor, que o quadrado, ou o cubo, ou o quadrado do quadrado, ou o super-sólido, [141] ou o quadrado do cubo, etc, seja igual ao que resulta pela adição ou subtração de outras duas ou mais quantidades, das quais uma seja conhecida, e as outras sejam compostas de algumas médias proporcionais entre a unidade e esse quadrado, ou cubo, ou quadrado de quadrado, etc, multiplicado por outras conhecidas, o que escrevo desta

[141] Assim era chamada a quinta potência.

> maneira: $z = b$ ou $z^2 = -az + bb$ ou $z^3 = +az^2 + bbz - c^3$ ou $z^4 = az^3 - c^3z + d^4$, etc. Ou seja, $\underline{z}$, que tomo pela quantidade desconhecida, é igual a $\underline{b}$; ou o quadrado de $\underline{z}$ é igual ao quadrado de $\underline{b}$ menos $\underline{a}$ multiplicado por $\underline{z}$; ou o cubo de $\underline{z}$ é igual a $\underline{a}$ multiplicado pelo quadrado de $\underline{z}$, mais o quadrado de $\underline{b}$ multiplicado por $\underline{z}$ menos o cubo de $\underline{c}$, etc.
>
> Podem sempre reduzir-se assim todas as quantidades desconhecidas a uma só, quando o problema pode ser construído mediante circunferências e linhas retas, ou ainda por secções cônicas, ou por alguma outra linha que não seja composta mais do que em um ou dois graus mais, [...]. Por isto me contentarei aqui em advertir que sempre que, ao desenvolver estas equações, não nos esquecermos de utilizar todas as divisões que sejam possíveis, encontraremos infalivelmente os termos mais simples aos quais o problema pode ser reduzido.” [142]

É evidente a própria aplicação, em *La Géométrie*, daqueles princípios metódicos gerais enunciados nas *Regulae*.

O último dos cinco temas fundamentais, que havíamos enumerado como o núcleo fundamental das *Regulae*, é a questão da relação entre artes mecânicas e geometria. Na Regra VIII, depois de haver fornecido as exemplificações acerca do uso do método, Descartes assim prosseguiu:

> “Este método imita aquelas artes mecânicas que não têm necessidade de nenhuma ajuda externa, e que ensinam elas mesmas como se fabricam os instrumentos de que necessitam. Se alguém quisesse, com efeito, exercer uma delas, por exemplo a de ferreiro, e estivesse privado de todos os instrumentos, se veria obrigado, no início, a

[142] Descartes, *La Géométrie,* pp. 300-302; pp. 8-12.

> servir-se de uma pedra dura ou de algum bloco informe de ferro como bigorna, a tomar uma pedra em lugar de martelo, a dispor de pedaços de madeira como tenazes e a reunir, segundo a necessidade, outros materiais deste gênero. Depois destes preparativos, ele não se poria em seguida a forjar, para utilidade dos outros, espadas ou ferraduras ou nenhum objeto dos que se fazem de ferro, mas, antes de tudo, fabricaria martelos, uma bigorna, tenazes e todas as demais ferramentas de que necessitasse. Este exemplo nos ensina que se não tivermos podido encontrar, no início, mais que preceitos confusos, e que pareciam inatos em nosso espírito, mais do que bem elaborados com método, não se há de ter a pretensão a ponto de, com seu auxílio, dirimir as discussões dos filósofos ou resolver as questões dos matemáticos. Antes eles devem nos servir para investigar com a maior diligência tudo aquilo que for mais necessário para o exame da verdade, sobretudo porque não há razão alguma para que isto seja mais difícil de encontrar que a solução de certas questões habitualmente propostas na geometria, na física ou em outras disciplinas.” [143]

É bem conhecido o fato de que Descartes nutria um interesse pela máquina e pelas artes mecânicas. Porém, como observou Paolo Rossi: “o progresso efetivo da ciência depende para Cartesio da obra dos teóricos. A técnica, enquanto tal, não traz alguma contribuição ao progresso do saber científico.”[144] Portanto, sob este ponto de vista, a técnica deve ficar subordinada à ciência, seguir-lhe os princípios e, em particular, deve seguir os princípios do ‘método’.

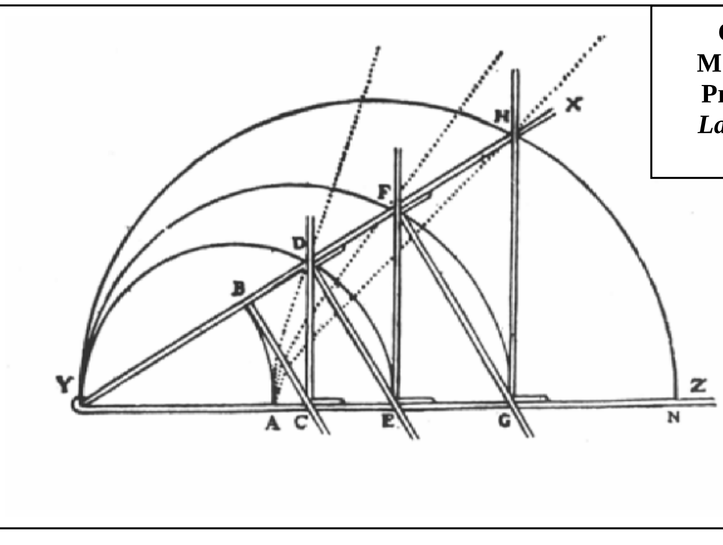
Na Regra X, Descartes falou da importância das artes mais simples, nas quais “reina a ordem”, a dos artesãos que tecem telas e tapetes ou da arte do bordado, “assim como todas as combinações dos números e tudo o que pertence à

[143] Regra VIII, pp. 51-52.

[144] P. Rossi, *I filosofi e le macchine*, p. 111.

aritmética.” [145] Esta citação é bastante interessante, pois confronta a simplicidade e o caráter metódico que governam o proceder de tais artes, e um aspecto do próprio proceder: sua aproximação com a teoria das proporções. Estas artes aparecem, portanto, como uma representação concreta do movimento concatenado, contínuo e ininterrupto que está no núcleo do método. Esta concatenação é fixada pelas relações numéricas precisas e, por conseguinte, tem o seu fundamento na teoria das proporções. Todos os pontos conceituais cruciais do método cartesiano (movimento contínuo e ininterrupto, teoria das proporções) se encontram nestes exemplos de ‘artes mecânicas’.

O famoso ‘compasso’ de Descartes, ou instrumento ‘multiplicador’ de proporções que está presente em *La Géométrie* e que tem um papel fundamental na classificação cartesiana das curvas, foi inventado por ele bem antes da redação desta obra. Este instrumento com esquadros móveis permite a representação geométrica de uma seqüência de proporções e é, portanto, a tradução concreta de um movimento contínuo e ininterrupto, cujos passos sucessivos são todos concatenados segundo relações precisas e perfeitamente determinadas.



Compasso Mesolábio ou Proporcional
***La Géométrie*, p. 318**

É claro que este instrumento, por si só, não esgota os requisitos de possibilidade e facilidade de construção da concepção cartesiana, mas representa o protótipo de uma classe de instrumentos correspondentes a tais requisitos.

[145] Regra X, p. 62.

Descartes fez referência a este instrumento para propor uma nova classificação das curvas ‘admissíveis’ em geometria, que devia substituir a clássica subdivisão entre curvas ‘geométricas’, isto é, construtíveis apenas com régua e compasso (lugares planos), curvas obtidas por secções (isto é, as cônicas ou lugares lineares) e curvas ‘mecânicas’, resultantes do movimento ‘caótico’ de um ponto. Tal classificação era fundamentada no caráter privilegiado da régua e compasso e, para ser modificada, exigia a derrubada deste privilégio e a introdução de critérios diferentes. Descartes não tinha o mínimo motivo para insistir no reconhecimento da classificação antiga. A régua e o compasso não necessitavam de um caráter privilegiado, nem sob o ponto de vista metodológico, nem sob o técnico. Com respeito aos princípios prescritos pelo método, a régua e o compasso refletiam um modo de operar completamente parcial e episódico. Ao contrário, o instrumento do tipo daquele com esquadros móveis constituía a completa e fiel tradução do método cartesiano. Voltaremos a tratar deste instrumento no capítulo 3 deste trabalho.

A discussão que Descartes fez da classificação das curvas em *La Géométrie* é de notável interesse:

> “Os antigos haviam notado fortemente que entre os problemas da geometria, uns são planos, outros sólidos, e outros lineares: quer dizer que uns podem ser construídos traçando-se apenas linhas retas e circunferências; ao passo que os outros não podem sê-lo, se não empregarmos ao menos alguma secção cônica; enfim os últimos, se não empregarmos alguma outra curva mais composta. Mas me espanta que eles não tenham distinguido diversos graus entre estas curvas mais compostas, e eu não saberia compreender porque eles as nomearam mecânicas, preferencialmente a geométricas.” [146]

O espanto a que Descartes se referiu nesta discussão tem uma conotação anti-histórica. Ele prosseguiu observando que não é correto, pelo fato de as curvas

[146] Descartes, *La Géométrie*, p. 315; p. 41.

mecânicas serem descritas por instrumentos, chamá-las assim, pois neste caso se rejeitaria até mesmo as construídas por régua e compasso, que também são instrumentos. Na classificação antiga das curvas, todavia, 'mecânico' tem um outro significado e, ao menos na tradição grega, a régua e o compasso têm um valor intelectivo, isto é, são a representação de uma propriedade de perfeição ideal, assim como o compasso com esquadros móveis o é, na intenção de Descartes. Ele deu mostras de não se aperceber disto, quando prosseguiu:

> "Não é por causa dos instrumentos que servem para traçá-las, pois sendo mais compostos do que a régua e o compasso, não podem ser tão apropriados. " [147]

Se assim não fosse, ocorreria ter de recusar até mesmo as mecânicas:

> "... onde é somente a precisão do raciocínio que se busca, e que pode sem dúvida ser igualmente perfeita, com respeito a estas linhas, do que com respeito às outras. " [148]

Por conseguinte, 'mecânico' não pode querer dizer inexato porque, ao contrário, os procedimentos mecânicos são baseados sobre a exatidão. Por outro lado, Descartes não levou em consideração a outra possível acepção de 'mecânico', isto é, como 'gerado por um movimento'. Parece que o único fim que ele perseguia era o de evidenciar a incoerência dos antigos e, por fim, concluiu dizendo não querer fazer uma mudança de nomes que já eram aceitos pelo uso. Assim fazendo, entretanto, Descartes 'extraiu-lhes' completamente o significado primitivo. Dali por diante, embora apenas por convenção, 'geométrico' seria o que é preciso e exato, e 'mecânico' aquele que não o é. Mecânico perdeu o significado de ter sido gerado por um movimento e também o de ter sido obtido mediante o emprego de um instrumento. Ambas as acepções poderiam servir de obstáculo à nova classificação de Descartes, que incluiu entre as curvas admissíveis em

---

[147] Descartes, *La Géométrie*, p. 315; p. 41.

[148] *Ibid.*, pp. 315-316; pp. 41-42.

geometria grande parte das curvas consideradas ‘mecânicas’ na velha classificação. ‘Mecânico’ tornou-se uma sigla para denotar o contrário de alguma coisa que é ‘perfeitamente determinada’, o contrário de ‘geométrico’, que, por sua vez, tem um significado muito bem determinado. Embora fossem conservados os nomes, mudou a linha de demarcação dos significados. Segundo a visão cartesiana, a geometria era a ciência que ensinava a conhecer a medida de todos os corpos. Não havia, portanto, motivo para excluir as linhas compostas em vantagem das simples:

> “... contanto que se possa imaginá-las como sendo descritas por um movimento contínuo, ou por diversos [movimentos] consecutivos em que os últimos sejam inteiramente determinados pelos precedentes, pois, por esse meio, se pode sempre ter um conhecimento exato de suas medidas. “ [149]

Eis que reaparece o habitual critério instrumental, que agora nos é familiar: a possibilidade de construção mediante um movimento contínuo, ininterrupto e coordenado. O elemento ‘construtivo’ deste critério é o verdadeiro núcleo conceitual da geometria cartesiana, em cujo âmbito a referência ao método das coordenadas parece um elemento bastante à margem e secundário. Ao contrário, a classificação das curvas, que Descartes obteve fazendo um ‘uso conceitual’ do instrumento com esquadros móveis, é de grande importância. Este, pelo seu próprio caráter construtivo, não assume como elemento de classificação a ordem da curva, como seria caso fosse assumido um ponto de vista baseado sobre o conceito de lugar geométrico, isto é, partindo da equação algébrica. Também não é completa esta classificação, porque salta diversos graus, não obtendo assim a totalidade das curvas algébricas, como era de se esperar, baseando-se nas operações admitidas, que são exatamente as algébricas. A classificação cartesiana, todavia, é um desenvolvimento na direção da moderna distinção das curvas em ‘algébricas’ e ‘transcendentes’, que será mais tarde explicitada por Leibniz. Este

[149] Descartes, *La Géométrie*, p. 316; p. 42.

último enfatizou que seu cálculo, diferentemente do de Descartes e Viète, era aplicável igualmente tanto a curvas algébricas quanto transcendentes. [150]

Concluindo, esperamos que a análise das conexões existentes entre o método exposto nas *Regulae ad Directionem Ingenii* e *La Géométrie* tenha contribuído para esclarecer certos temas específicos, tais como o da classificação das curvas ou a posição ocupada pela geometria cartesiana na história da 'geometria analítica'. A geometria cartesiana nos parece ser o reflexo de uma concepção da matemática totalmente peculiar, na qual tem um papel central o conceito de 'extensão geométrica'. Esta geometria é 'analítica', não porque dê importância ao método das coordenadas, mas apenas porque se reporta a um princípio metodológico, 'analítico' precisamente, que é centrado nos procedimentos dedutivos e construtivos do raciocínio que constituem o fulcro da filosofia cartesiana.

[150] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 133.

CAPÍTULO 3

Análise da Obra *La Géométrie*

A primeira edição da obra *La Géométrie* de René Descartes fazia parte de uma publicação que se iniciava com o *Discours de La Méthode*, ao qual se seguiam três ensaios ou tratados: *La Dioptrique*, *Les Météores*, e *La Géométrie*, a partir da página 297 de tal volume.

Há uma advertência na Introdução, logo antes do início desta edição de 1637, dizendo que o autor temia que este tratado não pudesse ser lido, a não ser por aqueles que já tivessem conhecimento do conteúdo dos livros de geometria. Dizendo que estes livros continham muitas verdades, muito bem demonstradas, o autor acreditava que seria supérfluo repeti-las, embora não tivesse deixado por isso de utilizá-las[151]. Não se sabe ao certo por que Descartes teria redigido *La Géométrie* de maneira não muito esclarecedora. Não é que estivesse tentando ocultar seu "método de descobrir verdades" na matemática, ou que estivesse escrevendo em uma área controversa em termos teológicos ou ideológicos. É possível que mais tarde tivesse lamentado não haver feito concessões ao leitor – embora nunca houvesse admitido isso em termos explícitos – pois acabou autorizando que se redigisse uma introdução para expor o material em uma linguagem mais elementar. [152] Não se tem certeza acerca da autoria desta introdução, mas foram sugeridos como seus possíveis autores Godefroid de Haestrecht e Florimond Debeaune. Ela foi composta em 1638, mas não foi publicada naquela época.

Segundo Pierre Costabel, [153] *La Géométrie* foi redigida tardiamente e rapidamente, em menos de um ano, de 1635 a 1636, para responder a diversas pressões exteriores. Antes da sua publicação em 1637, Descartes não deixou de ser submetido a pressões, notadamente as que provinham de espíritos favoráveis

[151] A. T., vol. VI, p. 368.

[152] "Calcul de Mons. des Cartes"[1638]; A. T., vol. X, pp. 659-680.

[153] P. Costabel, "*La Réception de La Géométrie* et les disciples d' Utrecht", *in* H. Méchoulan, ed., *Problématique et Recéption du 'Discours de la Méthode'*, et des 'Essais', Paris, Vrin, 1988, p. 59.

como o Pe. Marin Mersenne e de alguns pretendentes a discípulos, reunidos em Utrecht.

3.1. Construções somente com régua e compasso. Análise do Livro I.

O propósito fundamental de Descartes e o tema de *La Géométrie* são estabelecidos pela frase de abertura:

> "Todos os problemas da geometria podem facilmente ser reduzidos a tais termos que é suficiente conhecer o comprimento de certas linhas retas para construí-los." [154]

Isto é bastante esclarecedor, pois evidencia que o seu propósito era a solução, através de construção, de qualquer problema em geometria. Descartes não tinha transcendido a ênfase clássica sobre a possibilidade de construção e não tinha a visão de geometria como sendo a investigação de propriedades de objetos geométricos ou configurações. Esta é uma visão que se ajusta à moderna concepção de geometria analítica. Não há uma diferença essencial entre ver a geometria como atividade de resolver problemas, demonstrar teoremas ou investigar propriedades, pois a solução de um problema pode ser formulada como um teorema ou como uma propriedade de uma configuração geométrica. No entanto, para a prática da pesquisa geométrica, faz uma grande diferença se adotarmos um ponto de vista ou o outro. A visão de geometria do matemático determina para que metas ele dirige a sua pesquisa, o que ele acha importante e como ele estrutura os seus escritos.

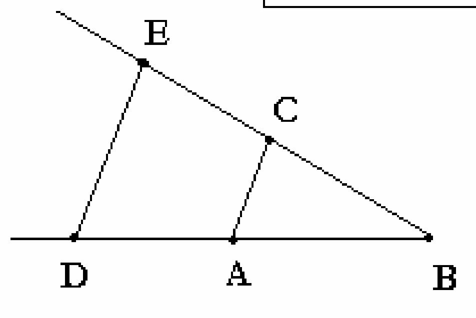
Inicialmente, Descartes se propôs a solucionar problemas pela analogia entre geometria e aritmética, estabelecendo relações entre as cinco operações da aritmética e as construções da geometria. Estas cinco operações são a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes, podendo esta última ser considerada como um tipo de divisão. Enquanto que em aritmética as únicas raízes exatas que podem se obter são aquelas de potências perfeitas ("quantidades

[154] Descartes, *La Géométrie*, p. 297; p. 3.

discretas”), em geometria pode ser encontrado um comprimento que representará exatamente a raiz quadrada de um dado segmento de reta (“quantidade contínua”), mesmo que este segmento não seja comensurável com a unidade. Estas cinco operações aritméticas são apresentadas como correspondentes a construções simples com régua e compasso, justificando a introdução de termos aritméticos na geometria. Ao fazer esta conexão, Descartes introduziu a sua notação exponencial para potências. Isto simplificou o simbolismo algébrico e possibilita que até mesmo estudantes atuais possam seguir o texto matemático desta obra sem encontrar dificuldades intransponíveis quanto à notação.

A substituição de um símbolo por outro é somente uma questão de convenção, e não tem muita importância no desenvolvimento das idéias. Por outro lado, a contribuição de Descartes ao associar uma álgebra puramente simbólica com geometria, marca um avanço decisivo sobre obras anteriores, pois propiciou que se desenvolvessem técnicas algébricas independentemente da visualização geométrica. Como exemplo, Descartes apresenta no subtítulo “A Multiplicação” [155], um segmento AB tomado como unidade (ver figura 1). Seja requisitado multiplicar-se BD por BC. O autor liga os pontos A e C e traça DE paralelo a CA; então BE é o produto de BD por BC.

Figura 1



Pode-se entender que é válida a proporção $\frac{\ell}{u} = \frac{n}{m}$, onde os comprimentos foram designados por: $\begin{cases} AB = u; \quad BD = \ell \\ BC = m; \quad BE = n \end{cases}$, portanto $n = m.\ell$ ou $BE = BC.BD$.

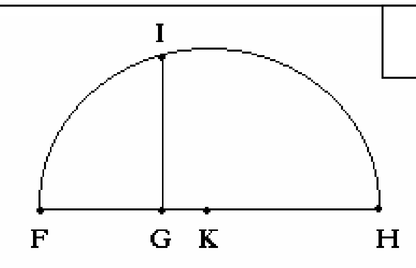
[155] Descartes, *La Géométrie*, p. 298; p. 4, de onde foi extraída a figura 1.

Se for requisitado dividir-se BE por BD, o autor une os pontos E e D, e traça AC paralelo a DE; então BC é o resultado da divisão.

Descartes introduziu uma inovação, em relação à chamada álgebra geométrica dos gregos. Nesta, o produto de dois segmentos era considerado como sendo uma área, e o produto de três segmentos, um volume. Através da introdução criativa de uma unidade de comprimento, o segmento AB, Descartes considerou o produto de dois segmentos BD e BC como sendo o segmento BE, obtido pela construção geométrica da figura 1. As quantidades desconhecidas ou incógnitas na álgebra de Descartes eram variáveis, que continuavam a representar segmentos de reta, mais do que números. Mas o autor desencorajou a interpretação de potências de variáveis em termos de dimensionalidade geométrica. Ao fazê-lo, Descartes não assumiu o chamado "princípio da homogeneidade" dos gregos, mas preservou o significado geométrico e a coerência dimensional. A interpretação dada por Descartes à multiplicação de segmentos de reta, resultando em um segmento de reta, juntamente com novos métodos de simbolismo algébrico, levou a modos de representação mais concisos e sugestivos.

Assim, por exemplo, quando queria extrair a raiz quadrada de GH [156], Descartes acrescentou, ao longo da mesma reta, FG igual à unidade; então, bisseccionando FH em K, ele descreveu a semicircunferência FIH, tendo K como centro. A seguir, traçou por G uma perpendicular até I, e GI é a raiz requisitada, conforme a figura 2.

Figura 2



O autor não tratou de raiz cúbica, nem de raízes de outros índices, mas afirmou que trataria mais convenientemente delas posteriormente.

[156] Descartes, *La Géométrie*, p. 298; p. 4, de onde foi extraída a figura 2.

A seguir, na subsecção “Como se podem empregar letras em geometria”, [157] Descartes explicou que não era necessário traçar os segmentos sobre o papel para efetuar a construção, bastando designar cada um deles por uma única letra. Como já dissemos, o objetivo era traduzir um problema geométrico em termos algébricos, a fim de construir sua solução. Os segmentos de reta conhecidos e os incógnitos são identificados por letras, sendo que as primeiras letras do alfabeto indicam os conhecidos e as últimas letras os desconhecidos. É atribuída a Descartes essa maneira de designá-los. Fermat se opôs a essas mudanças: “Eu designo as quantidades incógnitas por vogais, como o fez Viète, porque eu não vejo por que Descartes fez uma mudança em algo que é sem importância e que é puramente uma questão de convenção” [158]

Para somar dois segmentos conhecidos, Descartes designou um deles por $"a"$ e outro por $"b"$ e escreveu $"a+b"$. Conforme Descartes, $"a-b"$ indicava que $"b"$ é subtraído de $"a"$; $"ab"$ que $"a"$ é multiplicado por $"b"$; $"\frac{a}{b}"$ que $"a"$ é dividido por $"b"$; $"aa"$ ou $"a^2"$ que $"a"$ é multiplicado por $"a"$, e assim por diante. Descartes usava $a^3, a^4, a^5, a^6,...$ para designar as respectivas potências de $"a"$; mas ele empregava indiscriminadamente $"aa"$ e $"a^2"$ para designar a segunda potência de $"a"$. Embora apareça freqüentemente $"aabb"$, Descartes também fazia uso de $\frac{3a^2}{4b^2}$, por exemplo.

