Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC–SP

João Anderson Mendes

O ensino dos números complexos por meio de uma proposta metodológica de sala de aula invertida

Mestrado em Educação Matemática

São Paulo

2020

João Anderson Mendes

O ensino dos números complexos por meio de uma proposta metodológica de sala de aula invertida

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.

PUC-SP

2020

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________ Local e Data: _______________

BANCA EXAMINADORA

Pensamento

Educação não transforma o mundo.

Educação muda as pessoas.

Pessoas mudam o mundo.

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me dar forças nos momentos difíceis; à minha família; à minha esposa e minha filha; aos amigos que acreditaram no meu potencial.

Ao colégio Albert Sabin que subsidiou meus estudos; aos Professores Doutores Gerson Pastre de Oliveira e Marcio Vieira de Almeida que fizeram parte da banca, colaborando com contribuições pertinentes que me ajudaram no direcionamento desta pesquisa.

A minha orientadora Sonia Igliori, por contribuir com sua inteligência e experiência para me ajudar nesse processo da pesquisa.

A todos(as) professores(as) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por compartilharem seus conhecimentos e me mostrarem uma área tão rica e bela: a educação matemática.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente, muito obrigado!

RESUMO

Este texto aqui apresentado refere-se ao relatório de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi investigar se o uso da metodologia Sala de Aula Invertida favorece a aprendizagem de alunos do ensino médio, em especial no ensino de um conceito matemático, números complexos. A metodologia norteadora da pesquisa moldou-se pela pesquisa qualitativa da pesquisa ação. Os procedimentos metodológicos foram realizados da seguintes maneiras: aplicação de uma sequência de atividades, composta por um vídeo elaborado pelo professor/pesquisador com dados para o estudo da representação de números complexos no plano de Argand-Gauss, do conceito de módulo e do argumento de um número complexo; aplicação de um questionário para o conhecimento de como ocorreram os métodos de estudo dos alunos, e, desenvolvimento de uma atividade de controle sobre os assuntos estudados. As respostas ao questionário e à atividade de controle permitiram discussão/validação dos conceitos estudados e das principais dificuldades encontradas. Por fim, houve a institucionalização da forma trigonométrica dos números complexos. O referencial teórico usado para analisar os resultados foram as próprias bases do conceito de Sala de Aula Invertida propostas por Jonathan Bergmann e Aaron Sams, além de contribuições dos conceitos de competência de Perrenoud e dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. As discussões entre os alunos em sala provenientes de seus estudos pré-aula, indicaram a potencialidade da metodologia empregada para levar os alunos a perceberem concepções equivocadas e buscarem meios para avançar em seus conhecimentos. Essas condições auxiliaram o professor/pesquisador a identificar obstáculos de aprendizagem e levá-los em conta em suas propostas de ensino. Outro resultado que se pode apurar foi que os alunos agiram com autonomia durante seus estudos, fator esse que pode favorecer a construção de uma nova competência. A metodologia empregada também proporcionou que os alunos variassem os registros de representação dos números complexos para ter sucesso na evolução do conhecimento dos conceitos estudados.

Palavras-chave: Sala de Aula Invertida; Aprendizagem, Autonomia; Forma Trigonométrica de um Número Complexo.

ABSTRACT

The text presented here refers to a master's research report whose goal was to investigate whether the use of the "Inverted Classroom" methodology favors the learning of high school students, especially regarding the teaching of a mathematical concept: complex numbers. This work's guiding methodology was shaped by the qualitative action research. The methodological procedures were carried out in the following ways: implementation of a sequence of activities, composed of a video prepared by the teacher / researcher with data for the study of the complex numbers representation in the Argand-Gauss plan, the concept of module and the argument of a complex number; application of a questionnaire to assess students' methods of study, and development of a control activity over the discussed subjects. The responses to the questionnaire and to the control activity allowed discussion / validation of the studied concepts and the main difficulties found. Finally, there was the institutionalization of the trigonometric form of complex numbers. The theoretical framework used to analyze the results consisted of the very bases of the "Inverted Classroom" concept, proposed by Jonathan Bergmann and Aaron Sams, in addition to contributions from Perrenoud's concepts of competence and Raymond Duval's semiotic representation records. The discussions between students in class, about their pre-class studies, indicated the potential of the used methodology to enable students to realize misconceptions and seek ways to advance their knowledge. These conditions helped the teacher / researcher to identify learning obstacles and take them into account in his teaching proposals. Another result that could be verified was how autonomously students acted during their studies, a factor that can favor the construction of a new competence. The employed methodology also allowed students to vary the representation records of complex numbers in order to succeed in improving the knowledge of the studied concepts.