É importante assinalar que ao utilizar potências, tais como $"a^2"$ e $"b^3"$, Descartes somente estava se referindo a segmentos simples – não áreas ou volumes, como a notação e os nomes podiam sugerir. Este é um ponto de vista muito conveniente, mas que não é essencial para a geometria analítica, e nem modificou drasticamente o seu desenvolvimento em seus primórdios. Descartes tornou óbvia a necessidade de se manter, através da introdução de potências convenientes para os parâmetros ou coeficientes, uma aparente homogeneidade em uma dada equação ou expressão. Assim, por exemplo, quando supõe que se deseje extrair a raiz cúbica de $"aabb-b"$, ou seja, “a^2b^2-b”, Descartes

[157] Descartes, *La Géométrie*, p. 299; p. 7.

[158] *Oeuvres de Fermat*, v.I, p. 120; v.III, p. 111.

cuidadosamente acrescentou que “se deve considerar que a quantidade ‘aabb’ está dividida uma vez pela unidade, e que a outra quantidade ‘ b ’ está multiplicada duas vezes pela mesma unidade”[159] obtendo-se assim uma quantidade reduzida à dimensão “apropriada”, isto é, um termo de terceiro grau. Quando a unidade não está determinada no problema, os segmentos devem ser de mesma dimensão, ou seja, cada parte de um mesmo segmento (de uma mesma expressão) deve ser representada ordinariamente por tantas dimensões quanto qualquer outra parte do mesmo. Descartes substituiu o tipo de homogeneidade da álgebra geométrica dos gregos (ou homogeneidade formal) por uma homogeneidade implícita. [160]

Esta substituição proporcionou maior liberdade operacional para a técnica algébrica e pode ter facilitado, mais tarde, a associação implícita do conjunto dos números reais com os pontos sobre uma reta. As questões de notação eram relativamente sem importância quando comparadas com idéias.

Apesar disso, não se pode subestimar a vantagem prática a ser usufruída na facilidade de operação por deixar de lado o modo de expressão homogêneo dos gregos e por fazer álgebra completamente simbólica. Sucessores de Descartes geralmente mantiveram a homogeneidade anterior por mais de um século, mas, diferentemente, eles seguiram as notações de Descartes.

Retornando ao tema principal dos itens tratados, Descartes forneceu instruções a serem seguidas, ou seja, diretrizes para resolver um problema em geometria. Primeiramente, nós devemos supor a solução como já efetuada. Esta estratégia, que é bastante conhecida, retrocede a Platão. Aparece na obra de Pappus como segue:

> “Pois em análise nós supomos que aquilo que é pedido já tenha sido obtido, e nós investigamos o que é a partir do seu efeito, e novamente qual é a causa antecedente deste

[159] Descartes, *La Géométrie*, p. 299; p. 7.

[160] J. L. Coolidge, em “The Origin of Analytic Geometry”, *Osiris* 1: 231-250, 1936, ignorou esta passagem e escreveu apologeticamente: “Ele (Descartes) deu um enorme passo avante para aritmetizar sua geometria. Os objetos reais com os quais ele lidou eram números. Ele se libertou completamente da falsa crença de homogeneidade”. Cf. Coolidge, *History of Geometrical Methods*, Oxford, Clarendon, 1940, p. 126.

> último, e assim por diante, até que retrocedendo em nossos passos, nós chegamos a algo já conhecido ou a um princípio fundamental; e tal método nós chamamos análise, que é uma solução na ordem reversa, do fim para o começo.” [161]

A seguir, Descartes considerou que devemos nomear cada um dos segmentos que forem necessários para construir o problema, tanto os desconhecidos, como os já conhecidos.[162] Então se deve “examinar a dificuldade segundo a ordem em que se apresente como a mais natural de todas”,[163] ou seja, a ordem que mostre mais naturalmente as relações existentes entre estes segmentos, em sua mútua dependência. O objetivo é tornar possível a expressão de uma mesma quantidade de duas maneiras, o que se constitui em uma equação. Devem ser encontradas tantas equações quantos forem os segmentos desconhecidos supostos. Para Descartes, no entanto, o único objeto de consideração era a construção geométrica, e equações eram empregadas simplesmente como um meio abreviado e mais rápido de efetuar operações geométricas.[164] As equações não tinham significado ontológico em si mesmas. Eram somente uma linguagem simbólica útil, usada como instrumento, e não como um meio de definição e

---

[161] Pappus, em *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (II), *Aristarchus to Pappus*, trad. Ivor Thomas, Cambridge, Harvard University Press, s/d., (Loeb Classical Library), p. 597. Pappus de Alexandria foi um matemático grego que viveu cerca de 300 A.D. Sua obra mais importante é um tratado matemático em oito livros, dos quais o primeiro e parte do segundo foram perdidos. Isto foi passado aos acadêmicos modernos por Commandinus (*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*, Bolonha, 1588, com edições posteriores). A obra exerceu uma boa influência sobre a revitalização da geometria no século XVII. Pappus não era considerado, ele próprio, um matemático de destaque, mas preservou para o mundo muitos extratos ou análises de obras perdidas, e através de seus comentários acrescentou interesse a elas.

[162] Claude Rabuel, em *Commentaires sur La Géométrie de M. Descartes*, Lyon, s. c. e., 1730, p. 20, chama atenção para o uso de a, b, c, ... para os conhecidos e x, y, z, para as quantidades desconhecidas.

[163] Descartes, *La Géométrie*, p. 300; p. 8.

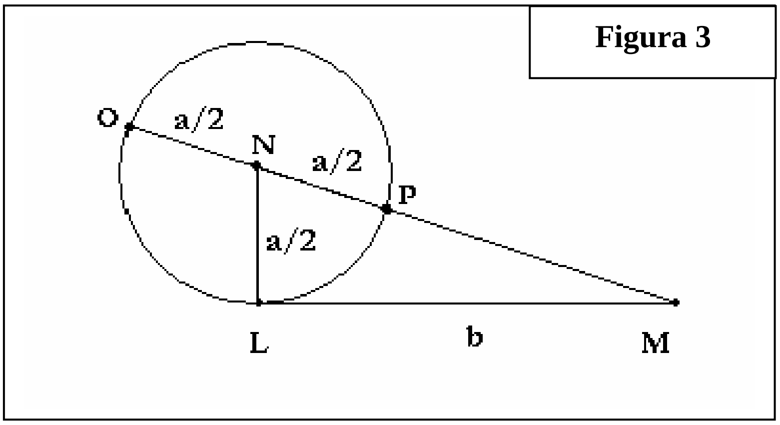
[164] Ver “Descartes and the Geometrization of Thought: The Methodological Background of Descartes’ *Géométrie*”, por Timothy Lenoir, *Historia Mathematica* 6: 355-379, 1979, p. 356.

representação. [165] De fato, Descartes não fez uso sistemático de uma equação para representar uma curva, e em muitos casos, ele abordou as curvas sem dar suas equações, ao passo que em outros, as equações surgiam quase que casualmente durante a argumentação efetuada. Mas isto será tratado convenientemente mais tarde.

Boyer[166] discutiu a afirmação de que para resolver um problema em geometria se deve supor a solução como já efetuada, dando nomes aos segmentos envolvidos, e achar uma equação determinada para cada segmento desconhecido. Para ele, esta afirmação difere apenas em aspectos não essenciais das definições da arte analítica dadas por Viète e Oughtred. Ela caracteriza uma abordagem analítica para a geometria, mas não representa uma geometria de coordenadas, como se entende no sentido usual.

Sobre a indagação de quais seriam os problemas planos, Descartes estabeleceu (sem prova) que se o problema pode ser resolvido pela geometria ordinária, isto é, por régua e compasso, sem usar nada mais do que linhas retas e circulares traçadas sobre uma superfície plana, a equação final será quadrática em uma variável. Então “esta raiz ou segmento de reta desconhecido se encontra facilmente” .[167] Se a equação é, por exemplo, $z^2 = az + b^2$, Descartes constrói o segmento desejado z como segue.

Figura 3



[165] Este também é o ponto de vista de W. Shea, exposto em *The Magic of Number and Motion*, p. 45.

[166] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 85.

[167] Descartes, *La Géométrie*, p. 302; p. 12.

Primeiramente, constrói o triângulo retângulo NLM,[168] cujo lado LM mede "b", raiz quadrada da quantidade conhecida "bb". O outro lado LN mede "$\frac{a}{2}$", a metade da quantidade "a" conhecida, que está multiplicada por z. LN é perpendicular a LM em L. Com centro em N, constrói um círculo de raio "$\frac{a}{2}$". A seguir, prolonga a reta MN, hipotenusa [169] desse triângulo, interceptando o círculo em O e p. Então $z = OM$ é o segmento desejado. Descartes ignorou a raiz PM da equação, porque esta era considerada "falsa", isto é, negativa. Na notação atual temos que: $(z-\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2$ e portanto $z^2 - 2.\frac{a}{2}.z + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b^2$ e $z^2 = az + b^2$. Da Figura 3, $OM..PM = (LM)^2$. Se $OM = z, PM = z - a$ e como $LM = b$ temos $z(z-a) = b^2$ ou $z^2 = az + b^2$, logo $MN = (z - \frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$,onde $OM = z = ON + MN = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

Tais construções, que configuram o propósito da geometria de Descartes, atualmente são uma parte padrão da teoria das equações, e não da geometria analítica. Elas vêm ilustrar o fato de que a sua intenção era a busca das construções geométricas de problemas clássicos – a mesma intenção existente na geometria grega da Antigüidade.

Este livro I de *La Géométrie*, como já foi citado, é sobre "problemas cuja construção requer somente retas e circunferências" – a velha limitação platônica. Pode ser caracterizado como técnica algébrica no caso em que os problemas podem ser resolvidos por meio de régua e compasso. Não apresenta a questão metodológica crucial de como construir quando régua e compasso são insuficientes. Boyer[170] considera que é no Livro II, cujo título é "A Natureza das Linhas Curvas", que se acha o aspecto mais moderno da obra. Entretanto, Descartes indica expressamente que este livro foi escrito como uma preliminar necessária ao terceiro. O Livro III, o último, trata da "Construção de Problemas

---

[168] Figura extraída de Descartes, *La Géométrie*, p. 302; p. 12.

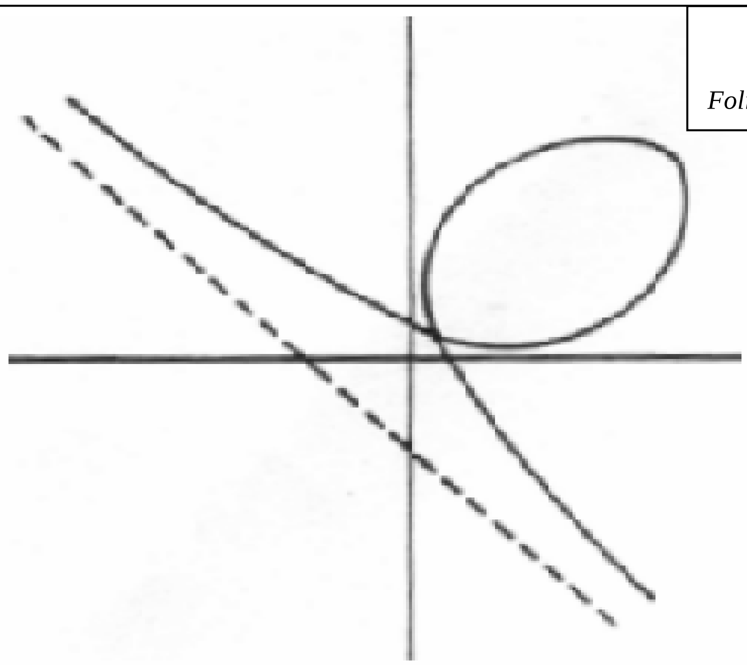
[169] Descartes diz no original (...) "prolongeant MN la baze de ce triangle"... , porque a hipotenusa era comumente tomada como sendo a base, naquela época.

[170] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 86.

Sólidos e Super-sólidos”. É paradoxal, segundo Boyer, constatar que foi em grande parte através da obra *La Géométrie* e de Descartes que se aprendeu que equações a duas incógnitas representam curvas planas. Apesar disso, nem ele nem seus sucessores imediatos se interessaram muito por este princípio básico. Isto se deve a que seu interesse não era pelo próprio lugar geométrico (*locus*) de pontos, satisfazendo uma dada equação, mas sim pela possibilidade de construção destes pontos. É digno de nota que não se apresenta, em toda *La Géométrie,* nem uma curva sequer traçada diretamente de uma equação. Outro indício de que o interesse manifesto neste aspecto era pequeno é o fato de que Descartes fez uso de ordenadas negativas ocasionalmente, mas não de abscissas negativas. O “folium” de Descartes, considerado por ele em 1638, que pode ser representado pela equação $x^3 + y^3 = axy$, era na verdade uma folha, pois foi considerado somente para o primeiro quadrante.

Figura 4

Folium de Descartes



Segundo Boyer [171] Descartes ficou muito impressionado com o poder do seu método em lidar com o lugar geométrico das três ou quatro retas de Pappus e foi em conexão com este problema que, perto da metade do Livro I, à p. 309, de

[171] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 87.

La Géométrie, apareceu o uso de coordenadas, não de modo explícito, nem com essa denominação.

O problema de Pappus teria sido apresentado a Descartes em 1631, pelo matemático holandês Jakob Golius (1596-1667). A resposta original de Descartes teria sido perdida. Entretanto, pela carta a Mersenne, de 5 de abril de 1632, sabe-se que ele se dedicou à sua resolução durante seis semanas.[172] O problema é central em *La Géométrie* e o próprio Descartes declarou, em carta a Mersenne, em fins de dezembro de 1637:

> "Não me agrada falar em meu próprio louvor, mas desde que poucas pessoas podem entender a minha geometria, e já que você deseja que eu lhe dê a minha opinião, eu penso que é melhor dizer que é tudo quanto eu podia esperar, e que em *La Dioptrique* e em *Les Météores*, eu apenas tentei persuadir as pessoas de que meu método é melhor que o método ordinário. Eu provei isto em minha geometria, pois no começo eu resolvi uma questão que, de acordo com Pappus, não podia ser resolvida por qualquer dos geômetras antigos." [173]

Esta passagem faz a apologia do método cartesiano Schuster, por sua vez, tem uma visão inteiramente diversa dos supostos benefícios e vantagens de tal método. Ele declarou que "virtualmente tudo o que Descartes estabelece no *Discours de la Méthode* sobre a proveniência, o uso e o desenvolvimento do método bem como o papel desempenhado por ele em sua carreira, é uma ficção" (...) . "Seu método não explica nem seu modo de trabalho, nem suas aquisições, nem o decurso de sua sintomática carreira". [174]

O problema de Pappus é o seguinte: são dadas "n" linhas retas L_i , $1 \leq i \leq n$ no plano. De um ponto C, no mesmo plano, são traçadas retas formando

---

[172] Carta de Descartes a Mersenne, 5 de abril de 1632, A.T., vol. I, p. 244.

[173] *Id.*, fim de dezembro de 1637, A.T., vol. I, p. 478.

[174] Schuster, "Whatever Should We Do With Cartesian Method?", pp. 219-220.

ângulos dados com as retas dadas. Sejam d_i, $1 \leq i \leq n$, os comprimentos dos segmentos respectivos que são traçados de C até L_i, $1 \leq i \leq n$, cada um deles formando com a respectiva reta o ângulo φ_i, $1 \leq i \leq n$. É pedido para achar o lugar geométrico dos pontos C para os quais uma certa proporção, envolvendo d_i e dependendo do número de retas envolvidas, é constante. As proporções em questão são:

Se n=3	$d_1^2 : d_2.d_3$
Se n=4	$d_1.d_2 : d_3.d_4$
Se n=5	$d_1.d_2.d_3 : a.d_4.d_5$ onde a é um segmento constante
Se n=6	$d_1.d_2.d_3 : d_4.d_5.d_6$

Para três ou quatro retas fixas, a equação será quadrática, o que significa que, para qualquer valor conhecido de "y", será possível descobrir os valores de "x" usando apenas a régua e o compasso. Para cinco ou seis retas, a equação será cúbica; para sete ou oito, quártica; para nove ou dez, quíntica; e assim sucessivamente, aumentando um grau à introdução de cada duas retas adicionais.

3.1.1. Descrição do tratamento dado por Descartes ao Problema de Pappus para três ou quatro retas.

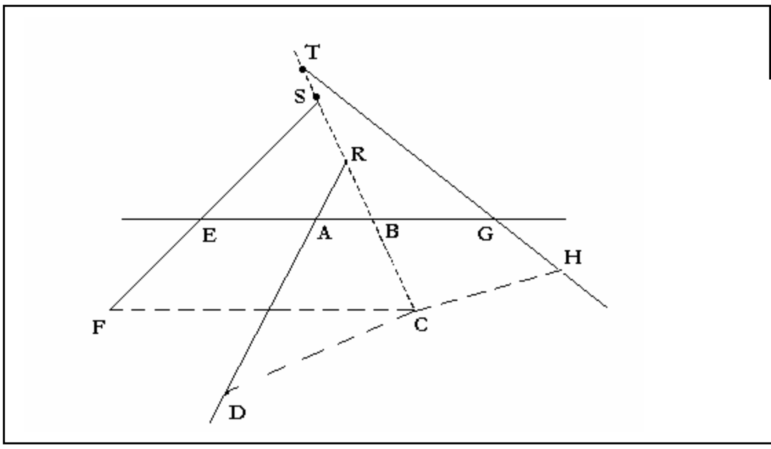


Figura 5

No livro I de *La Géométrie*, Descartes apresentou a solução para o caso em que n=4, ou seja, quando são dadas quatro retas: AB, AD, EF, GH (ver a figura 5).[175] De um ponto C, variável, sobre o lugar geométrico procurado, Descartes traçou retas CB, CD , CF e CH (que estão pontilhadas na figura). Estas formam ângulos dados com as retas AB, AD, EF e GH. Tomando AB como "x" e CB como "y", ele então expressou as distâncias CD, CF e CH como expressões lineares em "x" e "y", com coeficientes que ficam determinados pelas distâncias e pelos ângulos fixados entre as retas. Chegando a estas expressões, Descartes usou razões equivalentes à lei trigonométrica dos senos. Colocando BC.CF = CD.CH e introduzindo algumas abreviações, Descartes chegou[176] a uma equação da forma: $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Esta é a equação geral de uma cônica que passa pela origem das coordenadas, mas sob o ponto de vista de Descartes, os coeficientes literais presumivelmente eram para ser tomados como positivos.

Resolvendo a equação para y, obtém-se uma expressão da forma $2y = a - bx + \sqrt{kx^2 + \ell x + a^2}$, onde $k = b^2 - 4d$ e $\ell = 4c - 2ab$. Descartes usou apenas um único sinal antes do radical, mas ele mencionou que, para posições variadas das retas dadas, alguns dos termos poderiam desaparecer ou ter o sinal trocado. Ele então mostrou como, por pontos arbitrariamente escolhidos sobre a reta AB (correspondente a um eixo de abscissas), as correspondentes ordenadas do lugar geométrico podem ser construídas apenas com régua e compasso. Ocasionalmente ele indicou a natureza do lugar geométrico para os vários casos. Se, por exemplo, a expressão sob o radical desaparecer, ou for um quadrado perfeito, o lugar geométrico será uma reta. Esta é a única referência em *La Géométrie* ao fato de que a equação de uma reta é do primeiro grau. Se o coeficiente de x^2 for zero, o lugar geométrico é uma parábola; se tal coeficiente for “precedido de um sinal de mais”, é uma hipérbole; se for “ precedido de um sinal de menos” é uma elipse – exceto para o caso especial em que $b = 0, d = 1$, quando, para eixos retangulares, a curva seria um círculo. Estas condições são equivalentes a um reconhecimento do que agora é conhecido como a

[175] Tal figura foi extraída de *La Géométrie*, p. 309; p. 27.

[176] Descartes, *La Géométrie*, livro II, p. 325; p. 61. A notação foi um pouco modificada para facilidade de exposição nos moldes atuais.

"característica" da equação de uma cônica. Apesar disso, a abordagem de Descartes não é adaptada como uma introdução à geometria, com um tratamento analítico, pois ele não abordou separadamente os casos especiais mais simples da reta e das secções cônicas. Ele não apresentou equações do tipo $x^2 = y^2$ ou $xy = k^2$, por exemplo, pela razão que elas não apareciam especificamente em seu estudo do problema de Pappus. Isto está relacionado com o uso que Descartes fazia da equação, não como uma representação de uma curva, mas sim para efetuar a construção de um lugar geométrico ou expressar a solução de um problema.

A discussão efetuada por Descartes da equação do segundo grau incluiu também a determinação de propriedades das curvas para vários casos: centros, focos, vértices e *latera recta*. Os métodos foram dados em um caso geral, e então foram aplicados ao caso particular de $y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$. A consideração de um tal exemplo numérico específico não era usual naquela época. Descartes concluiu a discussão do lugar geométrico do problema de Pappus para três ou quatro retas estabelecendo que todos os tais lugares geométricos possíveis de serem solução resultavam em equações do segundo grau, e eram, portanto, lugares geométricos planos ou sólidos. Se a equação fosse de grau mais alto, a curva podia ser chamada "um lugar geométrico super-sólido".

Podemos afirmar que a idéia bastante influente da relação entre curva e equação, que é a idéia chave da geometria analítica, não teve um lugar predominante na estrutura de *La Géométrie*. Essa idéia mais parece ser um tema secundário, pois se esta equivalência entre curva e equação tivesse sido central, era de se esperar que Descartes tratasse as curvas de acordo com seus graus, começando com a reta, indo para as cônicas e assim por diante. Como já dissemos, uma equação de reta só aparece uma vez no texto e de maneira ocasional. Trata-se da reta $y = m - \frac{n}{z}x$, que Descartes usou como uma preliminar para achar as cônicas $y = m - \frac{n}{z}.x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$; estas cônicas são os lugares geométricos no problema de Pappus das quatro retas[177]. Descartes também discutiu várias curvas sem fornecer a equação de cada uma delas. [178]

Fornecer a equação, no entanto, não resolvia inteiramente o problema, pois era preciso usar a equação para construir a curva. Esta era construída escolhendo-se um valor arbitrário para y, que na Figura 5 é o segmento BC e, em seguida, construindo geometricamente o valor correspondente para x, que na mesma figura corresponde ao segmento AB. Esse processo se repete, de modo a gerar gradualmente um conjunto de pontos que pertençam ao lugar geométrico procurado. Um número suficientemente grande de valores nos permitirá traçar a curva em que o ponto C deve estar.

No Livro I de *La Géométrie* não foram abordadas questões polêmicas ou problemas metodológicos, tais como que tipos de curvas eram aceitáveis em geometria, que meios de construção poderiam ser usados quando régua e compasso não fossem suficientes, e como decidir se as construções eram as mais simples possíveis.

Neste livro só foram tratados problemas planos, que podem ser construídos apenas com o uso de régua e compasso, portanto o seu conteúdo não é problemático do ponto de vista metodológico. Em resumo, Descartes mostrou primeiramente como as operações da aritmética, isto é, a adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas podiam ser interpretadas na Geometria[179]. A seguir, ele explicou como esta interpretação deveria ser usada pelo geômetra, ao abordar um problema, para obter uma equação algébrica. A solução desta equação forneceria a solução do problema[180]. Nos casos aos quais Descartes se restringiu no Livro I, essa equação algébrica seria do primeiro ou do segundo grau. Descartes explicou como as raízes de uma tal equação podiam ser construídas por régua e compasso, e forneceu assim a solução geométrica do problema original, ou seja, a construção. Às vezes, como no caso do problema de Pappus, há um grau de liberdade envolvido, e a equação resultante tem duas

---

[177] Descartes, *La Géométrie*, p. 328; p. 67-8.

[178] Ver, por exemplo, a curva que resolve um caso particular do problema de Pappus das cinco retas, em *La Géométrie*, p. 339; p. 88-9.