Keywords: Inverted Classroom; Learning, Autonomy; Trigonometric form of a complex number.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em uma das escolas que trabalho, com alunos da terceira série do ensino médio, em geral é utilizada a metodologia tradicional de ensino. Os resultados em avaliações externas e internas são satisfatórios, porém podemos levantar uma hipótese de que se trata de uma aprendizagem circunstancial na medida em que a participação dos alunos na construção de seu conhecimento é pautada unicamente na repetição, de modo que os alunos não têm controle sobre o processo de educação.

Esse modelo de educação que a maioria das escolas básicas e as universidades ainda adotam no Brasil é baseado no modelo industrial: alunos sentados em fileiras, divididos por idade em séries, recebendo informações de uma pessoa – o professor –, "única" detentora e transmissora do conhecimento. Esse modelo de escola e de metodologia tradicional trazem algumas concepções que são questionáveis, como por exemplo que todos conseguem aprender no mesmo ritmo e da mesma forma. Valente (2014) aponta que,

> A postura de transmissor de informação, do ponto de vista comunicacional é baseada no conceito de emissor-receptor, que foi amplamente utilizado nos meios de comunicação de massa. Nesse caso, o receptor era visto como um vaso que deveria ser preenchido e tudo que viesse do emissor deveria ser aceito pelo receptor. A educação, e especialmente o professor, tinha esse papel de depositário da informação no aluno. (VALENTE, 2014, p. 142).

Horn e Staker (2015) consideram que esse modelo de educação foi bem-sucedido no começo do século XX, em que menos de um quinto dos empregos requeriam trabalhadores intelectuais (estrategistas, coordenadores, manipuladores e coletores de dados entre outros), mas que é incompatível com o mundo atual, no qual mais de três quintos dos empregos requerem trabalhadores intelectuais. Araujo (2011) reitera esse problema ao fazer a seguinte questão:

> [...] será que a educação pública, tal como a conhecemos, concebida nos séculos XVIII e XIX para atender a uma pequena parcela da sociedade e com um modelo pedagógico-científico em que o conhecimento estava

> centrado no professor, dá conta de atender aos anseios e às necessidades da sociedade contemporânea? (ARAUJO, 2011, p. 37).

No modelo tradicional há pouco espaço – ou nenhum – para que os alunos questionem, investiguem, construam, testem e concluam sobre o que estão estudando, de modo que não fiquem apenas ouvindo e reproduzindo o que o professor explica, tornando o processo de educação em um processo tecnicista. Poderíamos fazer até uma comparação do modelo tradicional com uma locomotiva, com seu ritmo de estudos que os alunos têm que seguir. Esse ritmo é determinado pelas demandas da escola, pelo cumprimento da programação do conteúdo, das escolhas do professor e pelo nível de conhecimento da sala naquele conteúdo. Se um aluno consegue ir além em um determinado assunto, é barrado pelo ritmo. Se um aluno tem mais dificuldades para acompanhar um determinado conteúdo, tem que “correr” para acompanhar o ritmo. Esse é o modelo que permeia a maioria das escolas. Esse ritmo, imposto pela escola, pode dificultar a aprendizagem de alguns alunos, tanto daqueles que poderiam ir além quanto daqueles que precisam de mais tempo para compreender um determinado conteúdo.

Para fazer com que os alunos participem mais do seu processo de ensino, é necessário propor novas metodologias que façam com que os alunos se tornem sujeitos nesse processo, mediadas pelo professor.