[179] Descartes, *La Géométrie*, pp. 297-300 ; pp. 2-8.

[180] *Ibid.*, pp. 300-304; pp. 8-16.

variáveis. A solução é um lugar geométrico ou uma curva. Na última parte do Livro I [181] Descartes começou sua discussão do problema de Pappus. Seu interesse primordial não estava no lugar geométrico como curva, mas na possibilidade da construção de pontos sobre o lugar geométrico. Em particular, Descartes determinou em que caso estes pontos podiam ser construídos apenas com régua e compasso.

3.2. A Aceitabilidade de Curvas e a Demarcação da Geometria. Análise do Livro II.

O primeiro item deste livro tem o subtítulo "quais são as linhas curvas que se podem admitir em geometria". Com isso, Descartes começou a estabelecer critérios para admitir uma curva como geométrica. O tema da demarcação da geometria, ao qual Descartes se dedicou, diz respeito à Álgebra. Esta, para ele, incluía as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes. Naquela época, logaritmos, senos, cossenos, exponenciais e similares não tinham ainda passado a fazer parte do elenco de fórmulas algébricas. Isto significava que nem todas as curvas podiam ser representadas por meio de uma equação. Descartes utilizou um critério algébrico e um critério instrumental para demarcar a geometria. De acordo com o critério algébrico, esta incluiria somente aquelas curvas cuja equação envolvesse apenas as operações citadas acima. Mas um ponto enigmático se apresenta: por que a álgebra deveria ser um critério para a demarcação da geometria?

Este aspecto começa a se esclarecer quando levamos em conta o modo especial de Descartes abordar as questões relacionadas à *La Géométrie*. Em primeiro lugar, seu objetivo foi na verdade resolver todos os problemas geométricos, como já foi citado. Um caso exemplar desses problemas foi o de Pappus, já descrito. Resolver problemas significava construção. É bastante esclarecedor o seguinte trecho contido na última página do Livro III de *La Géométrie*:

[181] Descartes, *La Géométrie*, pp. 304-314; pp. 16-37.

> “Mas não é meu propósito escrever um livro extenso, e trato melhor de muitas coisas em poucas palavras, como se julgará pelo que fiz, caso se considere que havendo reduzido a uma mesma construção todos os problemas de um mesmo gênero, eu dei ao mesmo tempo a maneira de reduzi-los a uma infinidade de outras diversas [construções] e assim, de resolver cada um deles de uma infinidade de maneiras; e além disso, que havendo construído todos os problemas planos, através da intersecção de uma reta com uma circunferência e todos os problemas sólidos pela intersecção de uma parábola com uma circunferência, e finalmente, todos os que são de um grau mais composto por intersecções similares entre uma curva, que é somente um grau mais composto do que a parábola, e uma circunferência, é necessário apenas seguir o mesmo caminho para construir todos os problemas que são mais compostos, *ad infinitum.*” [182]

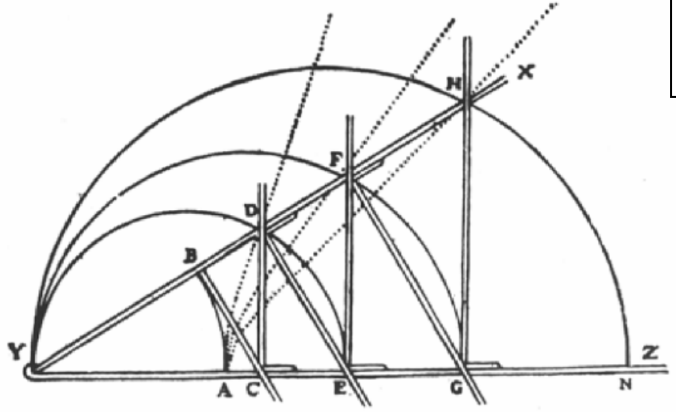
A pista para responder porque a álgebra deveria demarcar a geometria está em ser a álgebra o meio utilizado para a redução de todos os problemas de um mesmo gênero a uma mesma construção. Esta construção era simples no caso do segundo grau, pois se fazia com a régua e compasso. Mas para o terceiro grau, a construção geométrica era mais complicada na resolução das equações cúbicas. Descartes fez uso, ao menos teoricamente, do seu compasso proporcional, ou compasso mesolábio, já citado no capítulo 2 deste trabalho, e aqui novamente representado pela figura 6. Esse instrumento não devia necessariamente ser usado com as mãos, pois não se esperava que o leitor realmente tomasse o compasso e realizasse a construção fisicamente. Era suficiente a sua visualização em pensamento, como um dispositivo para fazer contas.

---

[182] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, pp. 412-413; pp. 238-241.

Figura 6

***La Géométrie*, p. 318**



O texto ajudava a esclarecer de que maneira a construção podia ser feita. O procedimento era algébrico, mas o significado era geométrico. O processo era descrito como uma tarefa a ser realizada. Como qualquer tarefa, tinha de ser acompanhada de regras que deviam ser seguidas e de critérios que seriam satisfeitos. Em princípio, a regra básica era construir usando apenas régua e compasso e o critério de adequação era a simplicidade. As construções não deveriam ser mais complicadas do que o estritamente necessário. A tarefa devia ser realizada do modo mais simples possível.

Bos afirmou que o objetivo de *La Géométrie* era fornecer um método para a arte de solucionar problemas geométricos. [183] Esse objetivo envolvia dois níveis no tratamento dos problemas, um nível técnico e um metodológico. Quanto ao "nível técnico", o programa visava fornecer uma "análise", isto é, um método universal para achar as construções para qualquer problema que pudesse ocorrer dentro da tradição de solucionar problemas geométricos. Esse método poderia ser resumido em usar álgebra ao analisar problemas geométricos. Quanto ao nível da "metodologia", o programa levantava uma questão crucial dentro desta mesma tradição de solucionar problemas geométricos, a saber: como construir quando régua e compasso são insuficientes? Os "problemas clássicos" como, por exemplo, a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo, a quadratura do

[183] Bos, "The Structure of Descartes' *Géométrie*", in G. Belgioioso *et alii*, orgs., *Descartes: Il Metodo e i Saggi*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana,1990, v. 2, pp. 356-8.

círculo, não podem ser construídos apenas por régua e compasso. Destes três famosos problemas da geometria clássica grega, Descartes resolveu os dois primeiros com métodos que podiam ser considerados ingênuos, caracterizados pela facilidade de aplicação para qualquer pessoa capaz de abrir e fechar um compasso. Mas a questão era quais outros meios de construção eram aceitáveis e quais não eram; qual deveria ser o critério de simplicidade para se decidir se as construções eram simples o suficiente?

3.2.1. Classificação das Curvas em Gêneros

Ao tratar da classificação das curvas em vários gêneros, Descartes declarou: "Mas não deixa de estranhar-me que, apesar disso, não hajam distinguido [os antigos] diversos graus entre as linhas mais compostas, (...)." [184] Neste trecho fica evidente que Descartes defende o uso do grau da equação como uma base para a classificação de curvas, embora ele não deixe explícita uma classificação mais refinada, baseada em outro princípio, que considerava a circunferência mais simples do que a elipse, parábola e hipérbole.

O trecho abaixo mostra que realmente Descartes se baseia no grau da equação para estabelecer uma classificação :

> "Apesar disso, eu coloco as linhas curvas que elevam a equação até o quadrado do quadrado no mesmo gênero que as que não a elevam mais que até o cubo ; e aquelas cuja equação se eleva ao quadrado do cubo, no mesmo gênero daquelas cuja equação não chega a mais que o super-sólido[185] e assim para as outras. A razão é que há procedimentos gerais para reduzir ao cubo todas as dificuldades que aparecem no quadrado do quadrado ; e ao super-sólido todas as do quadrado do cubo ; de maneira que não se deve considerá-las mais compostas." [186]

[184] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 315; p. 41.

[185] A 5ª potência era assim designada.

[186] Descartes, *La Géométrie*, p. 323; p. 57.

O outro princípio, que considera a circunferência mais simples que a elipse, parábola ou hipérbole, aparece no trecho seguinte:

> “Mas cabe observar que entre as linhas de cada gênero, embora a maior parte seja de igualmente compostas, de modo que elas possam servir para determinar os mesmos pontos e construir os mesmos problemas, há sempre umas que são mais simples que outras e que não têm tanta extensão em suas potências; como entre as de primeiro gênero, além da elipse, da hipérbole e da parábola, que são igualmente compostas, está também abrangida a circunferência, que manifestamente é mais simples. E entre as de segundo gênero está a Conchóide vulgar que tem sua origem na circunferência e há também algumas outras que, embora não tenham tanta extensão como a maioria das do mesmo gênero, não podem ser colocadas no primeiro.”[187]

3.2.1.1. Curvas mais “compostas” que outras

Antes de prosseguir, gostaríamos de efetuar um parênteses para o esclarecimento do significado de “curva mais composta” para Descartes. Este termo aparece amiúde em *La Géométrie*. Na página 317 do Livro II, Descartes descreveu:

> “Sejam as linhas AB, AD, AF, semelhantes, que suponho haver sido descritas com ajuda do instrumento YZ, composto de várias réguas unidas, de tal maneira que aplicada a reta YZ sobre a reta AN, pode-se abrir ou fechar o ângulo XYZ e que quando está todo fechado os pontos B, C, D, E, F, G, H, estão todos unidos ao ponto A;

[187] Descartes, *La Géométrie*, p. 323; p. 57.

> mas à medida que se abre, a régua BC que forma ângulo reto com XY no ponto B, empurra em direção a Z a régua CD que corre sobre YZ, formando sempre ângulos retos com ela; e CD empurra DE que corre sobre YX, mantendo-se paralela a BC; DE empurra EF; EF empurra FG; esta empurra GH; e pode-se imaginar uma infinidade de outras que se empurram consecutivamente da mesma maneira, e das quais umas formam sempre os mesmos ângulos com YX e as outras com YZ. Contudo, à medida que se abre o ângulo XYZ, o ponto B descreve a linha AB, que é uma circunferência; e os outros pontos D, F, H, descrevem outras linhas curvas AD, AF, AH, das quais as últimas são, por conseguinte, mais compostas do que a primeira, e esta, mais que a circunferência.[188]

Esta é uma descrição cuidadosa do uso do compasso mesolábio ou compasso proporcional, reproduzido na Figura 6. Tal compasso era um instrumento privilegiado de inteligibilidade para Descartes.[189] No Livro II de *La Géométrie* ele recorreu ao seu princípio de clareza e distinção para validar seu processo.

Referindo-se às curvas AD, AF e AH, traçadas pelo compasso, ele afirmou:

> "Mas não vejo o que possa impedir que se conceba tão clara e distintamente o traçado desta primeira [AD] como o da circunferência, ou ao menos como as secções cônicas; nem o que possa impedir que se conceba a segunda [AF] , e a terceira, [AH] e todas as outras que se possam descrever, tão bem quanto a primeira; nem por conseguinte, que não sejam admitidas todas elas, do

---

[188] Descartes, *La Géométrie*, pp. 317-318; pp. 45-46.

[189] Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, p. 46.

mesmo modo, para servir às especulações da Geometria."[190]

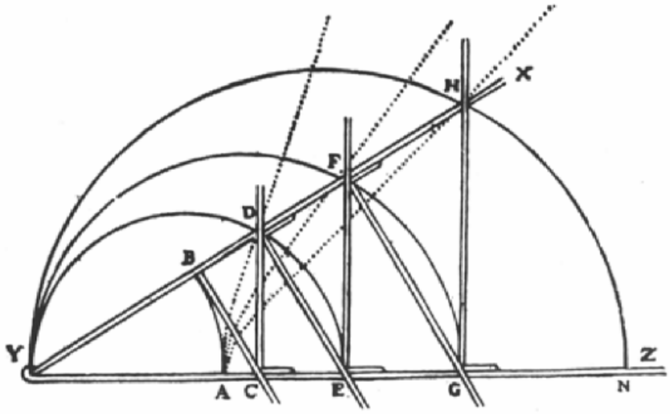


Figura 6

***La Géométrie*, p. 318**

A seguir, na secção "Maneira de distinguir todas as linhas curvas em certos gêneros e de conhecer a relação que têm todos os seus pontos com os das linhas retas", Descartes escreveu:

> "Poderia dar aqui muitos outros meios para traçar e conceber linhas curvas que fossem mais e mais compostas, por graus, até o infinito."[191]

A frase acima cita modos de se traçar e conceber linhas curvas, o que evidencia a crença em que a natureza de uma curva é estampada em seu traçado. Apesar disso, não há gráficos do traçado de curvas como usamos hoje em dia. No diagrama do compasso de Descartes da figura 6 consideremos: $YA = YB = a; \quad YC = x; \quad CD = y; \quad YD = z$, para encontrarmos mais facilmente a equação da curva AD. [192]

---

[190] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, pp. 318-9; pp. 46-49.

[191] *Ibid.*, p. 319; p. 49.

[192] Seguimos aqui a abordagem feita por Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, p. 58.

Os triângulos YBC e YCD são retângulos, logo são semelhantes. Segue-se que: $\frac{YD}{YC} = \frac{YC}{YB}$, ou seja, $\frac{z}{x} = \frac{x}{a}$.

Logo, $z = \frac{x^2}{a}$. Mas no triângulo YCD, temos: $(YD)^2 = (YC)^2 + (CD)^2$, $z^2 = x^2 + y^2$. Como $z = \frac{x^2}{a}$, a equação da curva AD é: $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Segue-se, analogamente, comparando-se triângulos semelhantes, que a equação da curva AF, traçada pelo ponto F enquanto o mesmo compasso está sendo aberto, é $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$. A equação da curva AH, traçada pelo ponto H quando da abertura do compasso, é $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$. Descartes não forneceu essas equações em *La Géométrie*.

Tendo Descartes declarado que as curvas AF e AH são "mais compostas que a primeira" [AD] e "esta, mais que a circunferência," [193] inferimos que "curva mais composta" implicava em que o grau da sua equação era mais alto. É claro, portanto, que a simplicidade da construção "mecânica" através do compasso não era acompanhada por graus mais baixos da equação.

Inicialmente, em 1619, Descartes distinguia as curvas geométricas e não geométricas baseando-se na facilidade com que elas eram "instrumentalmente" construídas através de um movimento contínuo de seu compasso. Ele não se baseava, a princípio, nas equações das curvas e sustentava que as curvas traçadas por seu compasso eram clara e distintamente concebidas, mas logo teve consciência de que as equações destas curvas eram complexas. Não podemos esquecer que a visão cartesiana da solução de problemas geométricos era primordialmente em termos da construção e não em termos de uma solução algébrica satisfatória. Como já citamos anteriormente, em muitos casos a sua abordagem das curvas era efetuada sem dar suas equações, enquanto que em outros casos, as equações surgiam durante a argumentação. Nestes últimos, a equação da curva era considerada um instrumento para a construção e não um meio de definição e representação.

[193] Descartes, *La Géométrie*, livro II, p. 318; p. 46.

3.2.1.2. Admissibilidade da Curva na Geometria

Na mesma secção já citada do Livro II, Descartes estabeleceu sua classificação das curvas em vários gêneros:

> "Mas para compreender em conjunto todas as [curvas] que estão na natureza, e distinguí-las por ordem em certos gêneros, não conheço nada melhor que dizer que todos os pontos das que podem designar-se geométricas, isto é, que admitem certa medida precisa e exata, têm necessariamente alguma relação com todos os pontos de uma linha reta, que pode ser expressa por alguma equação, a mesma para todos os pontos."[194]

O que se entende do trecho acima é que se todo e cada ponto de uma curva não pode ser relacionado com uma coordenada retilínea através de um número finito de operações algébricas, tal curva não é admissível em geometria. Mas Descartes não definiu explicitamente curvas geométricas como sendo aquelas que admitem equações algébricas. A razão disso pode estar no seu principal interesse, que era o modo pelo qual as curvas são realmente traçadas. Àquela época, um geômetra não ficaria satisfeito somente com as suas equações. A preocupação em efetuar de fato as construções das curvas era inerente à resolução de qualquer problema e refletia um aspecto preponderante a qualquer outro.

Prosseguindo na classificação das curvas em gêneros, observou:

> "E que quando esta equação não seja superior ao retângulo de duas quantidades indeterminadas, ou ao quadrado de uma só,[195] a linha curva é do primeiro e mais simples gênero, no qual não há mais do que a circunferência, a parábola, a hipérbole e a elipse. Mas quando a equação chega à terceira ou quarta dimensão das duas, ou de uma

[194] Descartes, *La Géométrie*, livro II, p. 319; p. 49.

[195] Entenda-se: quando a equação é de grau não superior a dois.

> das duas quantidades indeterminadas, – pois são necessárias duas para explicar aqui a relação entre um ponto e outro – ela é do segundo gênero. E quando a equação chega à quinta ou sexta dimensões, ela é do terceiro; e assim para as outras até o infinito.” [196]

A classificação das curvas feita por Descartes pode ser exemplificada como a seguir: Seja OM uma curva previamente construída. Seja O um ponto sobre ela, e Q um ponto externo, ambos fixos com respeito à curva. Sejam S um ponto fixo sobre a reta OQ, T um ponto fixo na reta perpendicular a OQ por S e P um ponto de intersecção da curva com a reta TQ. Quando a curva (e portanto também Q) se move com movimento rígido de translação numa direção paralela a OS, o ponto P descreverá uma nova curva PT, que pode ser considerada como uma sucessora da curva original.

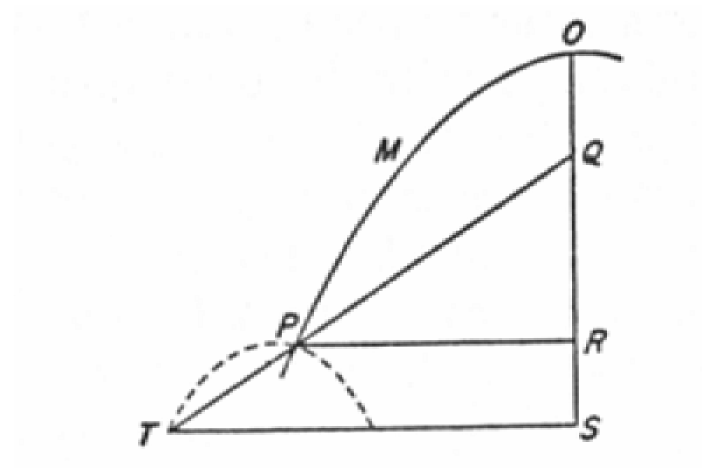


Figura 7
Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 89

Se a dada curva é uma linha reta, a nova curva será uma hipérbole; se é uma parábola, a curva derivada será a parábola cartesiana (ou tridente) cuja equação é : $x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy$. Descartes transformou esta hierarquia cinemática das curvas em uma classificação algébrica, através do seu princípio de

[196] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 319; p. 49.

que “todos os pontos de uma curva geométrica [isto é, quando definida por movimentos contínuos] devem ter uma relação definida expressa por uma equação”. [197]

Vamos descrever, na notação atual, como Descartes achou a expressão do lugar geométrico do ponto p. Sejam: OQ = a, ST = b, e a curva dada por z = f(x), onde z = OR e x = PR. Se RS = y, temos $\frac{z-a}{x}=\frac{z-a+y}{b}$. A equação do lugar geométrico de P é portanto $f(x)=\frac{xy+ab-ax}{b-x}$ pois zb - ab = xz – ax + xy, logo zb –zx = xy + ab - ax, donde z(b-x) = xy + ab - ax e finalmente $z=\frac{xy+ab-ax}{b-x}$.

Se z = f(x) é linear, o lugar geométrico de P é do segundo grau. Se a curva z = f(x) é do segundo grau, o lugar geométrico é do terceiro ou quarto graus. Se z = f(x) é uma cúbica ou quártica, Descartes disse que o lugar geométrico de P devia ser do quinto ou sexto graus; “e assim por diante, até o infinito”.[198]

Deste modo, uma hierarquia por pares de graus foi estabelecida para os novos lugares geométricos. Fermat [199] objetou que havia inconsistência nisto, pois se a curva que é transladada for $y^3=b^2x$, então a curva gerada é do quarto grau – isto é, não pertence ao próximo, mas ao mesmo par de graus.

Apesar disso, a classificação de Descartes em ordens de dois graus cada uma, foi geralmente adotada por todo o século XVII. Era baseada no fato de que a solução algébrica da quártica leva a uma cúbica como solução, donde Descartes teria concluído que uma equação de grau “2n” levaria em todos os casos a uma solução de grau “2n-1”.

Das afirmações de Descartes em *La Géométrie* pode-se concluir que a sua classificação tenha surgido naturalmente nas curvas cartesianas e no problema de Pappus. Ela foi confirmada pelo propósito da construção geométrica das raízes de equações polinomiais através do uso de intersecções de curvas. Cúbicas e quárticas são ambas solucionáveis por cônicas; e quínticas e sêxticas são

---

[197] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 319; p. 49.

[198] *Ibid.*, pp. 319-323; p. 49.

[199] *Oeuvres de Fermat*, v. I, pp. 121-123; v.III, pp. 112-113.

solucionáveis por cúbicas. Mas ao final da sua classificação, Descartes acrescentou a frase: “e similarmente para as outras”.[200] Isto poderia implicar em que as cúbicas não seriam suficientes para resolver equações de sexto grau e superiores, embora na realidade elas possam ser usadas para graus acima de nove. Descartes poderia, de acordo com as suas idéias sobre a possibilidade de construção, ter agrupado melhor as curvas por ordens com graus correspondentes aos quadrados perfeitos, em vez de aos números pares.

Outro exemplo de classificação de uma curva em determinado gênero foi fornecido por Descartes no Livro II de *La Géométrie.* [201] Ele apresentou a figura de uma curva EC, da qual se desejava saber a que gênero pertencia, conforme a figura 8.

Descartes imaginou a curva EC descrita pela intersecção da régua GL e a peça CNKL, cujo lado KN foi prolongado indefinidamente até C. Movendo-se sobre o plano em linha reta a peça CNKL - isto é, de tal maneira que seu lado KL esteja sempre sobre algum trecho da reta BA prolongada de um e outro lado - ela faz mover circularmente a régua GL, ao redor do ponto G. Isto ocorre porque tal régua está vinculada de tal modo que passa sempre pelo ponto L.

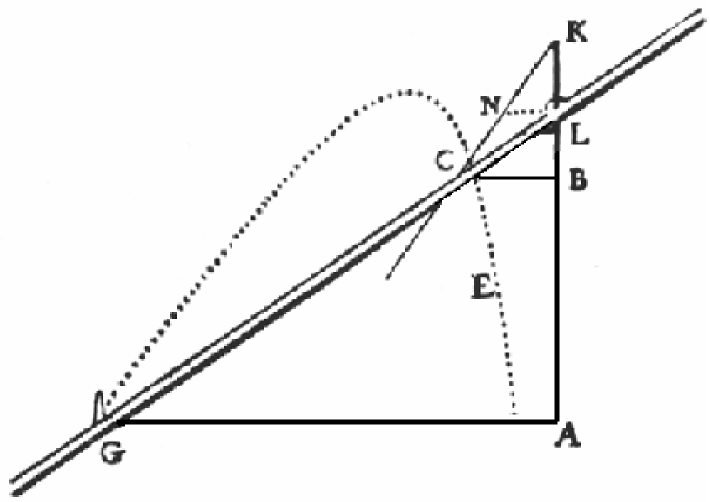


Figura 8

***La Géométrie,* p. 320**

[200] *Descartes, La Géométrie,* Livro III, p. 389.

[201] *Ibid.*, Livro II, p. 319; p. 49.

A seguir, Descartes escolheu a linha reta AB para referir a seus diversos pontos todos os da linha EC; e nesta linha AB escolheu um ponto, o ponto A, para começar o cálculo por ele. A respeito de suas escolhas, Descartes declarou:

> "Digo que escolho este ou aquele porque sou livre para tomá-los como queira, pois ainda que haja muitas escolhas para tornar a equação mais curta e fácil, qualquer que seja a maneira com que os tome, pode-se sempre fazer com que a linha apareça de um mesmo gênero, como é fácil de demonstrar." [202]

O trecho acima é interessante, pois evidencia a escolha arbitrária de uma origem [A] e de um eixo coordenado [AB], para relacionar todos os pontos da linha curva EC aos diversos pontos deste eixo. Descartes não faz nenhuma referência a estes termos atuais, tais como origem, eixo coordenado ou sistema de coordenadas retilíneas. Mas fica claro que escolhia o seu próprio "sistema", ajustando os "eixos" ao problema, em vez de fazer o inverso.

Prosseguindo, tomou um ponto qualquer da curva, o ponto C, sobre o qual supôs que o instrumento que servia para descrevê-la estava aplicado. Traçou por este ponto C o segmento de reta CB, paralelo a GA. Como CB e BA eram duas quantidades indeterminadas e desconhecidas, ele as designou por "y" e "x", respectivamente. Mas para encontrar a relação de ambas [203] ele considerou também as quantidades conhecidas que determinavam o traçado dessa linha curva, tais como GA, que designou "a"; KL, que chamou de "b" e NL paralela a GA, que chamou de "c". Portanto NL está para LK, ou "c" está para "b" assim como CB, ou seja, "y" está para BK. Em notação atual, temos: $\frac{NL}{LK} = \frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$ logo $BK = \frac{b}{c}.y$ e $BL = BK - KL = \frac{b}{c}.y - b$ e $AL = BA + BL = x + \frac{b}{c}.y - b$. Além

[202] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 320; p. 50.

[203] Quer dizer, a equação algébrica da curva EC.

disso, CB está para LB, ou seja $"y"$ está para $(\frac{b}{c}.y - b)$ assim como $"a"$, ou seja GA, está para LA, ou seja, $(x + \frac{b}{c}.y - b)$. Dessa maneira:

$$\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA} \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{b}{c}.y - b} = \frac{a}{x + \frac{b}{c}y - b}$$

Assim, multiplicando-se os “meios”, ou seja $(\frac{b}{c}.y - b)$ por $"a"$ ele obteve: $\frac{ab}{c}y - ab$, que é igual a $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, o resultado da multiplicação dos “extremos” da proporção. A equação que ele encontrou foi:

$$\frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}y^2 - by \Leftrightarrow \frac{b}{c}y^2 = \frac{ab}{c}y - xy + by - ab$$

$$\Leftrightarrow by^2 = aby - cxy + bcy - abc \Leftrightarrow y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

Por esta equação, Descartes disse que era sabido que a curva EC era de primeiro gênero, pois com efeito, não era outra senão uma hipérbole. Ainda acrescentou que se substituíssemos, no instrumento usado para descrever a curva EC, a linha reta CNK por esta hipérbole encontrada ou por alguma outra linha curva do primeiro gênero, para limitar a peça CNKL, a intersecção desta linha curva com a régua GL descreveria, em vez da hipérbole EC, uma outra curva que seria do segundo gênero .[204] Se CNK fosse um círculo, com centro em L, seria descrita a primeira conchóide dos antigos; se fosse uma parábola, com eixo KB, descrever-se-ia a curva que Descartes citou ser a primeira e a mais simples para a solução do problema de Pappus, quando não são dadas mais do que cinco linhas retas. Mas se em lugar de uma destas linhas curvas de primeiro gênero, fosse uma de segundo gênero que limitasse a peça CNKL, seria obtida a partir dela uma curva de terceiro gênero; ou se fosse uma de terceiro resultaria uma de quarto e assim ao infinito; Descartes acrescentou: “.... como é bem fácil deduzir pelo cálculo”. Tal cálculo não é fácil, é trabalhoso, e é deixado inteiramente a cargo do leitor. Como em outras passagens de *La Géométrie*, Descartes, talvez por ironia

[204] Descartes chamava curvas de primeiro gênero às cônicas e de segundo gênero às de terceiro grau.

ou desafiando o leitor, superestimou o entendimento deste e deixou a seu cargo o "prazer da descoberta". Concluiu afirmando que, de qualquer outro modo que se imaginasse o traçado de uma linha curva, sempre que ela fosse das que ele chamou geométricas, poder-se-ia encontrar invariavelmente uma equação para determinar todos os seus pontos, dessa maneira.

Retomou no Livro II a explicação do problema de Pappus, dada no livro precedente. Ele apresentou a solução deste problema, quando não está proposto para mais do que três ou quatro retas.[205] A ênfase que foi ali colocada mostra o quanto ele estava convencido do seu êxito ao lidar com este problema. Foi em conexão com ele que, perto da metade do Livro I, apareceram coordenadas, de maneira não explícita, em *La Géométrie.*[206] No Livro II, após terminar a solução de tal problema, aparece na seqüência a secção: "Quais são os lugares planos e sólidos, e a maneira de encontrá-los". Ali aparece o importante princípio essencial de que equações indeterminadas em duas variáveis correspondem a lugares geométricos, embora tal princípio não seja enunciado explicitamente, mas sim de modo eventual, no meio da explicação de quais sejam os lugares planos e sólidos: [...] "pois estes lugares [geométricos] não são outra coisa senão o resultado da questão de se encontrar algum ponto, que para estar completamente determinado falta uma condição" [...] "E sempre que isto suceda, se pode chegar a uma equação que contenha duas quantidades desconhecidas..." [207]

É interessante notar aqui a ênfase sobre duas variáveis para um lugar geométrico plano. Boyer [208] comparou o tratamento de Descartes ao efetuado por Fermat, que também usou duas variáveis para um lugar geométrico plano, em contraste ao uso que Apolônio fazia de várias variáveis, sendo que todas, com exceção de uma, eram na verdade variáveis dependentes. Descartes concluiu: "E se a linha que determina o ponto buscado é de grau mais composto que as secções cônicas, pode-se designá-la como um lugar super-sólido [...] Se faltarem duas

---

[205] Ver Descartes, *La Géométrie*, Livro II, pp. 323-334; pp. 59-78.

[206] *Ibid.*, Livro I, p. 310; p. 28.

[207] *Ibid.*, Livro II, pp. 334-335; pp. 78-81.

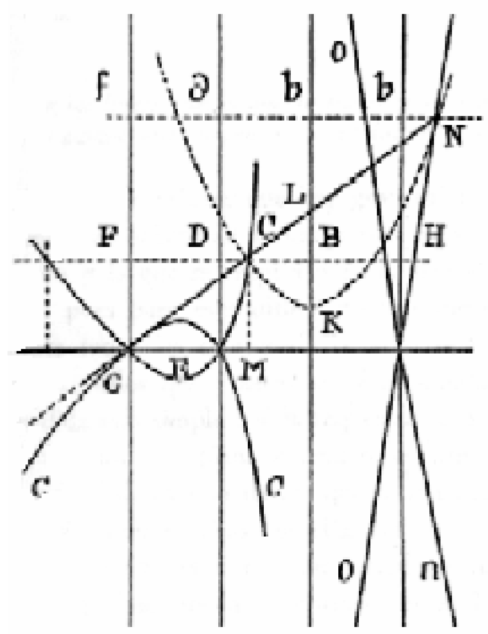
[208] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 87.

condições para a determinação do ponto, o lugar sobre o qual se encontra é uma superfície, a qual pode ser ou plana, ou esférica ou mais composta.” [209]

A resolução do problema de Pappus para cinco retas dadas, é apresentada também no Livro II.[210] O lugar geométrico é uma curva cúbica e seria de se esperar que Descartes levasse em consideração a variedade de formatos destas curvas. Todavia, o que transparece é que seu interesse imediato não foi pela questão do formato de um dado lugar geométrico, mas sim pela possibilidade de sua construção. Para cinco retas, não todas paralelas, ele chamou a atenção para o fato de que o lugar geométrico é elementar (do caso mais simples), significando que, dado um valor para uma das coordenadas de um ponto sobre a curva, o segmento de reta que representa a outra coordenada é construtível apenas por régua e compasso.

Figura 9

***La Géométrie*, p. 331**



[209] Descartes, *La Géométrie*, p. 335, p. 81. Esta é uma pequena e indireta sugestão de uma aplicação da geometria em três dimensões.

[210] *Ibid.*, Livro II, pp. 335-339; pp. 81-89.

Se, por exemplo, quatro das retas são paralelas e distam igualmente entre si a distância "a" e a quinta reta é perpendicular às outras (Figura 9), e a constante de proporcionalidade é tomada como sendo "a", então o lugar geométrico é uma cúbica que Newton chamou de parábola cartesiana (ou tridente)[211], de equação: $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$. Esta curva reaparece várias vezes em *La Géométrie*, mas Descartes em nenhuma passagem deu um esboço completo da mesma.

3.2.2. A Representação de Curvas e os Critérios de Aceitabilidade em Geometria

O interesse de Descartes pelas curvas pode ser resumido a três aspectos:

1. Obter a sua equação, como o fez no problema de Pappus.
2. Mostrar a possibilidade de sua construção por meios cinemáticos, o que ele fez usando vários instrumentos como compassos com esquadros móveis e réguas pivotadas, que giravam em torno de um ponto fixo.
3. Usar a curva, por sua vez, para construir as raízes de equações de graus mais altos.

Fazer os gráficos das curvas da maneira que hoje se costuma fazer, não era parte da geometria de Descartes. O fato de que os lugares geométricos do problema de Pappus não foram esboçados é uma evidência disso. Descartes sabia que uma equação em duas variáveis determina uma curva, como já foi citado. No entanto, ele parece não ter considerado uma tal equação como uma definição adequada da curva, e teve que forçosamente exibir de fato uma construção mecânica em cada caso. Poder-se-ia conjeturar que a importância dada a construções descende dos gregos antigos, para quem estas serviam como teoremas de existência. Descartes teria duvidado da existência de uma curva correspondente a uma equação, a menos que ele pudesse fornecer uma construção cinemática para ela? O fato é que ele, como os gregos antigos, acreditava que um lugar geométrico

[211] Boyer, *History of Analytic Geometry*, pp. 87-88.

tinha que ser legitimado por associação geométrica e cinemática com uma outra curva conhecida. Além disso, ele desejava sistematizar a geometria, generalizando seus resultados, de tal forma que não devia haver nenhuma limitação quanto ao grau ou dimensionalidade de um problema. Descartes não poderia ter feito isto simplesmente admitindo dentro da geometria todas as curvas dadas por equações algébricas. Ele preferiu manter o critério cinemático e acrescentou aos postulados de Euclides uma afirmativa a mais: "Duas ou mais curvas podem se mover uma sobre a outra, determinando através de suas intersecções outras curvas."[212]

Esta afirmativa acarretou uma ruptura claramente delineada com a limitação Platônica dos instrumentos apenas a compassos e réguas. Descartes fez livre uso de réguas pivotadas, com conexões, e de instrumentos mecânicos. O conceito de movimento desempenhou um papel muito proeminente em sua obra. Em certo sentido, Descartes não se tinha libertado da antiga definição cinemática das curvas, tanto que ele admitiu para a geometria somente curvas tais que:

> "... possam ser concebidas como descritas por um movimento contínuo ou por vários movimentos sucessivos, cada um deles sendo completamente determinado por aqueles que o precedem; pois deste modo é sempre possível obter-se um conhecimento exato da sua medida." [213]

Para tornar clara a distinção entre quais eram as linhas curvas que podiam ser admitidas em geometria e quais não podiam, a seguinte passagem é significativa:

> "Também se deve assinalar que há uma grande diferença entre esta maneira [214] de encontrar vários pontos para traçar uma linha curva e a que se emprega para a espiral e

---

[212] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 316; p. 42.

[213] *Ibid.*, Livro II, p. 316; p. 42.

[214] Entenda-se por "esta maneira" o tratamento dado por Descartes.

> suas similares. [215] No último caso, não se acha indiferentemente todos os pontos da curva procurada, mas somente aqueles que podem ser determinados por meio de uma construção mais elementar: [...] [A primeira] maneira de traçar a curva pela determinação de um número de seus pontos tomados aleatoriamente, aplica-se somente às curvas que podem também ser descritas por um movimento regular e contínuo." [216]

Descartes admitiu três tipos de "representação de curvas" ou modos de especificar curvas para torná-las suficientemente conhecidas. O termo "representação de curvas" não se encontra em textos matemáticos da época, nem foi utilizado por Descartes. O termo "construção de curvas" era usado pelos matemáticos de então, e tem quase o mesmo significado, porém mais restrito. Havia muitos modos de especificar curvas. Descartes fazia uso da "construção ponto a ponto", isto é, a indicação da maneira através da qual pontos sobre a curva podiam ser construídos; também se utilizou da descrição de instrumentos através dos quais a curva podia ser traçada por um movimento contínuo ou uma sucessão de vários movimentos, cada um deles determinado pelos precedentes. O terceiro tipo de representação de curvas utilizado por Descartes foi a "construção por cordas" . Tal construção desempenhou um papel em *La Dioptrique*, onde é relatado que os jardineiros a usavam para dar a seus canteiros o formato de uma elipse ou de uma hipérbole.[217] Este tipo de "construção por cordas" será descrito na secção 3.2.4 deste trabalho.

Como já foi citado, Descartes não considerava o fornecimento da equação como sendo uma representação suficiente da curva. Ele se utilizou da equação com outras finalidades. A equação servia para ele como meio de se referir uma curva a uma linha reta, ou seja, às coordenadas, que eram elas próprias segmentos de retas. Por não aceitar a equação como representação da curva, Descartes não podia estabelecer qualquer distinção entre curvas geométricas e não-geométricas

---

[215] Isto é, curvas transcendentes, chamadas de curvas "mecânicas" por Descartes.

[216] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, pp. 339-340; pp. 89-90.

[217] A.T. , vol. VI, p. 166.

baseado em suas equações. Ele devia raciocinar e argumentar baseado nas representações de curvas que ele admitia.

Como já foi citado no Capítulo 2 deste trabalho, Bos [218] expressou a opinião de que há um conflito em *La Géométrie* entre métodos algébricos e geométricos de definição, e critérios de aceitabilidade de curvas na geometria. Este conflito refletiria uma suposta ruptura que poderia ter havido no desenvolvimento das concepções de Descartes sobre geometria. Em sua fase preliminar, Descartes considerou que o propósito da Geometria era construir soluções de problemas geométricos por meio de curvas traçadas por certos instrumentos. Tais instrumentos serviam como generalizações aceitáveis da régua (sem escala) e compasso. Ele trabalhou procurando novas construções efetuadas deste modo e classificando-as. Segundo Bos, por volta de 1630, o plano inicial pareceu estagnar e Descartes teria ficado completamente consciente do poder dos métodos algébricos. Ele teria feito mudanças em seu programa. A álgebra teria se tornado a ferramenta dominante, tanto para a solução de problemas como para a classificação das curvas. Mas Descartes não abandonou o princípio da construção geométrica por meio de curvas possíveis de se traçar por instrumentos. Conseqüentemente, segundo Bos, haveria elementos conflitantes em *La Géométrie*, que seriam inevitáveis. Se Descartes mantivesse seu programa anterior, baseado no uso de instrumentos, perderia as vantagens da álgebra. Se ele adotasse uma abordagem completamente algébrica, talvez não pudesse mais considerar que estivesse fazendo geometria. Possivelmente, o erro que subsiste na abordagem efetuada por Bos tenha sido o de analisar a geometria cartesiana com a lente da matemática contemporânea (ou da chamada ‘geometria analítica’). De fato, Bos se perguntou:

> “Por que Descartes não cortou o nó górdio de modo mais óbvio, isto é, definindo curvas geométricas como aquelas que admitem equações algébricas? Por que ele não estabeleceu simplesmente que todas as tais curvas são meios aceitáveis de construção e que os graus de suas equações determinam sua ordem de simplicidade? Esse

[218] Bos, “On The Representation of Curves in Descartes’ *Géométrie*”, p. 326.

> princípio teria removido as contradições mencionadas acima.” [219]

Esta solução só parece “mais óbvia” e simples de se estabelecer a partir de uma observação posterior aos fatos. Em suas conclusões, Bos deixa entrever novamente esta visão distorcida:

> “A síntese posterior dos métodos algébrico e geométrico dentro do que é agora a chamada geometria analítica foi possível apenas porque os matemáticos posteriores não estavam conscientes (ou se esqueceram) dos problemas programáticos contra os quais Descartes tinha lutado.” [220]

É imprescindível buscar a explicação e compreensão dos elementos que moldaram a estrutura de *La Géométrie* sem nos apartarmos do contexto em que ela foi escrita. Muitas vezes é necessária a destruição da imagem de um pensamento coerente a qualquer custo, no qual cada parte devesse se encaixar precisamente. Às vezes, o importante é como as partes se desencaixam, como se trabalha com esforço através de ensaios e muitos erros.

3.2.2.1. O Critério Instrumental e a Exclusão da Quadratriz

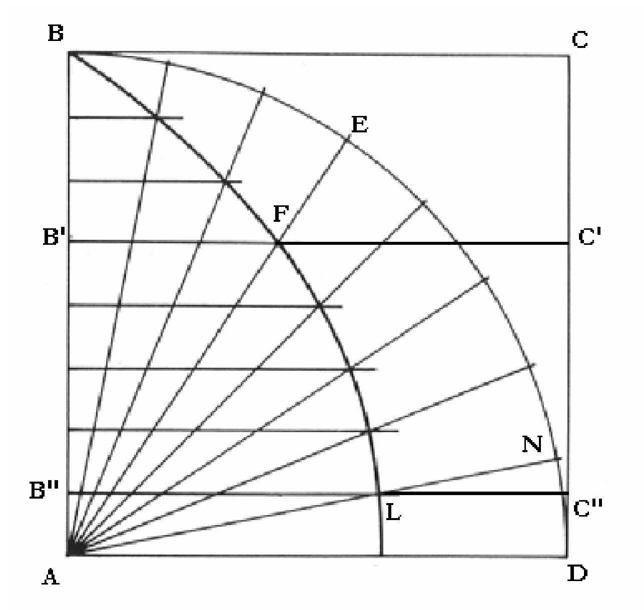
O critério instrumental empregado por Descartes para determinar quais curvas seriam propriamente geométricas e quais não o seriam, consiste basicamente em que uma curva propriamente geométrica pode ser construída como uma linha contínua, através da manipulação das “hastes” de seu compasso mesolábio. A concepção desse critério retrocede a 1619. Tal critério excluía as construções “em pontos” como a da quadratriz e a da espiral de Arquimedes.

---

[219] Bos, “On the Representation of Curves in Descartes’ *Géométrie*”, p. 326.

[220] *Ibid.*, p. 298.

Figura 10



Consideraremos o exemplo da quadratriz, cuja construção requer dois movimentos independentes, como está representado na figura 10. A explicação padronizada dessa construção [221] consiste em supor um quadrado ABCD e, em seguida, um quadrante BED, de um círculo com centro em A (conforme a Figura 10). A quadratriz é construída por dois movimentos simultâneos: o movimento uniforme do segmento BC, de BC para AD (sempre permanecendo paralelo a BC), e a revolução uniforme do raio AE, de AB para AD. Ao se deslocarem para AD, onde chegam no mesmo instante, AE e BC determinarão, através de suas intersecções, um domínio de pontos, tais como F ou L, e o lugar geométrico desses pontos é a quadratriz.

Portanto, a quadratriz é traçada pelas intersecções de um segmento de reta horizontal (BC), que se move uniformemente para baixo, de modo que seu movimento se complete no mesmo instante que a rotação uniforme do raio AE ao longo de um quadrante de círculo.

O problema dessa construção é que teríamos de conhecer a razão exata da velocidade de BC para a de AE, para ajustarmos a velocidade da linha BC à velocidade do raio AE. Isto não pode ser feito, a menos que saibamos a razão do raio do círculo para o arco de um quarto da circunferência. Uma vez que

[221] Segundo o resumo de W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, pp. 46-47.

a razão é função da circunferência para o raio, isto é, $2\pi r$, e π não pode ser expresso como um número inteiro ou uma fração exata de um número, a razão exata de BC para AE não pode ser determinada. [222] Podemos buscar aproximações cada vez maiores da quadratriz, através da bissecção contínua dos arcos, mas não dispomos de nenhum método que resulte em uma curva exata, mas sim apenas em uma seqüência de pontos.

Shea [223] descreveu a seguinte construção, que faz uso das bissecções contínuas: com um compasso comum, podemos subdividir o arco AC em 2, 4, 8, 16 partes, e com uma régua dividimos o raio AO no mesmo número de partes, conforme a figura 11. Então desenhamos raios, tais como OB, OE e OF, aos pontos de divisão sobre o arco AC. Traçamos as horizontais a partir dos pontos correspondentes K, L, M, no raio AO.

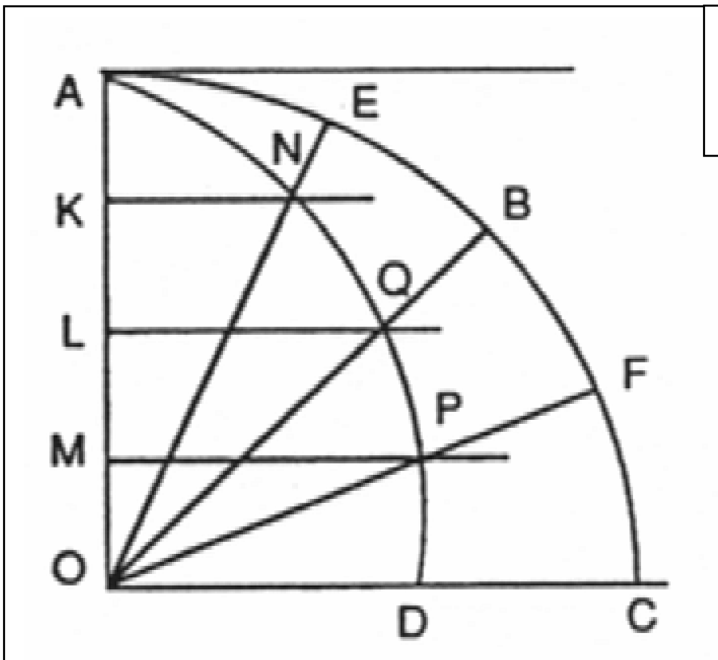


Figura 11

Shea. *The Magic of Numbers and Motion*, p.

Os pontos de intersecção das linhas horizontais com os respectivos raios, tais como N, Q, P, estão sobre a quadratriz. Deste modo pode-se construir geometricamente os pontos sobre a quadratriz que estejam tão perto um do outro quanto se deseje. Se continuarmos bisseccionando o ângulo POD, depois a sua

---

[222] Descartes não conhecia os métodos de retificação de curvas algébricas, que só vieram a ser desenvolvidos por volta de meados do século XVII.

[223] Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 47.

metade na direção de OC, e assim por diante, podemos nos aproximar da posição de D o quanto desejarmos.

Este processo é equivalente à aproximação no cálculo de π e não produz resultado mais exato ou mais preciso que este cálculo. É provável que não tenha impressionado Descartes, pois ele não aceitava isto como uma construção geométrica legítima. No entanto, a sua própria solução do problema de Pappus no caso das quatro retas foi uma construção pontilhada. Como Descartes justificou, então, a exclusão da quadratriz das curvas geométricas legítimas? Na página 317 do Livro II Descartes fez a distinção entre a sua construção, geometricamente legítima, de um lugar geométrico, e a construção geometricamente ilegítima de uma quadratriz. Ele declarou que só podemos aceitar construções ponto a ponto nas quais todos os pontos, em princípio, possam ser construídos, como no caso da conchóide.