Essas propostas metodológicas foram sendo criadas e testadas visando uma participação mais ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Segundo Boucherville e Valente (2019),

> A autonomia e o controle do conhecimento pelo discente tornam-se importantes, na medida em que acreditamos que em uma “classe” de estudantes as necessidades são múltiplas, e há diversas possibilidades de formas de aprendizagem, permitindo mais flexibilidade para a escolha do conteúdo, a entrega, a avaliação e outros fatores. Um fator de importância é que o aluno, ao assumir o comando de suas expectativas de conhecimento, assume, também, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, desenvolvendo a habilidade de ser o protagonista de seu desenvolvimento intelectual e cognitivo. (BOUCHERVILLE; VALENTE, 2019, p.4)

As metodologias conhecidas como metodologias ativas, colocam o aluno como o centro do processo de ensino, ou seja, o aluno se torna protagonista de sua própria aprendizagem.

> A maior parte da literatura brasileira trata as metodologias ativas como estratégias pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e

> aprendizagem no aprendiz, contrastando com a abordagem pedagógica do ensino tradicional, centrada no professor, que transmite informação aos alunos. O fato de elas serem caracterizadas como ativas está relacionado com a aplicação de práticas pedagógicas para envolver os alunos, engajá-los em atividades práticas, nas quais eles são protagonistas da sua aprendizagem. (VALENTE, V. A.; ALMEIDA, M. E. B.; GERALDINI, A. F. S, 2017, p.463)

Mudar uma metodologia de ensino demanda que todos os envolvidos (alunos, professor, pais e instituição) estejam cientes, dispostos e engajados em tal mudança. Qualquer mudança de metodologia altera as relações estabelecidas entre professor, aluno e saber.

Essa mudança é significativa se faz avançar as relações educacionais. Referimo-nos às relações que Brousseau (1986) definiu como contrato didático, isto é:

> [...] uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. (BROUSSEAU, 1986, p. 51)

O aluno espera que o professor tenha um conhecimento específico e esse, qual o caminho a ser seguido para aprender tal conteúdo, ou seja, o professor define quais atividades os alunos devem desenvolver de modo que progridam naquele conteúdo. Como o professor tem o saber específico e conhece todo o programa, ele faz escolhas adequadas de modo que a mediação entre os alunos e o saber seja a melhor possível, gerando uma relação de confiança entre professor e alunos.

No modelo de ensino tradicional, o contrato didático determina papéis unilaterais para professor e alunos: cabe ao professor organizar o conteúdo e explicitá-lo aos alunos; cabe aos alunos se apropriarem dos conteúdos explicitados. Quando há um contrato didático na qual o professor assume o papel de mediador, os alunos passam de meros receptores para exploradores, capazes de propor hipóteses, testá-las, refletir e conceituar. O professor organiza o conteúdo de modo que os alunos interagem com o saber podendo exercer sua criatividade e autonomia no processo de aprendizagem.

Durante muito tempo, como o professor detém o saber e define quais etapas um aprendiz deve seguir para obter aquele saber, a metodologia tradicional era um meio – muitas vezes o único – do aluno aprender um determinado conteúdo. Com o avanço das teorias da educação matemática, incluindo o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC), houve um favorecimento às proposições de novas metodologias para o ensino, em que o aluno seja mais participativo em sua aprendizagem, como por exemplo a metodologia que mescla TIC com atividades presencias, conhecida como ensino hibrido. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013),

> Em muitas escolas, o ensino híbrido está emergindo como uma inovação sustentada em relação à sala de aula tradicional. Esta forma híbrida é uma tentativa de oferecer “o melhor de dois mundos” — isto é, as vantagens da educação online combinadas com todos os benefícios da sala de aula tradicional. Por outro lado, outros modelos de ensino híbrido parecem ser disruptivos em relação às salas de aula tradicionais. Eles não incluem a sala de aula tradicional em sua forma plena; eles frequentemente têm seu início entre não-consumidores; eles oferecem benefícios de acordo com uma nova definição do que é bom; e eles tendem a ser mais difíceis para adotar e operar. Nos termos da recém-criada nomenclatura do ensino híbrido, os modelos de Rotação por Estações, Laboratório Rotacional e Sala de Aula Invertida seguem o modelo de inovações híbridas sustentadas. **Eles incorporam as principais características tanto da sala de aula tradicional quanto do ensino online**. Os modelos Flex, A La Carte, Virtual Enriquecido e de Rotação Individual, por outro lado, estão se desenvolvendo de modo mais disruptivo em relação ao sistema tradicional. (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p. 3, grifo nosso).

A maioria desses modelos não excluem o professor do processo de ensino. Eles ressignificam seu papel. O professor sai de uma postura de único detentor do conhecimento para um papel de mediador. Cabe a ele ainda organizar os caminhos que os alunos devem seguir para construir um determinado conhecimento, mas agora ele conta com outras ferramentas e práticas de ensino para lhe ajudar nesse processo.

Visando a uma proposta que faça com os alunos ressignifiquem seus papéis no processo de aprendizagem, esta pesquisa teve como meio de investigação uma sequência de atividades com base nos pressupostos da metodologia Sala de Aula Invertida (SAI), e aplicada aos alunos do terceiro ano da escola que trabalho. A proposta foi verificar como os alunos desse nível de ensino se comportavam para estudar de maneira autônoma conceitos relacionados aos números complexos. A análise dos dados foi apoiada na própria literatura sobre a Sala de Aula Invertida e no conceito de competências de Perrenoud.

Esta dissertação está dividida em dez capítulos.

O capítulo I é essa introdução.

No Capítulo II estão elementos relativos ao desenvolvimento desta pesquisa: justificativa, problemática, objetivo, questão de pesquisa, procedimentos teóricos e metodológicos e a revisão da literatura relativa à metodologia Sala de Aula Invertida, no contexto do ensino da matemática.

No capítulo III é tratado o objeto matemático desta pesquisa: os números complexos. É relatado aspectos da história do desenvolvimento dos números complexos, bem como sua definição.

O capítulo IV traz aspectos de tecnologias, e em especial tecnologias da informação e comunicação.

No capítulo V são apresentados elementos do conceito de metodologias ativas e ensino híbrido e, em especial, do submodelo de ensino híbrido: a Sala de Aula Invertida. Também traz o conceito de competências por Perrenoud e a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

O Capítulo VI traz a metodologia de pesquisa usada nesta pesquisa: a metodologia de pesquisa ação.

O Capítulo VII apresenta os participantes dessa pesquisa e, descreve e analisa cada uma das etapas da sequência de atividades propostas.

O Capítulo VIII apresenta as considerações finais com base nas análises pós aplicação da sequência de atividades. Há também indicações para futuras pesquisas e a proposta de uma nova sequência de atividades com base nas análises feitas dos resultados.

CAPÍTULO II

Este capítulo apresenta os elementos fundamentais para a organização e desenvolvimento desta pesquisa. São apresentados, justificativa, a problemática, o objetivo, a questão de pesquisa, os procedimentos teóricos e metodológicos e a revisão da literatura sobre o assunto.

2.1 JUSTIFICATIVA

Concordamos com (Severino, 2008, p.130), segundo o qual neste tópico do projeto, "cabe adiantar a contribuição que se espera dar com os resultados da pesquisa, justificando-se assim a relevância e a oportunidade de sua realização, mediante o desenvolvimento do projeto".