3.2.2.2. Construção Geométrica da Conchóide

A propriedade fundamental da Conchóide é que os segmentos RQ e R’Q’, medidos sobre os raios-vetores CQ e CQ’, têm o mesmo comprimento, conforme ilustrado na figura 12.

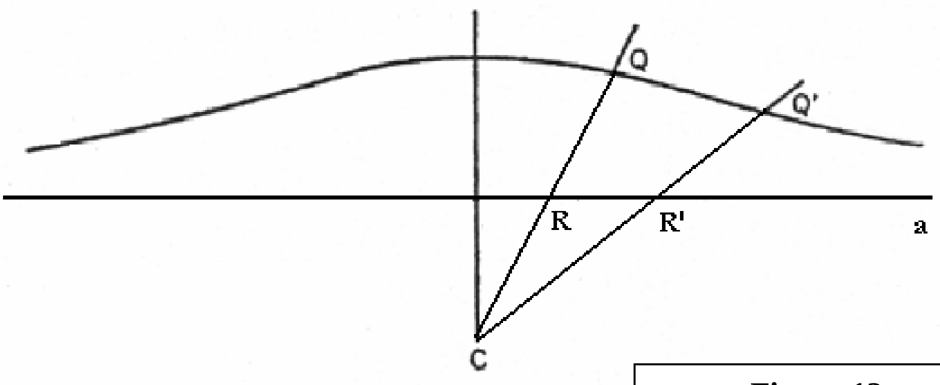


Figura 12
Shea. *The Magic of Numbers and Motion,* p. 63.

Uma possível construção [224] consiste em escolhermos qualquer ponto R sobre a linha reta a e traçarmos CR, prolongando até Q. RQ é a dada

[224] Exposta por W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, p. 63.

constante. Escolhemos indiferentemente qualquer outro ponto R’ e repetimos a mesma operação, fazendo R’Q’ = RQ. Esta operação pode, em princípio, ser reiterada um número infinito de vezes, permitindo que sejam achados todos os pontos sobre a curva. Isto foi considerado suficiente para Descartes estabelecer uma correspondência entre construção ponto a ponto, pela escolha indiferente de qualquer ponto e o traçado por movimento contínuo. Descartes estabeleceu a admissibilidade deste tipo de construção em geometria, declarando:

> “E porque este modo de traçar uma linha curva tomando-se muitos de seus pontos ao acaso [indiferentemente] é aplicável somente a curvas que podem também ser descritas por um movimento contínuo e regular, nós não devemos exclui-lo inteiramente da geometria.” [225]

Ele não exibiu nenhuma prova que assegurasse a veracidade desta afirmação, sendo esta simplesmente uma conjectura, um tanto ousada. No caso da construção de uma conchóide podemos escolher indiferentemente os pontos a serem construídos, ao passo que na quadratriz não podemos fazê-lo, uma vez que os pontos são determinados pela bissecção reiterada do arco. O ponto a ser construído na quadratriz só pode estar onde se faz a bissecção. A escolha, portanto, seria privilegiada, e não indiferente. Por que essa diferença haveria de ser tão significativa? Ela parece arbitrária. Descartes justificou a sua posição afirmando que geométrico é o que é “preciso e exato”. Seguiu justificando que:

> “Não se deve excluir as linhas mais compostas das mais simples, já que se pode imaginá-las sendo descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se seguem um ao outro, e dos quais os que vêm a seguir são inteiramente determinados por aqueles que os precedem, pois deste

[225] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 340- p. 90.

> modo um conhecimento exato da sua medida é sempre possível obter-se.” [226]

Entende-se, a partir desta afirmativa, que a quadratriz foi excluída por ser gerada por dois movimentos independentes e por Descartes não estar familiarizado com os processos de retificação de curvas, que ainda não eram conhecidos. Alguns autores, como Gaukroger ,[227] explicam essa exclusão da quadratriz através do contexto que a produziu: ele supõe que Descartes enfrentava uma situação de incompatibilidade entre os seus critérios algébrico e instrumental para a admissibilidade de curvas e estaria tentando a todo custo satisfazer a ambos.

3.2.3. Método do Traçado de Normais e de Tangentes às Curvas

Trataremos agora do tópico que Descartes julgou ser bastante relevante em geometria e que é uma das contribuições importantes em *La Géométrie*. Descartes afirmou que “para encontrar todas as propriedades das linhas curvas basta saber a relação que têm todos os seus pontos com os das linhas retas, e a maneira de traçar outras linhas que as interceptem em todos esses pontos em ângulo retos.”[228] A seguir, entusiasmou-se e declarou: “e me atrevo a dizer que este é o problema mais útil e mais geral, não somente que eu conheça, mas também que eu jamais tenha desejado conhecer em geometria."[229] O problema a que ele se referiu era o da determinação da normal a uma curva dada.

Em uma forma algo simplificada, o método de Descartes é como segue, na notação atual. Seja dada a equação da curva ACQ (figura 13) em relação ao ponto A como origem e a reta AG como eixo. Sejam as coordenadas retangulares de C, $AM = y$ e $CM = x$, e seja CP a desejada reta normal à curva em C. Tal reta CP intercepta o eixo no ponto P, onde $AP = v$ e $CP = s$. Então pelo teorema de Pitágoras temos, em notação atual:

---

[226] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 316; p. 42.

[227] Gaukroger, *Descartes: Uma Biografia Intelectual*, p. 272.

[228] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 341; p. 93.

[229] *Ibid.*, p. 342; p. 94.

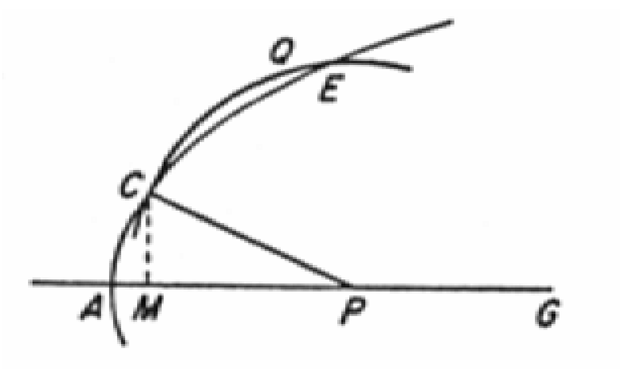


Figura 13
Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 94.

$$\overline{PC}^2 = s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2 \Leftrightarrow (v - y)^2 = s^2 - x^2 \Leftrightarrow y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

Portanto chegamos às equações

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2} \text{ e } x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

A equação da circunferência com centro P e contendo o ponto C é $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Eliminando x ou y em ambas as equações, da curva e da circunferência, obtém-se uma equação em uma incógnita ou "quantidade indeterminada", x ou y, e a quantidade v. Se a circunferência é secante à curva em dois pontos C e E, a equação final acima terá duas raízes diferentes. Mas "quanto mais juntos os pontos C e E são tomados, menor a diferença que há entre as raízes; e quando os pontos C e E coincidem, as raízes são exatamente iguais, isto é, a circunferência por C tangenciará a curva CE no ponto C, sem seccioná-la." [230] Isto significa, em terminologia moderna, que se acha o valor de "v" fazendo o discriminante da equação igual a zero, e "v" então determina a reta normal PC, e portanto também a reta tangente.

Descartes, a seguir, aplicou com muito trabalho o seu complicado método à elipse de equação $x^2 = ry - (\frac{r}{q}).y^2$, obtendo finalmente uma equação elaborada para "v", em termos de quantidades conhecidas. Em vista das complicações algébricas envolvidas, não é uma realidade prática o que ele declarou ao final: "eu

[230] Descartes, *La Géométrie*, p. 346-7; pp: 102-105.

não vejo nada que impeça que se estenda este problema, da mesma forma, a todas as linhas curvas que apareçam em qualquer cálculo geométrico.” [231]

Boyer [232] afirmou que esse método das tangentes de Descartes foi o primeiro método tão geral a aparecer impresso, isto é, a primeira antecipação da idéia de uma tangente como a posição limite de uma secante. Fermat, nessa época, já havia concebido seu método linear, que era mais simples, para determinação da tangente a uma curva, que não havia sido publicado. Estava, portanto, em condição de criticar o método circular muito mais complicado de Descartes. Houve uma polêmica com uma desnecessária troca de desafios e críticas, mas que provocou interesse e pode ter servido para popularizar o uso dos métodos analíticos.

O estudo da tangência levou Descartes a incluir, logo em seguida, uma longa secção devotada às ovais, também chamadas ovais “de Descartes”, e ao seu uso na óptica. Elas serviram para relacionar *La Géométrie* com *La Dioptrique*, um dos outros ensaios que acompanharam o *Discours de la Méthode*. [233]

3.2.4. As Ovais de Descartes

No Livro II de *La Géométrie*, Descartes ainda admitiu um terceiro tipo de representação das curvas, as “construções de corda”. Foram incluídas entre os “movimentos regulares e contínuos” que são admissíveis em geometria e Descartes exemplificou-as com a construção “do jardineiro” para a elipse e a hipérbole, determinadas cinematicamente. Ele afirmou que :

> ”Não se deve excluir [da geometria] o método em que se emprega um fio, ou uma corda, para determinar a igualdade ou a diferença de dois ou mais segmentos de reta que possam ser traçados de cada ponto da curva procurada a certos pontos ou sobre certas linhas, com

[231] Descartes, *La Géométrie*, p. 350; p. 110.

[232] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 95.

[233] *Loc. cit.*

> certos ângulos, como fizemos em *La Dioptrique* para explicar a elipse e a hipérbole. "[234]

As ovais de Descartes, por sua vez, foram tratadas exclusivamente como lugares geométricos, e as equações destas curvas não foram dadas na forma analítica. Isto mostra a ênfase de Descartes sobre os lugares geométricos, pois ele fez um grande esforço para descrever os modos pelos quais elas podiam ser geradas e usadas, mas em nenhuma parte ele forneceu a sua forma analítica em termos de equações. Ele não incluiria lugares geométricos baseados em comprimentos de linhas curvas, pela razão "de que a proporção que há entre as retas e as curvas não é conhecida, nem creio que possa sê-lo pelos homens, não poderia produzir-se disso nada que fosse exato e seguro. Todavia, desde que nestas construções são usados barbantes somente para determinar linhas retas cujos comprimentos são exatamente conhecidos, não há razão nenhuma para rejeitá-las." [235]

A crença em que proporções entre linhas retas e linhas curvas não podiam ser determinadas exatamente permaneceu essencial na separação cartesiana entre curvas geométricas e não-geométricas. Este ponto de vista era profundamente arraigado na prática da matemática daquela época e retrocede a Aristóteles. Descartes, involuntariamente, teria se colocado entre os partidários de idéias aristotélicas. [236] As retificações de curvas algébricas foram introduzidas independentemente por Fermat, Neil e Van Heuraet. [237]

Em *La Dioptrique* , Descartes forneceu uma ilustração de como construir uma elipse. Duas pontas da corda BHI são amarradas e passadas em torno das estacas H e I. A corda é esticada por um pino designado por B, que se desloca em torno de H e I, mantendo-se a corda esticada. O resultado é uma elipse com focos H e I. Descartes usou os termos "*points brulants*" no lugar de focos. O nome vem da propriedade de que colocando-se uma fonte luminosa em um dos focos de um

---

[234] Descartes, *La Géométrie*, p. 340; p. 90.

[235] *Ibid.*, pp. 340-341; pp. 90-93.

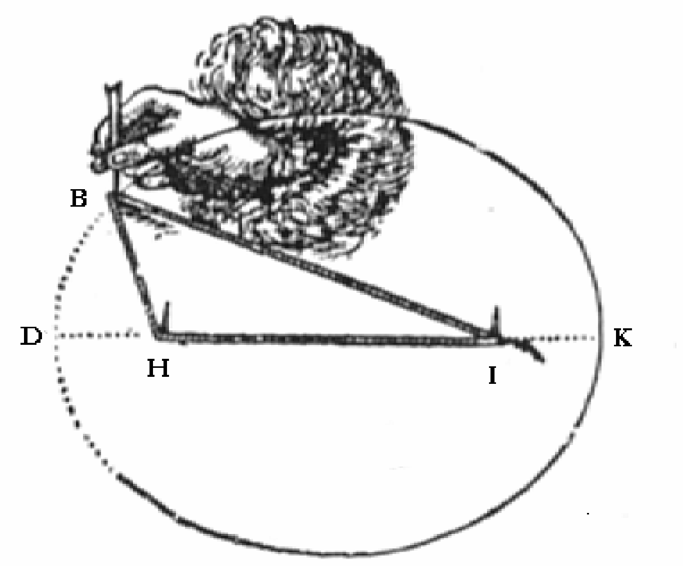
[236] Ver Thomas Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, Clarendon, 1949, pp. 140-142.

[237] M. E. Baron, *The Origins of Infinitesimal Calculus,* Oxford, Pergamon Press, 1969, pp. 223-228.

espelho elíptico, a luz se concentra no outro foco. As construções de corda são eminentemente instrumentais, e não algébricas, e introduzem uma proporção que era essencialmente incognoscível entre as retas e as curvas. Portanto, Descartes não admitiria que fossem geometricamente apropriadas. Sendo assim, por que se incomodou em mencioná-las? Apesar de todas as suas deficiências, pois era “muito rústica” e não muito acurada, a construção de corda torna a natureza da elipse “mais compreensível do que a secção de um cone ou de um cilindro” [238]

Figura 14

La Dioptrique
A.T., vol. VI, p. 160



Descartes deve ter defendido tal construção por sua clareza e distinção, baseado em sua doutrina das idéias claras e distintas. Ele pode ter sido motivado a defender tal critério claramente instrumental pela necessidade de legitimar a construção em termos do que poder-se-ia chamar “clareza pictórica”.

Descartes tratou de ilustrar a relevância de sua matemática para a óptica. As ovais que ele introduziu têm a propriedade de convergir raios de luz, por refração, sobre um ponto dado, e são de genuíno interesse na óptica física, mas Descartes não deu nenhuma indicação de como elas podiam ser construídas por um “movimento contínuo e regular”. Segundo Shea, quando Descartes escreveu *La Dioptrique*, por volta de 1632, ele não reconhecia construções com barbantes

[238] Descartes, *La Dioptrique*, A. T., vol. VI, p. 166.

como sendo genuinamente representações geométricas de curvas. [239] Na época em que ele escreveu *La Géométrie*, quatro anos mais tarde, passou a considerar algumas construções com barbante, como fazendo parte da mesma família que as construções feitas com instrumentos como o seu compasso. O que pode ter encorajado Descartes a dar a sua concordância formal às construções com barbante, que em *La Dioptrique* apareciam como meras ilustrações, pode ter sido o fato de que elas podiam ser usadas em lugar das construções ponto a ponto para representar suas ovais.

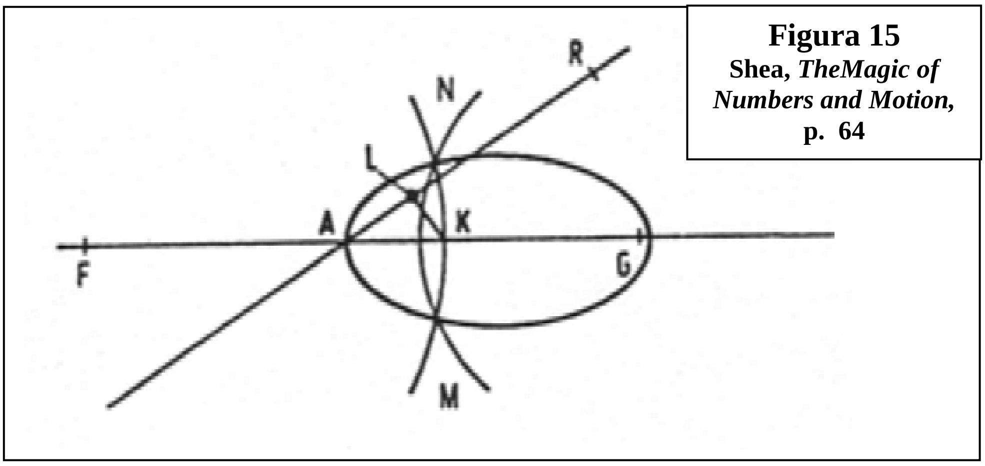


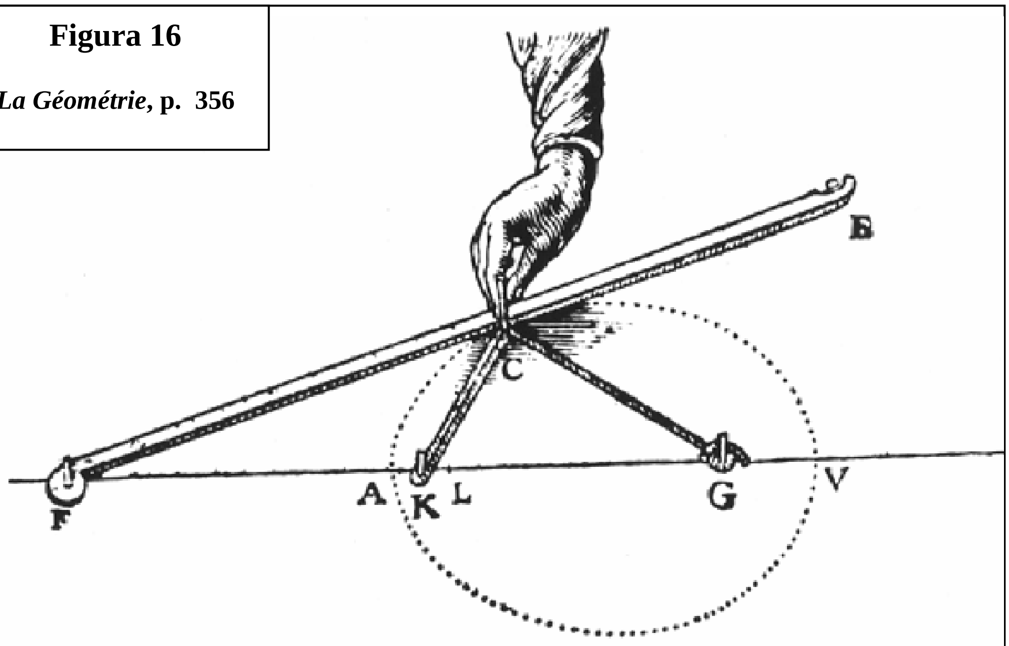
Figura 15
Shea, *TheMagic of Numbers and Motion*, p. 64

A primeira oval é descrita na página 352 de *La Géométrie* e pode ser resumida como se segue: duas retas se interceptam sob um ângulo dado em A (Figura 15). Tomemos o ponto F, arbitrário, isto é, mais ou menos afastado do ponto A, conforme se deseje fazer a oval maior ou menor. Desde o ponto F como centro, descrevemos um círculo que passe mais além do ponto A, isto é, com raio FK, sendo K um ponto arbitrário sobre AG. Deste ponto K, tracemos a perpendicular a AR, ou seja KL, sendo L tal que AL é menor que AK em uma dada proporção qualquer, ou segundo a que mede as refrações, caso se queira aplicar à dióptrica. Depois disso, tomamos o ponto G arbitrário na reta AF do lado em que está o ponto K, isto é, fazendo com que AF e AG tenham entre si uma dada proporção. Fazemos, então, AR=AG, sobre a reta AL, e com o centro G, descrevemos um círculo cujo raio seja igual a RL. Este círculo interceptará o outro círculo de raio FK e centro F em dois pontos N e M, que são pontos sobre a oval. Repetindo a construção a partir de outros pontos K sobre AG, muitos pontos da oval podem ser arbitrariamente encontrados.

[239] W. Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, p. 64.

Figura 16

***La Géométrie*, p. 356**



Esta mesma oval é traçada pela construção por barbante.[240] Suponhamos AF= AG e tomemos o ponto L sobre FG tal que FL está para LG em uma razão dada, isto é, que elas tenham a proporção que mede as refrações. Dividindo-se AL em duas partes iguais pelo ponto K, se faz girar uma régua como FE, pivotada em F, ao redor do ponto F, estirando com o pino C a corda EC que, estando fixada no extremo dessa régua em E, se estende de C até K, de K por sua vez de volta a C e de C até G, onde é firmemente fixada a outra ponta da corda. O barbante é, portanto, mantido esticado ao longo do trajeto E-C-K-C-G e à medida que a régua gira em torno de F, o pino traçador C desenha a oval.

A Lei de Refração da óptica é uma das mais simples e mais básicas, mas passou despercebida a muitos antes de Descartes. Ela pode ser estabelecida como segue: quando um raio de luz passa de um meio físico para outro, o seno do ângulo de incidência está em uma razão constante para o seno do ângulo de refração. Esta razão, isto é, $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$ é chamada de índice de refração de um meio para o outro, e também é conhecida como lei dos senos. Por exemplo, no caso de um raio que passa do ar para a água é 4/3.

---

[240] Descartes, *La Géométrie*, p. 356; p. 122.

Descartes descobriu esta lei antes de retornar à Holanda, no outono de 1628, provavelmente durante sua estada em Paris entre 1625 e 1628. Ele nunca forneceu um relato autobiográfico do caminho pelo qual chegou a essa descoberta. Após a sua morte, foram levantadas suspeitas sobre a sua originalidade. [241]

Uma vez que descobriu a lei dos senos, ou da refração, Descartes quis usá-la para construir lentes que trouxessem todos os raios paralelos incidentes para um foco, que Descartes chamou ponto radiante. Em *La Dioptrique*[242] e em *La Géométrie,* [243] ele expôs as propriedades das ovais, com respeito às reflexões e às refrações. (ver a figura 17)

Descartes já havia explicado anteriormente, em *La Géométrie,* o método de traçado de normais e de tangentes às curvas. Ele usou aqui estes conceitos e pelo ponto B traçou duas linhas retas, LBG e CBE, que se interceptam em B formando ângulo reto e uma das quais, LG, divide o ângulo HBI em duas partes iguais. A outra, CE, tangenciará a elipse no ponto B. Isto significa que LBG é a normal e CBE a tangente à elipse, no ponto B. O raio paralelo AB incide em B e é refratado para o foco I. Descartes traçou desse ponto B, fora da elipse, a linha reta BA paralela ao diâmetro maior DK e tomou-a de comprimento igual a BI. Traçou desde os pontos A e I duas perpendiculares a LG, que são AL e IG. Essas duas guardam entre si a mesma proporção que têm DK e HI. De maneira que se a linha AB fosse um raio de luz e se esta elipse DBK fosse a superfície de um corpo transparente, todo sólido, os raios passariam por ele mais facilmente do que pelo ar, na mesma proporção que a linha DK é maior que HI. Esse raio AB seria desviado de tal modo, no ponto B, pela superfície desse corpo transparente, que ele iria dali até I. E desde que o ponto B foi tomado qualquer sobre a elipse, tudo o que se disse do raio AB deve valer em geral para todos os raios paralelos ao eixo DK que incidirem sobre qualquer ponto desta elipse, a saber, que eles serão todos de tal modo desviados que se dirigirão ao ponto I.

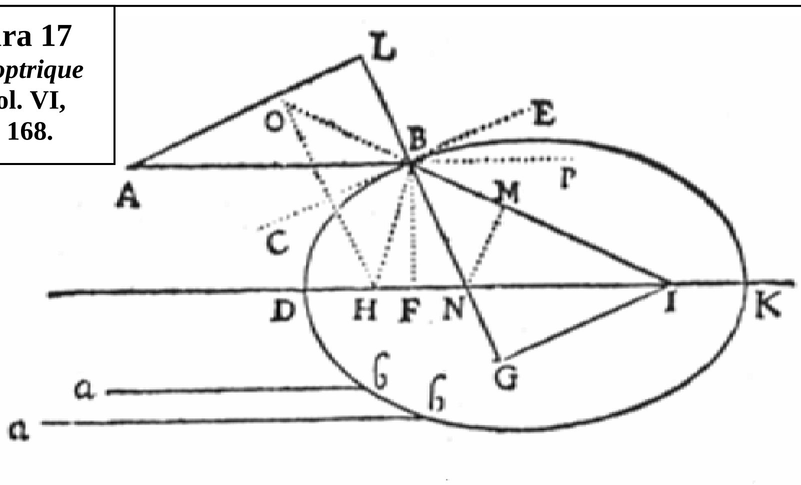
---

[241] Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes,* p. 149.

[242] Descartes, *La Dioptrique,* Discurso VIII, A.T., vol. VI, pp. 168-172.

[243] *Id.*, *La Géométrie,* Livro II, pp. 357-363; pp. 125-137.

Figura 17
La Dioptrique
A.T., vol. VI, p. 168.



Isto se demonstra deste modo: primeiramente, porque as linhas AB e NI, assim como AL e GI são paralelas entre si, os triângulos ALB e IGN são semelhantes. Segue-se que AL está para IG assim como AB está para NI, ou seja, como AB e BI são iguais, AL está para IG assim como BI está para NI. Então, se traçarmos HO paralela a NB e prolongarmos IB até O, veremos que BI está para NI assim como OI está para HI. Isto ocorre porque os triângulos BNI e OHI são semelhantes. Enfim, os dois ângulos HBG e GBI são iguais por construção. HOB é igual a BGI e também igual a OHB, pois este é igual a HBG. Por conseguinte, o triângulo HBO é isósceles e o segmento OB sendo igual a HB, a linha total IO = OB + IB é igual a DK, visto que HB + IB = DK. Assim temos: $\frac{AL}{IG} = \frac{BI}{NI}$ e $\frac{BI}{NI} = \frac{OI}{HI}$ e $OI = DK$, logo $\frac{AL}{IG} = \frac{DK}{HI}$ ou $\frac{\text{sen}\,ABL}{\text{sen}\,GBI} = \frac{DK}{HI}$, ou seja:

$$\boxed{\frac{\text{sen(i)}}{\text{sen(r)}} = \frac{\text{comprimento do eixo maior}}{\text{distância focal HI}}}$$

Desta maneira, se para traçar a elipse DBK forem dadas as medidas de DK e HI, teremos a proporção que, por experiência é aquela que serve para medir a refração de todos os raios que passam obliquamente do ar a um vidro ou outra matéria transparente que se queira empregar. Se for fabricado desse vidro um corpo que tenha a figura que descreveria a elipse se ela se movesse circularmente ao redor do eixo DK, os raios que estariam no ar paralelos a este eixo, como AB, entrando nesse vidro se desviariam, de tal maneira que eles iriam todos juntar-se no ponto radiante I (foco I), que dos dois, H e I, é o mais distante do lugar de onde vêm os raios.

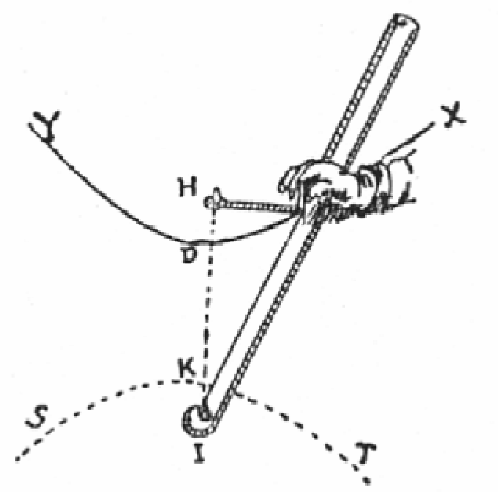


Figura 18

La Dioptrique
A.T., vol. VI, p. 176.

Assim Descartes explicou como uma lente elíptica traria todos os raios paralelos incidentes para um foco I, se ela fosse construída de tal maneira. Ele tratou do traçado de uma hipérbole pela construção de cordões e usou uma lente hiperbólica para chegar ao mesmo resultado da elíptica. Ele declarou que “a hipérbole é também uma linha curva que os matemáticos explicam pela secção de um cone, como a elipse. Mas a fim de concebê-la melhor, introduzirei também aqui um jardineiro que deve traçar o contorno de certo canteiro. Ele crava igualmente suas duas estacas nos pontos H e I; depois de amarrar ao extremo de uma longa régua o extremo de uma corda um pouco mais curta que a régua, faz um furo redondo no outro extremo desta régua, no qual faz entrar a estaca I. Faz um laço no outro extremo desta corda, que ele passa pela estaca H. Logo, pondo o dedo no ponto X em que a corda e a régua fiquem juntas uma da outra, ele o move dali para baixo até D, mas tendo sempre a corda bem junta e esticada contra a régua, desde o ponto X até o lugar em que for, com a corda bem estendida. Obrigando esta régua a girar ao redor da estaca I à medida que baixa seu dedo, descreve sobre a terra a linha curva XBD, que é uma parte da hipérbole. Depois disto, fazendo girar a régua do outro lado, até Y, descreve do mesmo modo a outra parte YD. Em seguida, se passar o laço da corda pela estaca I, e o extremo da régua for fixado pela estaca H, descreverá o outro ramo da hipérbole, SKT, semelhante e oposto ao precedente".[244]

Resumindo, diríamos que são fixadas estacas em H e I, que seriam os focos. Uma régua é pivotada em I, um barbante ligeiramente mais curto que a régua é amarrado com um laço em H e fixado firmemente no outro extremo da régua. O barbante é puxado por um pino traçador B, que é mantido pressionado contra a régua. Quando a régua é girada em torno de I, com B mantido justaposto à régua e HB é esticado, B descreve um ramo de uma hipérbole com focos H e I.

Descartes ainda acrescentou que, sem mudar as estacas nem a régua, se nós tomarmos o cordão um pouco mais longo, se descreverá uma hipérbole de outra espécie, e se tomarmos ainda um pouco mais longo, se descreverá outra, de outra espécie, até que chegando a tomar o cordão tão longo quanto a régua, se descreverá, em vez de uma hipérbole, uma linha reta. Também caso se mude a distância entre as estacas na mesma proporção existente entre os comprimentos da régua e da corda, se descreverão hipérboles que serão todas da mesma espécie, mas cujas partes semelhantes serão de tamanhos diferentes. Enfim, se aumentarmos os comprimentos da corda e da régua, sem mudar nem sua diferença, nem a distância entre as estacas, se descreverá sempre uma mesma hipérbole, mas com maior extensão.

Para a demonstração da lei da refração, no caso da lente hiperbólica, pelo ponto B, tomado arbitrariamente em uma hipérbole, é traçada a linha reta CE, que divide o ângulo HBI em duas partes iguais (ver figura 19). A mesma linha CE é a tangente à hipérbole no ponto B, que Descartes disse que "tocará essa hipérbole nesse ponto B sem cortá-la: e a demonstração a conhecem bem os geômetras". [245]

---

[244] Descartes, *La Dioptrique*, Discurso VIII, A. T., II, p. 176.

[245] *Ibid.*, p. 178.

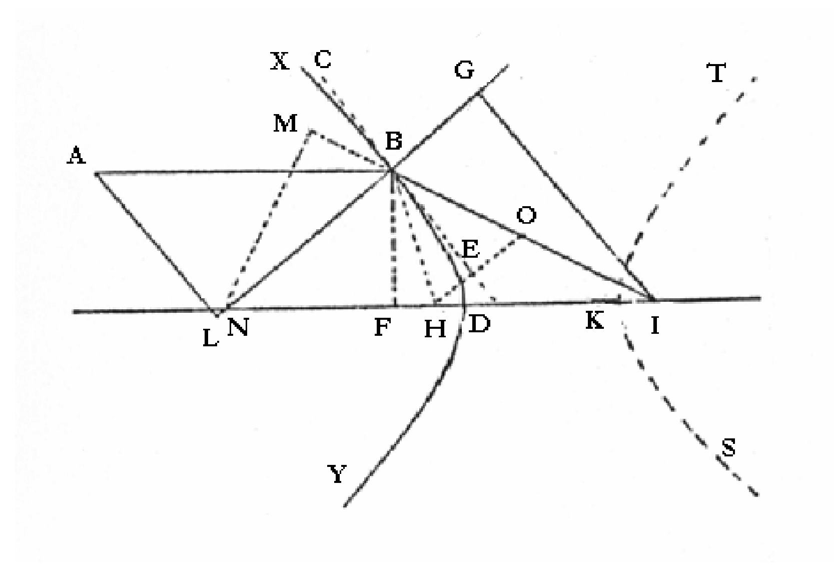


Figura 19
La Dioptrique
A.T., vol. VI, p. 178

Do mesmo ponto B tracemos até o interior da hipérbole a linha reta BA, paralela a DK, e, do mesmo ponto B, a linha LG, que intercepte CE em ângulo reto. Esta linha LG é a normal à hipérbole no ponto B. Tomando-se BA igual a BI e dos pontos A e I baixando-se as perpendiculares AL e IG sobre LG, estas duas últimas AL e IG terão entre elas a mesma proporção que as duas retas DK e HI.

Portanto, o raio AB é refratado em B na direção de I, o foco do segundo ramo da hipérbole. Os passos importantes, depois de bisseccionar o ângulo HBI, envolvem traçar a normal LG, e o segmento HO paralelo a ela. Com meios geométricos simples e usando triângulos semelhantes, é possível mostrar que o triângulo IGB é semelhante ao triângulo NMB, pois os ângulos IBG e NBM são iguais (opostos pelo vértice). Como AB é paralela a NI e AL paralela a GI, os triângulos ALB e IGN são semelhantes. Segue-se que AL está para IG assim como AB está para NI. Já que AB e BI são iguais, temos: AL está para IG assim como BI está para NI. Traçando-se HO paralela a LG, veremos que BI está para NI assim como OI está para HI, porque os triângulos BNI e OHI são semelhantes. Por fim, os ângulos EBH e EBI são iguais por construção, pela bissecção do ângulo HBI. HO, que é paralela a LG, forma como ela ângulo reto com CE. Logo, os dois triângulos BEH e BEO são congruentes. Assim, BH, hipotenusa de BEH é igual a BO, a hipotenusa de BEO. OI é a diferença entre BI e BH, que sabemos ser igual a DK. Portanto, AL está para IG assim como DK está para HI. Segue-se que sen(ABC) está para sen(CBI) assim como DK está para HI, ou seno do ângulo de incidência está para o seno do ângulo de refração assim como DK está para HI.

No restante do Livro II de *La Géométrie,* Descartes mostrou como se pode fazer uma lente tão convexa ou tão côncava em uma de suas faces quanto se queira e que faça convergir para um ponto dado todos os raios que venham de outro ponto dado. Depois se ateve a outro caso, o de como fazer uma lente que tenha o mesmo efeito que a precedente e cuja convexidade de uma de suas faces tenha uma proporção dada com a da outra.

Finalmente, na última secção do Livro II, reaparece a referência a uma geometria em três dimensões. [246] Sob o título "como se pode aplicar o que foi dito aqui das linhas curvas traçadas sobre uma superfície plana, àquelas que se tracem em um espaço que tem três dimensões", Descartes indicou que o que foi tratado sobre curvas planas "pode facilmente ser feito para se aplicar a todas aquelas curvas que podem ser concebidas como sendo geradas pelo movimento regular dos pontos de um corpo no espaço tri-dimensional". [247]

Aqui também, como no espaço bi-dimensional, a ênfase está sobre o ponto de vista cinemático, mais do que sobre equações. O método que Descartes propôs para o estudo das propriedades de uma curva no espaço foi projetá-la sobre dois planos perpendiculares e considerar as duas curvas da projeção. Infelizmente, a única propriedade ilustrativa dada aqui é errônea, pois lê-se que a normal à curva em três dimensões num ponto P, pertencente à curva, é a reta de intersecção dos dois planos passando por P, determinados pelas retas normais às curvas de projeção nos pontos correspondentes a p. Isto poderia ser verdadeiro para a reta tangente à curva em P, mas em geral não é válido para uma normal. Boyer [248] comentou que os matemáticos daquela época não notaram esse erro, inclusive o bastante crítico Roberval. O mesmo erro teria sido repetido quase um século

---

[246] Na p. 335 do mesmo Livro II de *La Géométrie* já havia aparecido uma pequena e indireta sugestão de geometria em três dimensões, pela afirmação: "Se duas condições para a determinação de um ponto não estão presentes, o lugar geométrico do ponto é uma superfície, que pode ser plana ou esférica ou mais complicada".

[247] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 368; p. 146.

[248] Boyer, *History of Analytic Geometry*, pp. 93-94.

depois, pelo comentarista Claude Rabuel, em seu *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*.

Descartes parece que não estava consciente do fato de que para o espaço de mais de duas dimensões uma normal não é univocamente determinada por um ponto sobre uma curva. Aparentemente, passaram despercebidas a ele as dificuldades que crescem em quantidade quando se aumenta o número de graus de liberdade.

3.3. A Simplicidade de Curvas e a Sua Construção. Análise do Livro III.

O propósito principal deste livro é a solução gráfica de equações de grau mais alto do que o segundo, com particular ênfase na cúbica e na quártica. Descartes expôs diversas concepções importantes na teoria das equações – mais especificamente, mostrou como descobrir raízes racionais, como reduzir o grau de uma equação quando se conhece uma raiz, como aumentar ou diminuir as raízes de uma equação, como encontrar a solução algébrica de equações cúbicas e quárticas – além de fornecer uma notação muito mais adequada do que a que era usada até então. Descartes demonstrou uma grande capacidade de fazer abstrações de números e formas geométricas particulares, tal como ele já o expressara nas *Regulae ad Directionem Ingenii*. Quanto aos resultados concretos, Descartes talvez tenha sido otimista demais ao supor que seus métodos fossem capazes de resolver equações de qualquer grau.

Na década de 1670, já estavam sendo levantadas dúvidas quanto à possibilidade de construir a solução de uma equação de quinto grau, ou mesmo de graus superiores, em termos de proporções compostas. [249]

O Livro III se inicia com o pronunciamento:

> "Embora todas as linhas curvas, que possam ser traçadas por algum movimento regular, devam ser admitidas na Geometria, não cabe dizer que esteja permitido servir-se

---

[249] Ver M. S. Mahoney, "Infinitesimals and Transcendent Relations: "The Mathematics of Motion in the Late Seventeenth Century", *in* D. Lindeberg & R. Westman, orgs., *Reappraisals of the Scientific Revolution*, Cambridge, 1990, p. 465.

> da primeira que se encontre para a construção de cada problema,” [250]

Para solucionar a dificuldade surgida quando as curvas traçadas por seu compasso fossem algebricamente complexas, Descartes estipulou uma exigência de simplicidade. Ele explicou que devemos escolher com cuidado a curva mais simples que possa ser usada na solução de um problema, mas deve-se notar que a mais simples não significa meramente a mais facilmente descrita, nem a que leva à demonstração ou construção mais fácil do problema, mas aquela de classe ou gênero mais simples que possa ser usada para determinar a quantidade procurada.

Fica evidente que simples significa o grau mais baixo possível da equação. Quando sustentou que “não creio que haja nenhum modo de se achar meios proporcionais que seja mais fácil ou cuja demonstração seja mais evidente”, Descartes se referia à aplicação deste critério ao seu compasso, enquanto gerador de curvas. Mas desde que os meios proporcionais podem ser achados com secções cônicas, cujas equações são mais simples do que aquelas das curvas AD, AF ou AH, geradas pelo compasso, Descartes admitiu que “seria um erro geométrico usar tais curvas”, conforme ilustrado na figura 6. [251] Surge assim uma incompatibilidade entre o critério algébrico e o critério instrumental, para a classificação de curvas como geométricas. Se devemos guiar-nos pela simplicidade da equação, isto é, pelo grau mais baixo, como aceitar que o modo mais fácil e de demonstração mais evidente seja o da aplicação do compasso, que gera curvas de grau mais alto e de gênero mais complexo?

Segundo uma tentativa de explicar essa aparente contradição, feita por Shea [252], apesar das equações incorporarem informação sobre as propriedades das curvas, Descartes considerava que elas não forneciam uma representação suficiente de suas realidades geométricas. Nós ainda teríamos que “imaginar vários meios de descrever a curva e escolher os mais fáceis”. Isto se expressa na seguinte passagem de *La Géométrie*:

---

[250] Descartes, *La Géométrie*, p. 370; p. 152.

[251] *Ibid.*, p. 371; p. 157.

[252] Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 59.

> "Se é conhecida a relação entre todos os pontos de uma curva e todos os pontos de uma linha reta do modo como eu já expliquei [isto é, quando a equação é conhecida] é fácil achar a relação entre os pontos da curva e todos os outros pontos e linhas dados; e destas relações achar os diâmetros, eixos, centros e outras linhas [253] ou pontos que têm especial significado para esta curva, e portanto imaginar vários meios de descrever a curva e escolher o mais fácil." [254]

O critério cartesiano de simplicidade de classe da curva a ser escolhida para uma construção é uma conseqüência natural da hierarquia estabelecida para as curvas, que por sua vez é uma extensão da classificação dos antigos para lugares geométricos. Pappus [255] objetou quanto à "inapropriada" solução de problemas planos através do uso de lugares geométricos sólidos e também quanto à solução de problemas sólidos mediante lugares geométricos lineares. Descartes deu continuidade a esta idéia da ordem de complicação apropriada ao problema, mas não a estabeleceu claramente, nem a investigou cuidadosamente. Ele falou do uso de curvas de uma classe desnecessariamente alta como "um erro geométrico", acrescentando que "seria um erro muito estúpido ou desnecessário tentar em vão construir um problema por meio de uma classe de curvas mais simples do que a sua natureza admite". [256] Muito do Livro III, em conseqüência, é devotado ao que agora está contido em obras sobre Álgebra, pois, como Descartes observou, "as regras para evitar ambos estes erros" necessitam de um estudo da "natureza das equações"[257] Começa com uma pseudo-definição de equação:

---

[253] Por exemplo, as equações das tangentes, das normais, etc.

[254] Descartes, *La Géométrie*, Livro II, p. 341; p. 92.

[255] Conforme P. Ver Eecke, *Pappus of Alexandria. La Collection Mathématique* (Livro IV, prop. 30), v. II, p. 208-209.

[256] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 371; p. 157.

[257] *Ibid.*

> "Das somas compostas de vários termos, em parte conhecidos e em parte desconhecidos, e em que uns são iguais aos outros; ou melhor, que considerados em conjunto, são iguais a zero, pois este será freqüentemente o melhor modo de considerá-las." [258]

Regras são fornecidas para combinar, fatorar, transformar e resolver equações, ilustradas por exemplos com coeficientes numéricos específicos. A regra de sinais, chamada usualmente "regra de sinais de Descartes" é publicada aqui [259] na forma geral, para raízes positivas e negativas. [260]

3.3.1. Regra de Sinais de Descartes

Na resolução do problema de Pappus para quatro retas no Livro I, duas equações do grau dado são necessárias para a solução, mas Descartes reconheceu somente uma por causa de inadequações em sua técnica de tratamento das mudanças de sinal. [261] Em cada caso, deveria haver duas equações, de tal modo que no problema das quatro retas o lugar geométrico de C não é uma única secção cônica, mas duas. Este erro não é fundamental a ponto de prejudicar o restante da abordagem de Descartes ao problema. É interessante notar que ele pareceu ter tido alguma possível idéia ou percepção disto por si mesmo, pois ele reconheceu duas curvas em um caso do problema de Pappus para cinco retas dadas.

Uma espécie de "regra de sinais" para se saber quantas raízes "verdadeiras" pode haver em cada equação foi enunciada sem demonstração por Descartes no Livro III de *La Géométrie*.[262] Ela consiste em que "pode-se conhecer quantas raízes verdadeiras pode haver e quantas falsas, em cada equação." A

---

[258] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 371; p. 157.

[259] *Ibid.*, p. 373; p. 161.

[260] Boyer levantou a hipótese de que é provável que a descoberta desta regra tenha sido provocada por Descartes fazer uso de uma prática sistemática de trazer todos os termos de uma equação para o primeiro membro, igualando-o a zero, conforme Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 96.

[261] A esse respeito, ver A . G. Molland, "*Shifting the Foundations: Descartes'Transformation of Ancient Geometry*", *Historia Mathematica* 3: 21-49, 1976, p. 39.

[262] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 373; p. 161.

saber, pode haver tantas raízes verdadeiras quantas vezes os sinais $+$ e $-$ forem trocados nos coeficientes da equação; e tantas falsas quantas vezes se encontrem dois sinais $+$ ou dois sinais $-$ seguidos. Por exemplo, na equação:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

há três mudanças de sinais e uma permanência, logo existem três raízes verdadeiras e uma falsa. Descartes queria dizer que em uma equação como $x^3 - 5x - 2 = 0$, com apenas uma variação de sinais nos coeficientes, pode-se ter, no máximo, uma raiz positiva ("verdadeira"), que no caso é $1+\sqrt{2}$. E em outra equação como $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, com três variações de sinais nos coeficientes, pode haver, no máximo, três raízes positivas. Aqui as raízes são 1, i e –i, onde i é a unidade imaginária, e portanto temos uma raiz real positiva. Descartes não citou a unidade imaginária.

Poderíamos ter, como um enunciado "moderno" da regra de sinais de Descartes, o seguinte: "Se os coeficientes de uma equação são reais e todas as suas raízes são reais, então o número de raízes estritamente positivas (levando-se em conta as suas multiplicidades) é igual ao número de trocas de sinais na seqüência dos seus coeficientes. Se a equação também tem raízes complexas, então o número de trocas nos sinais dos seus coeficientes menos o número de raízes positivas é um número par."

A primeira parte dessa regra (referente a equações com coeficientes e todas as raízes reais) foi importante para Descartes na sua tentativa de resolver a questão da tangência a uma curva algébrica, por um ponto da curva. O enunciado original de Descartes não explicitou, mas deveria estabelecer que o número de raízes "verdadeiras" é igual a, no máximo, o número de trocas de sinais nos coeficientes da equação. A demonstração da regra de sinais "de Descartes" foi feita mais tarde no século XIX por S. Sturm, em 1835, e por J. J. Sylvester (1814-1897), de forma completa, em 1865. [263]

---

[263] Ver A. J. M. Wanderley, "Existência e Unicidade da Raiz Positiva de Equações Algébricas Particulares", *Revista do Professor de Matemática* 44: 27-31, São Paulo, p. 31.

3.3.2. A Construção Geométrica das Raízes de Equações Algébricas

Ainda no Livro III, Descartes retomou o tópico do Livro I – referente à construção das raízes de equações determinadas. Para isso, deve-se saber qual é a natureza das raízes da equação a ser tratada, e em particular, deve-se saber se a equação é redutível ou não. Por isso, o Livro III é praticamente um curso sobre a teoria elementar das equações. Nele encontramos a forma de aumentar ou decrescer as raízes, de se mudar o seu sinal, de multiplicá-las ou dividi-las por uma constante, de remover o segundo termo de uma equação, de testar a solução algébrica de cúbicas e quárticas, para raízes racionais, através de um método abreviado de divisão e até a noção de equação irredutível. Segundo Boyer,[264] a maior parte deste material não era original e Descartes não alegou originalidade. Mesmo assim, ele teria sido acusado de plágio, especialmente em relação a Viète e a Harriot.