E por essa razão, a revisão da literatura foi considerada uma parte importante da pesquisa, pois por meio dela pode-se analisar como a temática desenvolvida nesta pesquisa foi abordada em trabalhos que têm a mesma linha – ou parte – dela. Consideramos o que dizem Silva e Menezes (2005), que

> a revisão de literatura resultará do processo de levantamento e análise do que já foi publicado sobre o tema e o problema de pesquisa escolhidos. Permitirá um mapeamento de quem já escreveu e o que já foi escrito sobre o tema e/ou problema da pesquisa. (SILVA; MENEZES, 2005, p.37)

Os dados da revisão foram obtidos por consulta ao site[1] da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Como busca[2] foi pesquisada a palavra-chave "aula invertida" que resultou em 77 registros (sendo que duas dissertações apareceram duas vezes). A escolha pelo termo "aula invertida" e não

---

[1] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[2] A data da busca foi em 19/10/2019

“sala de aula invertida” é porque a primeira opção engloba a segunda e traz mais resultados. As primeiras pesquisas resultantes da busca datam de 2015. Dos 75 registros distintos, há 61 dissertações e 14 teses. Porém, na área de matemática, há 9 pesquisas, todas dissertações. Consideramos que esse dado importante como justificava para o desenvolvimento desta pesquisa, pois indica que a área ainda está iniciando suas investigações a respeito.

Das 9 pesquisas, uma não tem divulgação autorizada e outra não , logo 8 dissertações foram analisadas. A Tabela 1 apresenta as 8 dissertações analisadas, organizadas em ordem crescente quanto ao ano de publicação.

Tabela 1: dissertações analisadas

Ano	Título da Pesquisa	Autor	Nível de Ensino
2017	Sala de aula invertida: proposta de intervenção nas aulas de matemática do ensino médio	Bravim, Josias Dioni	Ensino médio
2017	Possibilidades e limites de uma intervenção pedagógica pautada na metodologia da sala de aula invertida para os anos finais do ensino fundamental	Almeida, Braian Lucas Camargo	Ensino Fundamental
2017	Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática	Honorio, Hugo Luiz Gonzaga	Ensino Fundamental
2018	Ensino da matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a “sala de aula invertida”	Moreira, Rosilei Cardozo	Ensino Superior
2018	Uma proposta de aplicação das fórmulas de Moivre para potenciação e radiciação de	Santana, Herminio Edson Maia	Ensino Médio

	números complexos por meio da sala invertida		
2018	Sala de aula invertida: uma proposta de ensino e aprendizagem em matemática	Matos, Vinicius Costa	Ensino Fundamental
2018	Metodologias ativas: o papel da pesquisa na formação de professores de matemática	Machado, Daiane Renata	Ensino Superior
2018	Matemática e música: desvendando essa relação na perspectiva do ensino híbrido	Souza, Izabel Simone	Ensino Médio

Fonte: elaborado pelo autor

Dessas 8 dissertações, uma delas a de Machado (2018) investiga como a metodologia Sala de Aula Invertida colabora na formação de professores de matemática de uma IES, e, portanto, não foi considerada pois não há aplicação da SAI, como é o caso desta pesquisa. Para as demais consideraram-se seus objetivos, aplicações e considerações finais. Um dos itens considerados importantes foi aquele que os pesquisadores indicam qualidades e dificuldades para a implementação da metodologia SAI.

Bravim (2017) fez uma pesquisa com alunos do ensino médio para avaliar as contribuições que a metodologia SAI propicia. O autor relata que após a aplicação das atividades envolvendo a SAI, percebeu uma mudança no hábito dos alunos em relação ao uso dos *smartphones*: os alunos passaram a usar o aparelho para fazer pesquisas e tirar fotos da lousa (para ganhar tempo) e também houve uma redução do uso do aparelho para fins alheios à aula. Ainda segundo o autor, desse modo os alunos perceberam novas potencialidades para o aparelho, além do entretenimento.

Segundo Bravim (2017),

> Houve melhora na comunicação entre os alunos, tornando-se mais solícitos a ajudar os colegas e participando mais ativamente das resoluções, questionando passos mal compreendidos, além de formularem e testarem hipóteses. Além disso, os próprios alunos perceberam a maior interação entre eles, que inicialmente interagiam pouco uns com os outros. (BRAVIM, 2017, p.183)

Ainda segundo o autor,

> Destacamos ainda que observamos melhora na desenvoltura dos alunos em sala, inclusive enfrentado os erros de forma mais natural e descontraída [...], o que permite a aprendizagem sem pressões desnecessárias em busca de perfeição, mas como humanos, passíveis de erros e de reflexões e ações sobre esses erros. (BRAVIM, 2017, p.188)

Bravim (2017) destaca como uma dificuldade, que seus alunos não se habituaram com o MOODLE, tendo feitas as comunicações mais pelo aplicativo *whatsapp*. O autor sugere que o uso das TDIC deve começar o quanto antes, para que o uso de *e-mails* e/ou AVA seja algo mais natural.