Após esta introdução algébrica, Descartes completou o problema que começara a tratar no Livro I, isto é, construiu geometricamente as raízes de equações algébricas. Ele demonstrou afinal que a solução de cúbicas e quárticas, isto é, de "problemas sólidos", podia sempre ser achada "por meio de uma das três secções cônicas, seja qual for, ou mesmo por alguma parte de uma delas, apesar de pequena, sem empregar nada mais que círculos e retas". [265]

Descartes mostrou que equações da forma: $z^3 = \pm pz \pm q$ e $z^4 = \pm pz^2 + qz \pm r$ podiam ser resolvidas para raízes reais através das intersecções de uma parábola com várias retas e círculos. Problemas cujas construções são procuradas por meio desses tipos de equações eram denominados "sólidos". Todos eles podem ser resolvidos (isto é, construídos) por meio de um círculo e de uma parábola. Por exemplo, ele resolveu $z^3 = pz + q$ graficamente como se segue. Traçou a parábola FAG com eixo ADKL e semi parâmetro AC= ½. Tomou CD = p/2 e traçou DE= q/2, perpendicular a AD.

[264] Boyer, *History of Analytic Geometry* pp. 96-97.

[265] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 389; p. 193.

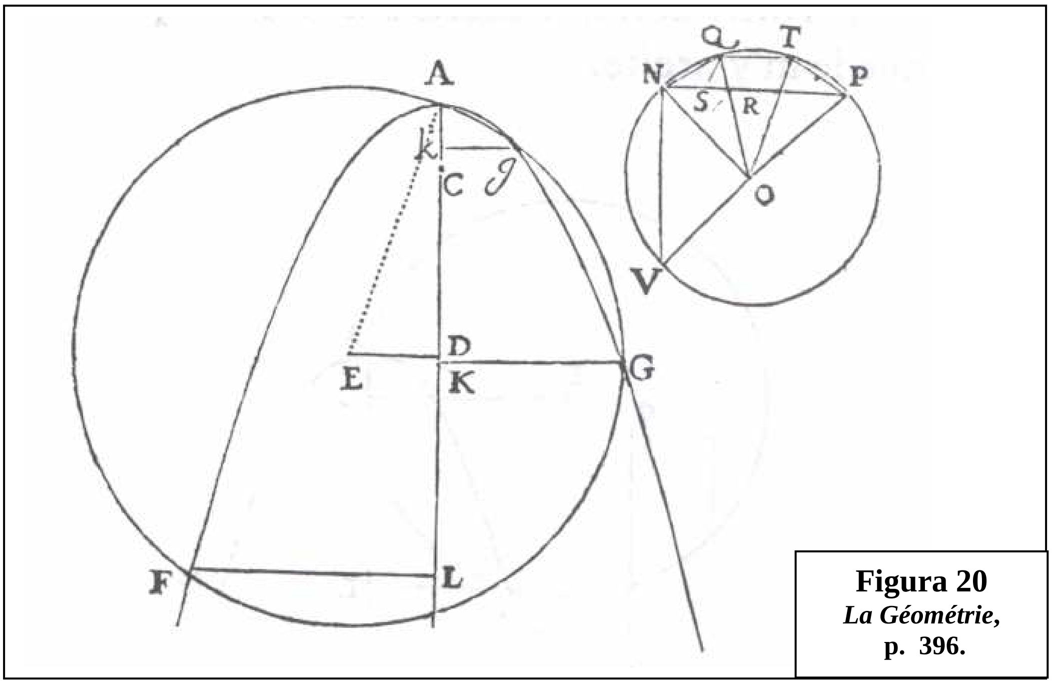


Figura 20
***La Géométrie*, p. 396.**

Com E como centro e com raio AE traçou o círculo FG. Então o ponto de intersecção F à esquerda do eixo forneceu a raiz "verdadeira" (isto é, positiva); qualquer uma do outro lado correspondia a uma raiz "falsa" (isto é, negativa). Em simbolismo moderno, este método consiste em achar as intersecções entre a parábola $x^2 = y$ e o círculo $x^2 + y^2 = qx + (p+1)y$. Com pequenas modificações no procedimento, Descartes aplicou o método a outros casos de cúbicas e quárticas com raízes reais. Ele ficou tão satisfeito com estas soluções através de cônicas que declarou: "pois a natureza das raízes não permite que sejam determinadas por nenhuma construção que seja de um tipo mais geral e mais fácil." [266]

A demonstração de Descartes da validade de seu procedimento para o caso em que $z^4 = pz^2 - qz + r$ é reproduzida aqui na linguagem atual. Seja a parábola FAG traçada com o eixo ACDK. Seja AC= a/2, onde a = *latus rectum.* [267]

Marcamos CD = p/2 sobre o eixo. Traçamos DE=q/2 perpendicular ao eixo. Sobre AE, marcamos AR=r e sobre AE prolongado, tomamos AS=a.

[266] Descartes, *La Géométrie*, p. 401; p. 217.

Desenhamos um círculo com RS como diâmetro. Traçamos AH perpendicular a RS, interceptando o círculo em H. Traçamos um círculo com centro E e raio EH. Fazemos MK=ED. Traçamos EM. A raiz positiva da equação é GK ou “z”, a negativa é FL.

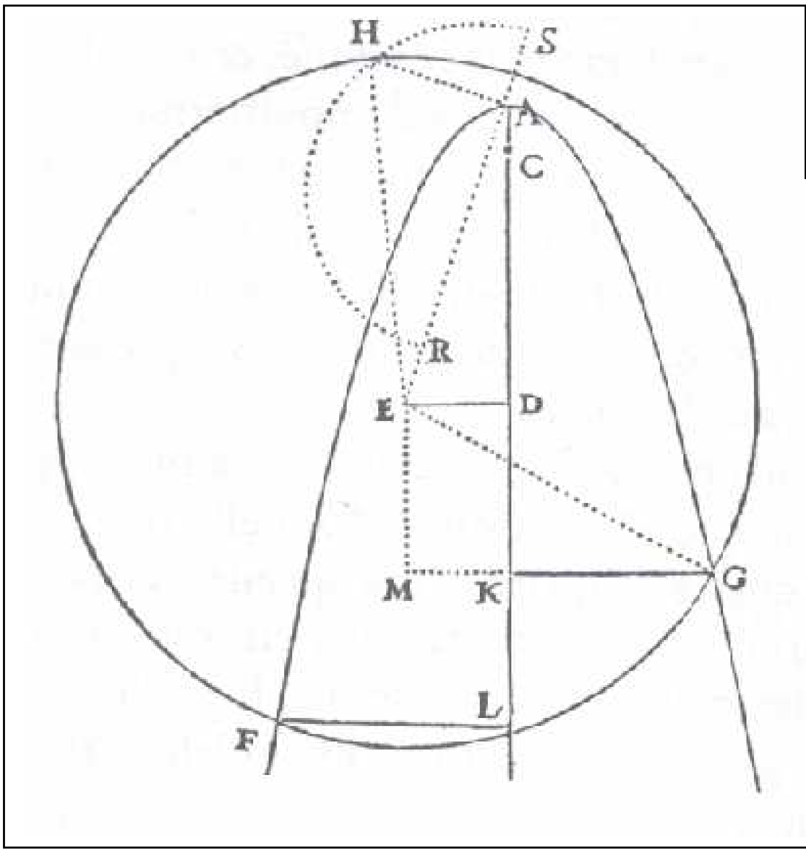


Figura 21

***La Géométrie,* p. 390.**

A verificação, na notação atual, é como segue: sejam GK=z; AK=y e a = *latus rectum*=1. Como $z^2 = ay$ então $z^2 = y$. Temos:

$$DK = AK - AD = z^2 - (AC + CD) =$$

$$= z^2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p) = z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$$

$$(DK)^2 = (EM)^2 = z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

$$DE = KM = \frac{1}{2}q$$

[267] Descartes, *La Géométrie*, p. 394; p. 202.

$$(GM)^2 = (GK + MK)^2 = (z + \frac{1}{2}q)^2 = z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2$$

$$(EG)^2 = (EM)^2 + (GM)^2 = z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

$$(EA)^2 = (AD)^2 + (ED)^2 = (\frac{1}{2}p + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}q^2$$

Como $(AH)^2 = (AR)x(AS)$ de Euclides, Livro VI, prop. 13, e AR=r; AS=1, então $(AH)^2 = r$. Temos: $(EH)^2 = (EA)^2 + (AH)^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$.

Igualando: $(EH)^2 = (EG)^2$ resulta:

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r = z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

logo:

$r = z^4 - pz^2 + qz$ e $z^4 = pz^2 - qz + r$

Quando Descartes comunicou o tratamento desse tipo de problema a Beeckman, em 1628, ele se referiu a isto como “o segredo universal para resolver por curvas geométricas todas as equações do terceiro ou quarto graus”. [268]

Em *La Géométrie*, oito anos mais tarde, Descartes registrou seu êxito de maneira mais comedida:

> “Agora, quando nós estamos certos de que o problema proposto é sólido, se a equação através da qual nós buscamos sua solução é do quarto ou somente do terceiro grau, suas raízes podem sempre ser achadas por uma das três secções cônicas ou mesmo por alguma parte de uma delas, apesar de pequena, usando nada além de linhas retas e círculos. Mas eu me contentarei em dar aqui uma regra geral para achá-las todas por meio de uma parábola, já que esta é, em alguns aspectos, a mais simples.”[269]

[268] *Journal de Beeckman*, A.T., vol. X, p. 344.

[269] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 389-390.

Shea [270] supõe que a mudança de atitude de Descartes quanto à sua descoberta deve ter sido porque ele veio a perceber que outras secções cônicas fariam tão bem o papel de realizar essa construção e que para certos problemas elas seriam mais simples e mais práticas do que a parábola. Descartes teria, então, desrespeitado o seu critério de simplicidade, em que ele estipulou que devemos sempre escolher a curva mais simples para construir um problema mais facilmente. Isto está explícito na seguinte passagem:

> "Pelas curvas mais simples, devemos entender não apenas aquelas que são mais fáceis de descrever ou aquelas que fazem a construção ou a demonstração do problema proposto mais fácil, mas principalmente que são do gênero mais simples que pode ser usado para determinar a quantidade que é procurada." [271]

Na mesma página em que está a citação acima, há a figura do compasso cartesiano com esquadros móveis e Descartes estava se referindo à aplicação deste critério de simplicidade ao seu compasso, enquanto um gerador de curvas. Por um lado, Descartes afirmou que:

> "Não há nenhum modo de se achar meios proporcionais que seja mais fácil ou cuja demonstração seja mais evidente. Por outro lado, já que os meios proporcionais podem ser achados com secções cônicas, cujas equações são mais simples do que aquelas das curvas AD, AF ou AH, geradas pela abertura do compasso, Descartes admitiu que seria um erro geométrico usá-las." [272]

Isto parece evidenciar a incompatibilidade ou incoerência entre os critérios instrumental e algébrico de Descartes para a classificação de curvas como

[270] Shea, *The Magic of Numbers and Motion*, p. 57.

[271] Descartes, *La Géométrie*, Livro III, p. 370; p. 154.

[272] *Ibid.*, p. 371; p. 157.

geométricas. Indica também uma inadequação do seu critério de simplicidade para a escolha de uma curva que sirva para uma construção, pois se a simplicidade da construção deve guiar-nos na escolha do nosso método para solucionar um problema, poderíamos seguir a sugestão de Descartes e abrir o compasso com esquadros móveis para gerar uma curva e achar meios proporcionais. Entretanto, ao escolhermos uma das curvas geradas pelo compasso para a construção, estaríamos infringindo o critério cartesiano de simplicidade, já que meios proporcionais podem ser achados por meio de secções cônicas, que são curvas de gênero mais simples do que aquelas. De fato, a classificação de problemas segundo a facilidade e possibilidade de sua construção não coincidia com a classificação das equações correspondentes, segundo sua complexidade ou seus graus.

Como já dissemos no Capítulo 2 deste trabalho, Descartes esforçou-se em manter juntas estas duas exigências, sem abrir mão dos princípios metodológicos e das exigências do seu programa filosófico.

CAPÍTULO 4

Considerações Finais

Retomemos agora, para uma rápida exposição final, cada um dos aspectos que consideramos importantes neste trabalho.

No Capítulo 1, abordamos em primeiro lugar o tipo de formação intelectual recebido por Descartes. A educação jesuítica tinha por objetivo educar cristãos para serem testemunhas do Evangelho no mundo. Por um lado, defendia ortodoxia em matéria de Fé, e por outro, encorajava a liberdade de pensamento na discussão de questões de conhecimento. O ensino, bem como os debates, eram feitos em latim, que era a língua de erudição e da Igreja Católica. Nos primeiros cinco anos, o currículo era dedicado em grande parte ao latim, ao grego e à literatura clássica. As disciplinas da gramática, da retórica e da dialética eram consideradas meios de acostumar a mente à contemplação das idéias e da realidade inteligível, em contraste com a perceptível. A filosofia e a literatura clássicas, que eram produto de uma cultura pagã da Antigüidade, haviam-se "cristianizado" gradativamente, tendo alcançado uma acomodação com a teologia cristã, fruto de sucessivas conciliações efetuadas. Ao tratar de tais questões, Santo Agostinho defendeu que, caso os filósofos ensinassem qualquer coisa que fosse contrária às Sagradas Escrituras, isto é, à Fé Católica, sem nenhuma dúvida dever-se-ia acreditar que tal coisa era completamente falsa.

A influência exercida pelo tipo de educação escolástica recebida sobre o pensamento de Descartes não é duvidosa. Descartes foi um "agostiniano-platonista" que encontrou certeza na crença em que o mais perfeito de todos os seres [Deus] não o enganaria. Étienne Gilson estabeleceu o "parentesco singular que une o *Penso, logo existo* de Descartes a certos textos célebres de Santo Agostinho". [273] A primeira pergunta que nós fazemos é como Descartes assimilou, ou não, todo este material recebido. Sobre a semelhança de seu argumento com o de Santo Agostinho, Descartes anunciou claramente que a aproximação não lhe

[273] Gilson, *Études sur le Rôle de la Pensée Médiévale dans la Formation du Système Cartésien*, p. 191.

interessava, porque Santo Agostinho “não me parece servir ao mesmo uso que eu faço”. [274]

O aspecto mais poderoso da filosofia medieval da ciência que permaneceu fortemente influente no princípio do século XVII talvez tenha sido a concepção neo-platônica de que a natureza definitivamente devia ser explicada por meio da matemática. Na Idade Média esta crença foi explorada principalmente nas ciências intermediárias, como a óptica. No entanto, os cientistas medievais pareciam não sentir muita necessidade de fazer distinções filosóficas entre a matemática pura, a física como a ciência das ‘naturezas’ e causas, e as ciências intermediárias. A física aristotélica ainda não tinha se tornado desnecessária. Crombie sugeriu que isto tenha sido destacado em Descartes, considerado por ele “o mais medieval dos grandes cientistas do século XVII, no sentido de ser o mais dominado pela filosofia da natureza”. [275]

A transição do período medieval para a Renascença, e depois para a Idade “Moderna”, deu-se gradativamente, inclusive na matemática. A influência medieval ainda se fazia sentir no fim do século XV e início do século XVI, com numerosas edições das obras de Bradwardine e de Oresme. [276]

O valor da álgebra e da trigonometria foi sendo aumentado com novas aquisições e uso de nova simbologia. A aplicação da álgebra à geometria ampliou a sua extensão e aconteceu de uma maneira mais sistemática. Entre os resultados mais importantes destacam-se a resolução das equações cúbicas por Tartaglia, resultado que foi antecipado em sua publicação por Girolamo Cardano (1545), o método de obter valores numéricos das raízes de polinômios e o princípio da redução de equações algébricas, desenvolvidos por François Viète (1540-1603). A teoria das equações também foi desenvolvida por Thomas Harriot (1560-1621) e por Albert Girard (1595-1632), que estendeu a idéia de número para incluir quantidades negativas e ‘imaginárias’. Ao mesmo tempo, foram sendo feitos desenvolvimentos no simbolismo algébrico e Pierre de Fermat (1601-1665) compreendeu a equivalência das diferentes expressões algébricas e as curvas

---

[274] Carta a Mersenne, dezembro de 1640, A.T. , vol. III, p. 261.

[275] Crombie, *Medieval and Early Modern Science*, v. 2, p. 118.

[276] Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 54.

geométricas traçadas por meio dos lugares geométricos, movendo-se com referência às coordenadas. [277]

No Capítulo 2 deste trabalho foram abordadas as conexões existentes entre as *Regulae ad Diretionem Ingenii* e *La Géométrie.*

Desde meados do século XVI, havia-se delineado a questão da certeza e do poder demonstrativo da matemática dentro de uma diversidade de controvérsias sobre o método. Um debate era centrado sobre as concepções opostas da relação da matemática com a filosofia natural, atribuídas a Platão e a Aristóteles.

Antes de escrever o *Discours de la Méthode* e os ensaios que o acompanharam, incluindo *La Géométrie*, Descartes já havia escrito, entre 1619 e 1628, o seu mais completo tratado sobre o método, as *Regulae ad Directionem Ingenii*, publicado postumamente em 1701. Esta seqüência da sua produção intelectual pode evidenciar sua abordagem confiantemente racionalista da ciência.

Quando Descartes discutiu primeiramente a aplicação de seu método à ciência natural ele estava tão confiante em que seria bem sucedido, quanto ele estava confiante na filosofia. A "matemática universal" (*Mathesis Universalis*) esboçada nas *Regulae* repetiria a estrutura de seu sistema filosófico, dependente das "naturezas simples". Ela abrangeria todo o mundo físico e subordinaria a ela todas as ciências particulares.

A consideração, por Descartes, do método nas *Regulae* era uma variante do procedimento duplo, familiar, da análise e síntese, ou resolução e composição. O objeto da investigação científica era reduzir os problemas complexos, como se apresentavam por meio da experiência, a problemas constituintes específicos para solução quantitativa, de tal modo que a situação complexa podia então ser reconstituída teoricamente e explicada por meio da dedução, a partir dos elementos e leis descobertas que a produziram.

Descartes escreveu a Regra IV:

> "Por método, eu quero dizer um conjunto de certas regras fáceis, tais que qualquer um que as obedeça exatamente, primeiramente nunca tomará qualquer coisa falsa como verdadeira, e em segundo lugar, avançará ordenadamente

[277] Crombie, *Medieval and Early Modern Science*, pp. 128-129.

> por meio de uma tentativa, passo a passo, sem despender esforço mental, até que tenha atingido o conhecimento de tudo que não supere sua capacidade de entendimento”. [278]

Ele continuou a afirmar na Regra V:

> “Todo o método consiste na ordem e na disposição dos objetos para os quais a atenção da mente deve ser voltada, e pelos quais nós podemos descobrir alguma verdade. E nós observaremos exatamente este método se nós reduzirmos as proposições obscuras envolvidas, passo a passo, a outras mais simples, e então, a partir de uma intuição das mais simples de todas, tentar ascender através dos mesmos passos até o conhecimento de todas as outras”. [279]

Uma distinção deve ser feita entre o método de Descartes, como é aplicado à filosofia, e como é aplicado à ciência. A respeito da filosofia, as regras que ele forneceu para a análise dos dados de experiência eram para preparar a mente para um ato intuitivo, pelo qual as ‘naturezas simples’ eram aprendidas. Estas eram auto-evidentes, “claras e simples idéias” por exemplo, pensamento, extensão, número, movimento, existência, duração, que não podiam ser reduzidas a alguma coisa mais simples e portanto, não tinham definições lógicas.

O propósito das regras era escolher e arranjar os dados para esse tipo de intuição, e elas incluíam uma forma de indução que envolvia o princípio da eliminação. O objetivo filosófico de Descartes era reduzir as “proposições obscuras envolvidas”, com as quais ele entrava em contato desde a experiência, a proposições que eram, ou auto-evidentes (naturezas simples), ou que já tinha sido mostrado que procediam de proposições auto-evidentes. Tendo feito isto, ele então estaria apto a explicar todos os dados da experiência, mostrando que eles podiam ser deduzidos das “naturezas simples” descobertas.

---

[278] Descartes, *Règles pour la Direction de L’Esprit*, Regra IV, p. 19.

[279] *Ibid.*, Regra V, p. 29.

O exame das *Regulae* serviu ao objetivo de esclarecer, em termos mais precisos, o significado do processo construtivo da geometria cartesiana, e para mostrar como este processo se traduz diretamente no conceito de "construção geométrica" e em uma definição precisa da modalidade de tal construção. A classificação cartesiana das curvas, que é talvez a contribuição mais importante dada por Descartes à matemática, é conseqüência direta dos princípios gerais do método analítico cartesiano, tal como são expostos nas *Regulae.* As características específicas deste procedimento analítico construtivo modificaram o panorama da geometria cartesiana, em particular os tipos de representação de curvas e os critérios de admissibilidade das curvas na geometria.

Para a solução de certos problemas, em que não é suficiente o procedimento dedutivo, Descartes fez uso da *Ars Analytica*, que consistia em desenvolver alguma coisa que dependida de muitas outras. Esta 'arte' não era outra senão o método para resolver os problemas nos quais aparecem 'incógnitas'. Na Regra XIII – isto fica esclarecido, quando aparece o conceito de designação de alguma coisa que não é conhecida por alguma coisa conhecida, isto é, a 'arte' de resolver equações.

Na Regra XIV [280]há um passo importante na observação de que as naturezas comuns se encontram em 'relações' e ' proporções', que se reduzem a 'igualdades', isto é, equações. Aí também é introduzida a idéia de tomar-se um segmento de reta para ser a unidade. [281] Foi esta nova perspectiva que permitiu a resolução do problema de Pappus, no caso das quatro retas, e o desenvolvimento subseqüente de toda a geometria exposta em *La Géométrie*, conforme foi explicado no Capítulo 3 deste trabalho.

Com efeito, a geometria cartesiana dependia de se assumir que um comprimento era equivalente a um número e que um segmento podia ser considerado como uma unidade. [282] Esta concepção é totalmente estranha às concepções dos antigos gregos. Rejeitando a limitação dimensional na álgebra, ao assumir, por exemplo, quadrados e cubos de termos como sendo representados por segmentos, Descartes foi capaz de colocar problemas geométricos na forma

---

[280] Descartes, *Règles pour la Direction de L'Esprit*, Regra XIV, pp. 108-109.

[281] *Ibid.*, Regra XIV, p. 115; p. 118.

[282] Descartes, *La Géométrie*, p. 298; p. 4.

algébrica e de usar álgebra para resolvê-los. Descartes também mostrou que todas a secções cônicas de Apolônio podem ser abrangidas por algumas equações do segundo grau.[283]

Em *La Géométrie*, não encontramos uma exposição sistemática de uma coleção de curvas e de suas equações, hierarquizadas de acordo com os seus graus, nem suas representações gráficas. Em contrapartida, encontramos muito da forma algébrica e da relação entre esta e a geometria. É forçoso admitir-se que a simplificação da notação algébrica efetuada por Descartes facilitou muito o tratamento algébrico.

Descartes acreditava que só podíamos ter uma clara e distinta concepção da solução geométrica de um problema quando a intersecção de curvas efetuada para sua construção fosse traçada por um movimento contínuo, e deste modo resultasse visível a nossos olhos ou à nossa imaginação.

Em vista do contexto e da seqüência do desenvolvimento das idéias e concepções cartesianas, compreendem-se as causas que levaram à difícil coexistência de classificações e critérios de aceitabilidade de curvas aparentemente incompatíveis.

A solução de um problema em geometria consistia primordialmente em sua construção, e Descartes parece inicialmente ter pensado em classificar as curvas a serem utilizadas nas construções, segundo a facilidade com que eram traçáveis. Primeiramente, ele engendrou o seu compasso com esquadros móveis, através do qual encontrou meios proporcionais e conseguiu traçar curvas de complexidade crescente. Tal compasso podia ser considerado uma generalização da construção euclidiana por régua e compasso, já que suas hastes deslizavam ao longo de linhas retas e a régua descrevia um círculo quando aberta. Desta forma, Descartes veio a definir curvas geométricas como sendo as descritas por um movimento contínuo ou séries de movimentos interdependentes, em uma analogia com aqueles efetuados pelas hastes do seu compasso, todos regulados e determinados pelo movimento da primeira.

Pouco depois da primavera de 1619, quando expôs seu famoso programa de criação de uma nova ciência em uma carta a Isaac Beeckman, Descartes deve ter pensado na possibilidade de achar meios proporcionais por meio da

[283] Descartes, *La Géométrie*, p. 328; pp. 67-68.

intersecção de cônicas. Ele descobriu que a intersecção de um círculo e de uma parábola resolvia todas as equações do terceiro ou quarto graus.

Numa data não determinada, mas é provável que seja depois de 1628, Descartes deve ter estendido sua pesquisa às equações do quinto e sexto graus, alcançando o propósito de construir as curvas conhecidas como “parábolas cartesianas” ou “tridentes”. Estes resultados animadores poderiam ter levado Descartes a tomar mais em consideração o grau algébrico da equação de uma curva. Apesar disso, ele não abandonou a simplicidade do processo de traçado de uma curva com um instrumento como fundamento para o critério de simplicidade de curvas geométricas. Em *La Géométrie* ele apelou para ambos os critérios, o algébrico e o instrumental, embora parecesse reconhecer que não coincidiam a classificação das equações de acordo com os seus graus e a classificação dos problemas segundo sua facilidade de construção.

Descartes sempre deu atenção cuidadosa ao modo por meio do qual a curva era realmente traçada. Apesar de uma parte considerável de *La Géométrie* ter sido dedicada a técnicas algébricas, Descartes nunca chegou a definir como geométricas apenas as curvas que admitissem equações algébricas. Ao contrário, ele estava convencido de que o problema de Pappus e outros problemas que ele resolveu com a ajuda de equações algébricas podiam, em princípio, ser resolvidos por movimento contínuo. Tanto foi assim que ele excluiu a possibilidade de considerar como geométricas construções ponto a ponto como o da quadratriz ou as construções com cordão, que careciam de “precisão e exatidão”, por causa da incomensurabilidade entre linhas retas e curvas. A posterior introdução da retificação de linhas curvas, a partir da segunda metade do século XVII, não desmereceu o seu esforço.

Quanto ao método cartesiano de traçado de tangentes e normais às curvas, era bastante complicado, até para a aplicação a uma elipse, e foi preterido em favor do método linear de Fermat, que era muito mais simples. Apesar disso, não se pode considerar de modo leviano a obra de Descartes como sendo nada mais do que uma aplicação de equações a curvas de grau mais alto, que não houvessem sido tratadas suficientemente por Viète e pelos antigos.

Se levássemos em consideração o conteúdo do Livro III de *La Géométrie*, concluiríamos por ser esta principalmente uma contribuição à álgebra. De fato, aquele livro chega bem perto de um curso tradicional de álgebra avançada. Devemos lembrar, porém, que Descartes tinha mesmo que considerar em detalhe a transformação de equações e sua redutibilidade, pela simples razão de que ele derivou equações de curvas com um propósito em mente: usá-las na construção de problemas geométricos determinados, que haviam sido expressos por equações polinomiais.

O Livro III de *La Géométrie* foi menos significativo no desenvolvimento da geometria do que na história dos problemas clássicos da Antigüidade. Ele pôs uma ênfase excessiva sobre a construção geométrica de raízes de equações algébricas, em detrimento do estudo analítico das curvas. Por outro lado, Descartes estabeleceu a impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo apenas com o uso de régua e compasso, ao declarar:

> “Problemas sólidos em particular não podem, como eu já havia dito, ser construídos sem o uso de uma curva mais composta que a circular; é coisa que também se pode deduzir do fato de que eles se reduzem todos a duas construções: em uma das quais há que ter conjuntamente os dois pontos que determinam dois meios proporcionais entre duas linhas dadas; e na outra os dois pontos que dividem em três partes iguais um arco dado.” [284]

Infelizmente, Descartes não apresentou uma prova satisfatória e cabal desta afirmação, limitando-se a declarar:

> “... como pelo método de que me sirvo tudo o que cai sob a consideração dos geômetras se reduz a um mesmo gênero de problemas, que é o de buscar o valor das raízes de alguma equação, julgar-se-á que é acertado fazer uma listagem de todos os caminhos pelos quais se possa

[284] Descartes, *La Géométrie*, p. 401-402; p. 217-218.

> encontrá-las, que seja suficiente para demonstrar que se escolheu o mais geral e o mais simples." [285]

Foram, sem dúvida, aquisições importantes e de relevância legadas por *La Géométrie*: a simplicidade da notação algébrica utilizada, o uso de equações algébricas, tanto ao classificar curvas geométricas, quanto em discernir a solução mais simples possível, e a solução com métodos simples dos problemas de duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo, pela facilidade de aplicação de seu compasso.

Quanto à difusão dos conteúdos de *La Géométrie*, segundo Bos [286] as idéias realmente influentes deste livro foram a relação entre curva e equação [287] o método da raiz dupla para a determinação de normais (e tangentes) às curvas, [288] e a teoria de equações e suas raízes. [289] A primeira, a relação entre curva e equação, não teve um lugar predominante na estrutura do livro, embora viesse depois a ser muito frutífera. O método da raiz dupla é um tema secundário dentro da obra, mas na história subseqüente dos métodos infinitesimais ia ser uma idéia muito influente. Quanto à teoria de equações e suas raízes, enquadrou-se muito bem dentro da estrutura do livro, atraiu em si mesma muito interesse e foi desenvolvida depois.

A publicação de *La Géométrie* contribuiu, portanto, para o desenvolvimento gradual das matemáticas, pois colocou todo o campo da geometria clássica sob o domínio da ação dos algebristas. Alguns pensadores julgaram que Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e "encontrar a verdade nas ciências". A astronomia e a mecânica eram as ciências naturais mais em evidência na época e a matemática, que era bastante utilizada como a chave da compreensão daquelas, tornou-se um meio muito importante para compreender o universo e era um exemplo satisfatório de que a verdade podia ser encontrada na ciência. A filosofia

[285] Descartes, *La Géométrie*, pp. 401- 402; pp. 217-218.

[286] Bos, " The Structure of Descartes'*Géométrie*", pp. 365-369.

[287] Descartes, *La Géométrie*, p. 341; p. 93.

[288] *Ibid.*, pp. 341-352; pp. 93-114.

[289] *Ibid.*, pp. 371-389; pp. 157-193.

mecanicista daquele período, ao acreditar em um método geral baseado na razão, encontrou na matemática um modelo conveniente.

Na última página de *La Géométrie*, Descartes fez a seguinte afirmação: "Em matéria de progressões matemáticas, quando se tem os dois ou três primeiros termos, não é difícil encontrar os outros." [290] A partir do que Descartes experimentou no campo matemático, nós poderíamos fazer uma transferência para a visão do desconhecido como um termo ignorado, mas que será necessariamente descoberto desde que, a partir do que já é conhecido, seja construída uma 'cadeia de razões' que a ele conduza. Descartes teria, assim, generalizado o procedimento matemático que faz do desconhecido um termo relacionado a outros termos (o conhecimento existente) e que em função destes pode ser descoberto. Esta idéia da existência de uma ordem natural, inerente à progressão do conhecimento, é fundamental para o intento cartesiano de construir uma "matemática universal".

O importante – e que constituiu o preceito metodológico básico apontado no *Discours de la Méthode* – é que só se considere como verdadeiro o que for evidente, ou seja, o que for perceptível por meio da intuição com clareza e precisão. Todavia, a ampliação da área do conhecimento nem sempre oferece um panorama permeável à intuição, e conseqüentemente, adequado à pronta aplicação do 'preceito de evidência'. Eis porque Descartes propôs também outros preceitos metodológicos complementares ou preparatórios da evidência: o 'preceito da análise' (dividir cada uma das dificuldades que se apresentam em tantas parcelas quantas forem necessárias para serem resolvidas), o da 'síntese' (conduzir com ordem os pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de serem conhecidos, para depois tentar gradativamente o conhecimento dos mais complexos) e o da 'enumeração' (realizar enumerações de modo a verificar que nada foi omitido). Tais preceitos representam a submissão a exigências estritamente racionais. Seguir os imperativos da razão que, a exemplo de sua manifestação matemática, opera por intuições e por análises, é justamente o que Descartes prescreveu como recurso para a construção da ciência e também para a sabedoria da vida.

---

[290] Descartes, *Règles pour la Direction de L'Esprit*, p. 413; p. 241.

BIBLIOGRAFIA

BAILLET, A. *La Vie de Monsieur Descartes*. Paris, Daniel Horthemels, 1691, reimp. Facsimilar, Genebra, Slatkine, 1970, 2 vols.

BARON, M.E. *The Origins of Infinitesimal Calculus.* Oxford, Pergamon Press, 1969.

BARROW, Isaac. *Geometrical Lectures*. J. M. Child, (ed.).Chicago, Open Court, 1916.

BORTOLOTTI, E. "L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI". *Periodico di Matematica*, 5(4):147-184, 1925.

________________ . "L'algebra nella storia e nella preistoria della scienza" . *Osiris*, 1: 184-230, 1936.

________________ . "L'algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna". *Scripta Mathematica*, 4: 166-169, 1936.

________________ . *Studi e Ricerche sulla Storia della Matematica in Italia nei Secoli XVI e XVII.* Bolonha, s.c.e., 1928.

BOS, H. J. M. "Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the 'Construction of Equations', 1637-1750". *Archive for History of Exact Sciences* 30: 331-380, 1984.

__________. "On the Representation of Curves in Descartes' *Géométrie*". *Archive for History of Exact Sciences* 24: 295-338, 1981.

__________. "The Structure of Descartes'*Géométrie", in* BELGIOIOSO,G. *et alii.*, (orgs.). *Descartes: Il Metodo e i Saggi.* Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1990, v. 2, pp. 349-369.

BOSMANS, Henri. "La Première édition de La '*Clavis mathematica*'d'Oughtred, son influence sur La '*Géométrie*' de Descartes", *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* 35: 24-78, 1910-1911.

BOYER, C. B. A *History of Analytic Geometry.* Princeton, The Scholar's Bookshef, 1988.

__________ . *História da Matemática.* Trad. brasileira de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

CAJORI, Florian. *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching.* Nova Iorque, Macmillan, 1917, 5ª reimp. 1950.

______________. *A History of Mathematical Notations.* Chicago, Open Court, 1928-1929, 2 vols.

COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods.* Oxford, Clarendon, 1940.

______________. “The Beginnings of Analytic Geometry in Three Dimensions", *American Mathematical Monthly*, 55: 76-86, 1948.

______________. “The Origin of Analytic Geometry”. *Osiris,* 1: 231-250, 1936.

______________. “The Story of Tangents”. *American Mathematical Monthly,* 58: 449-462,1951.

COSENTINO, G. “L’insegnamento delle matematiche nei collegi Gesuitici nell’Italia Settentrionale”. *Physis*, 13: 205-217, 1971.

COSTABEL, Pierre. *Démarches Originales de Descartes Savant.* Paris, Vrin, 1982.

_______________. "Descartes et la Mathématique de L'lnfini". *Historia Scientiarum,* 29: 37-49, 1985.

_______________. “La Réception de *La Géométrie* et les disciples d’Utrecht”, *in* MÉCHOULAN, H., (ed.) *Problématique et réception du ‘Discours de la Méthode’ et des’Essais’.* Paris, Vrin, 1988, pp. 59-64.

COSTABEL, Pierre e Monette Martinet. “Quelques Savants et Amateurs de Science au XVII siècle”. *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences,* série nova, n.14. Paris, Societé Française D'Histoire des Sciences et des Techniques, 1986.

CROMBIE, A.C. *Medieval and Early Modern Science.* Nova Iorque, Doubleday Anchor Books, 1959, 2 vols. [*Histoire des Sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650).* Trad. Francesa por Jacques D’Hermies. Paris, P. U. F., 1959, vol.1]

______________ . *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition.* Londres, Duckworth, 1994, vol. 1.

DESCARTES, R. *Discours de la Méthode.* Comentários de Étienne Gilson. Paris, Vrin, 1930.

_____________. *Discurso do Método.* Trad. de J. Guinsburg e B. Prado Jr. São Paulo, Abril Cultural, 1973 (Os Pensadores, vol. 15).

_____________. “Les Méditations Metaphysiques de René Descartes”, *in* BRIDOUX, A., (ed.) R. Descartes, *Oeuvres et Lettres.* Paris, Gallimard, 1953 (Bibliothèque de La Pléiade).

_____________. *Oeuvres de Descartes.* C. Adam e P. Tannery, (eds.) Paris, J. Vrin, reed. 1996, 11 vols.

_____________. *Reglas para la Dirección del Espiritu.* Prólogo e seleção de J. D. Garcia Bacca. Mexico, Secretaria de Educacion Pública, 1946.

_____________. *Règles pour la Direction de L'Esprit.* Trad. e notas por J. Sirven. Paris, J. Vrin, 1970.

_____________ . *The Geometry of René Descartes.* Trad. para o inglês, do francês e latim, de David Eugene Smith & Marcia L. Latham, com um fac-símile da 1ª ed, 1637. Chicago, Open Court, 1925, reimp. Nova Iorque, Dover, 1954.

_____________. *The Principles of Philosophy*. Trad. para o inglês e notas de Valentine Rodger Miller e Reese P. Miller. Dordrecht, D. Reidel, 1983.

DIJKSTERHUIS, E. J. *The Mechanization of the World Picture.* Oxford, Oxford University Press, 1961. [Trad. It. *Il Mecanicismo e l'Immagine del mondo.* Milão, Feltrinelli, 1971.]

FERMAT, P. de. *Oeuvres de Fermat*. P. Tannery e C. Henry, (eds.) Paris, Gauthier-Villars, 1891-1922, 4 vols. e 1 suplemento.

FORBES, E.G. "Descartes and the Birth of Analytic Geometry" . *Historia Mathematica* 4: 141-151, 1977.

GALISON, Peter L. "Descartes' Comparisons: From the Invisible to the Visible". *Isis* 75: 311-326, 1984.

GALLUZZI, Massimo. "Il Problema della Tangenti nella *Géométrie* di Descartes". *Archive for History of Exact Sciences* 22: 37-51, 1980.

________________. "La Soluzione Dell' Equazione Di Sesto Grado nella *Géométrie* di Descartes", in BERETTA, Marco *et alii*, eds. *Per una storia critica della scienza.* Bolonha, Ed. Cisalpino, 1996.

GAUKROGER, S. *Descartes. Uma Biografia Intelectual*. Trad. de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro, Ed. UERJ&Contraponto, 1999.

GILSON, Étienne. *Études sur le Rôle de La Pensée Médiévale dans la Formation du Système Cartésien.* 3ª ed. Paris, Vrin, 1967.

GOUHIER, H. *Les Premières Pensées de Descartes.* Paris, Vrin, 1958.

GRAFTON, A. *Defenders of the Text.* Cambridge, MA, Harvard University Press, 1991.

GREENWOOD, Thomas. "Origines de La Géométrie Analytique". *Revue Trimestrielle Canadienne.* 34*:* 166-179, 1948.

GUÉROULT, Martial. *Descartes' Philosophy Interpreted According to the Order of Reasons.* Trad. para o inglês de Roger Ariew. Minneapolis, University of Minnesota Press, 1984, 2 vols.

HALDANE, E. & G. R. T. Ross, (trads.) *The Philosophical Work of Descartes*. Cambridge, Cambridge University Press, 1931, 2 vols.

HEATH, Thomas L. *A History of Greek Mathematics.* Oxford, Clarendon, 1921, 2 vols.

______________. *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon 1931; reed. Nova Iorque, Dover, 1963.

______________. *Mathematics in Aristotle.* Oxford, Clarendon, 1949.

ISRAEL, G. "Dalle *Regulae* alla *Géométrie*", *in* BELGIOIOSO,G. *et alii.*, (orgs.) *Descartes: Il Metodo e i Saggi.* Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1990, v.2, pp. 441-474.

______________. "The Analytical Method in Descartes*' Géométrie", in* OTTE, Michael & PANZA, Marco, (eds.). *Analysis and Synthesis in Mathematics: History and Phylosophy.* Dordrecht, Kluwer, 1997.

KARPINSKI, L. C. "Is There Progress in Mathematical Discovery and did the Greeks have Analytic Geometry ?". *Isis, 27:* 46-52, 1937.

______________ "The Origin of the Mathematics as Taught to Freshmen". *Scripta Mathematica,* 6: 133-140, 1939.

KENNY, Anthony. *Descartes:* A *Study of his Philosophy.* Nova York, Random House, 1968.

LACROIX, S. F. *Cours de Mathématiques. Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et D'Application de L'Álgebre à la Géometrie*. Paris, Bachelier, Imprimeur – Libraire de L'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, 1798-1799., vol. IV.

_______________. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.* Paris, J. B. M. Duprat, 1797, vol. I.

LENOIR, J. " Descartes and the Geometrization of Thought: The Methodological Background of Descartes' *Géométrie*." *Historia Mathematica* 6: 355-379, 1979.

LORIA, Gino. "Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla Storia della Geometria Analitica". *Reale Academia dei Lincei. Atti Memorie* *della classe di scienze fisiche, matematiche* e *naturali* (5), 14: 777-845, 1923.

____________ . "Descartes Géometre", *in* "Études sur Descartes". *Revue de Métaphysique et de Morale.* 44: 199-220, 1937.

____________ "Perfectionnements, Évolution, Métamorphoses du Concept de 'Coordonées'. Contribution a L'Histoire de la Géométrie Analytique." *Osiris,* 8: 218-288, 1948.

____________ *Storia delle Matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX.* 2ª ed. Milão, Ed. Cisalpino-Goliardica, 1982.

MAHONEY, M.S. "Descartes: Mathematics and Physics", v., *in* GILLISPIE,C. C., org. *Dictionary of Scientific Biography.* Nova Iorque, Charles Scribner's Sons,1981, v.4, pp. 55-61.

_______________. "Changing Canons of Mathematical and Physical Intelligibility in the Later 17th Century". *Historia Mathematica* 11 : 417-423, 1984.

______________ . "Infinitesimals and Transcendent Relations: The Mathematics of Motion in the Late Seventeenth Century", *in* LINDEBERG, D. & WESTMAN, R., (orgs.) *Reappraisals of the Scientific Revolution.* Cambridge, 1990, pp. 461-492.

MARTINS, Roberto de A. "Descartes e a Impossibilidade de Ações à Distância", *in* FUKS, S. (ed) *Descartes 400 anos: um legado científico e filosófico.* Rio de Janeiro, Relume Dumará, 1998, pp. 79-126.

MILHAUD, Gaston. *Descartes Savant.* Paris, Félix Alcan, 1921.

MOLLAND, A. G. "Shifting the Foundations: Descartes' Transformation on Ancient Geometry". *Historia Mathematica* 3: 21-49, 1976.

MONGE, Gaspar. "Application de l'algèbre a la Géométrie". *Journal de l'École Polytéchnique* 11(1): 143-172.

NASCIMENTO, C. A. R. do. *De Tomás de Aquino a Galileu.* 2ª ed. Campinas, Unicamp/IFCH, 1998 (Col. Trajetória, vol. 2).

RABUEL, Claude. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes.* Lyon, [s.c.e.], 1730.

RODIS-LEWIS, G. *L 'Oeuvre de Descartes*. Paris, Vrin, 1971, 2 vols.

_______________. *Descartes, Biographie*. Paris, Calmann-Lévy, 1995.

_______________ . *Idées et vérités éternelles chez Descartes et ses Successeurs.* Paris, Vrin. 1985.

ROSSI, P. *I filosofi e le macchine.* Milão, Feltrinelli, 1962.

SALTYKOW, N. *"La Géométrie* de Descartes. 300° Anniversaire de Géométrie Analytique". *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2), 62:83-96; 110-123, 1938.

SCHUSTER, J. A. *Descartes and the Scientific Revolution: 1618-1644: An Interpretation.* Tese de Doutorado, Universidade de Princeton, 1977.

_______________. "Descartes '*Mathesis Universalis*: 1618-1628", *in* GAUKROGER, S., (ed.) *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*. Brighton, Harvester Press, 1980, pp. 41-96.

_______________. "Whatever Should we do with Cartesian Method ? Reclaiming Descartes for the History of Science", *in* VOSS, S., (ed.). *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes.* Nova Iorque / Oxford, Oxford University Press, 1993, pp. 195-223.

SCOTT, J. F. *The Scientific Work of René Descartes.* Londres, Taylor and Francis, 1952.

SERFATI, M. " Les Compas Cartésians" . *Archives de Philosophie* 56: 197-230, 1993.

SHEA, William R. *The Magic of Numbers and Motion. The Scientific Career of René Descartes.* Canton, MA, Science History Publications, 1991.

SIRVEN, J. *Les Années D'Apprentissage de Descartes (1596-1628).* Albi, Imprimérie Coopérative du Sud-Ouest, 1928.

SPINELLI, M. "A Matemática como Paradigma da Construção Filosófica de Descartes: do Discurso do Método e da Tematização do Cogito" . *Cadernos de História e Filosofia da Ciência.* Campinas, Série 2, 2(1), 1990.

STRONG, E. W. *Procedures and Metaphysics. A Study in the Philosophy of Mathematical-Physical Science in the sixteenth and seventeenth centuries.* Berkeley, CA, University of California Press, 1936.

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas.* Trad. portuguesa de J. C. S. Guerreiro. Lisboa, Gradiva, 1992.

_______________. *Source Book in Mathematics.* Cambridge, MA, Harvard University Press, 1968.

TANNERY, P. & WAARD, C. e*t alii,* eds. *La Correspondance du P. Marin Mersenne.* Paris, Editions du CNRS, 1933-1986, 16 vols.

THOMAS, I., (trad.). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Aristarchus to Pappus.* Cambridge/Londres, Harvard University Press, s/d. (Loeb Classical Library, vol. II).

TIMMERMANS, B. *La Résolution des problèmes de Descartes* à *Kant: L'analyse* à *l'age de la révolution scientifique.* Paris, Presses Universitaires de France, 1995.

TREVISANI, Francesco. "Symbolisme et interprétation chez Descartes et Cardan". *Revista Crítica di Storia delIa Filosofia* 30: 27-47, 1975.

VER EECKE, Paul. *Pappus of Alexandria*. *La Collection Mathématique.* Paris/Bruges, [s.c.e.], 1933, 2 vols.

VIÈTE, F. *Opera Mathematica.* Van Schooten, (ed.) Leide, Lugduni batavorum, 1646; reed. com um prefácio de J. E. Hofmann. Nova Iorque/ Hildesheim, s.c.e., 1970.

VUILLEMIN, J. *Mathématiques et Métaphysiques chez Descartes.* Paris, Presses Universitaires de France, 1960; reed. 1987.

WANDERLEY, A. J. M. "Alguns Aspectos da Obra Matemática de Descartes". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência.* Campinas, Série 2, 2(1), 1990.

___________________. "Existência e Unicidade da Raiz Positiva de Equações Algébricas Particulares". *Revista do Professor de Matemática* da S.B.M. São Paulo, 44: 27-31, 3º quadrimentre 2000.

WESTFALL, Richard S. *The Construction* of *Modern Science.* Nova York, John Wiley and Sons, 1971 .

WHITESIDE. D. T. "Patterns of Mathematical Thought in The Later 17th Century". *Archive for History* of *Exact Sciences* 1: 179-388, 1960-62.