O autor relata ainda uma dificuldade encontrada no implemento da metodologia SAI,

> [...] os alunos tendem a utilizar comunicadores instantâneos para sanar as dúvidas, em lugar do fórum do AVA. Acreditamos que isso ocorra por possibilitar uma visualização e resposta mais rápida por parte do professor e por evitar exposição no grupo, que pareceu ser preocupação da maioria dos alunos nos primeiros dias de trabalho. (BRAVIM, 2017, p.192)

Uma limitação encontrada por Bravim (2017) foi quanto aos alunos que não têm acesso à internet fora do ambiente escolar. O autor contornou essa situação imprimindo as atividades e cedendo o laboratório de informática da escola nos períodos de contraturno dos alunos.

Almeida (2017) fez uma aplicação da SAI com os anos finais do ensino fundamental, cujo objetivo era identificar as possibilidades e limites do uso da metodologia SAI. Para isso, o autor analisou sua aplicação da metodologia perante 5 categorias: 1) motivação; 2) material online; 3) resolução e apresentação de tarefas; 4) resolução dos desafios; 5) diversificação das tarefas.

Alguns pontos indicados pelo autor: 1) maior participação e interesse dos alunos, principalmente quando há jogos como tarefas desafiadoras; 2) além de assistirem às videoaulas preparadas pelo professor, os próprios alunos encontravam e compartilhavam com os colegas outros vídeos sobre os conteúdos que tinham que estudar, com algumas técnicas que nem o professor pesquisador iria mostrar para eles; 3) aprendizagem de forma colaborativa, principalmente entre os alunos.

Algumas dificuldades e limites apontados pelo autor: 1) o tempo de aula não foi suficiente para “fechar o ciclo” de algumas atividades, tendo algumas delas que serem interrompidas antes de serem finalizadas; 2) problemas com acesso à internet; 3) alunos que não assistiam às videoaulas antes da aula, não participavam das discussões em sala; 4) falta de clareza com os pais dos alunos sobre como funciona os ciclos da metodologia SAI; 5) falta de maturidade de alguns alunos; 6) falta de costume dos alunos de fazer atividades *online*.

Honorio (2017) fez uma aplicação da metodologia SAI com alunos do final do ensino fundamental. Com base nos resultados de sua pesquisa, o autor indica que na metodologia SAI, os alunos tiveram independência durante o processo de ensino, em que eles usaram o fórum do AVA para discutir com os demais colegas suas dúvidas. Também é salientado que os alunos compartilharam entre si suas próprias maneiras de compreender o conteúdo estudado, gerando outros caminhos para a compreensão do conteúdo. Outro fator que, segundo Honorio (2017), ajudou os alunos a se organizarem, foram os serviços de coordenação de comunicação sobre a disponibilidade e/ou prazo de entrega de atividades. Avisos via *email*, no AVA e notificações no canal do Youtube por exemplo, alertaram os alunos sobre a disponibilização dos materiais. O autor ainda destaca que os alunos solicitaram que a metodologia utilizada durante a pesquisa – SAI – fosse utilizada até o fim do ano letivo, o que mostra uma aceitação por parte dos alunos.

Moreira (2018) utiliza essa metodologia em um curso de nivelamento pré Cálculo e ressalta que as possibilidades propostas pelas SAI aliada as TIC apresentam vantagem, uma vez que os alunos puderam simular e aplicar os conceitos envolvidos de forma mais significativa. Moreira (2018) diz que:

> outra característica importante que vale ressaltar é a otimização do tempo na construção de modelos gráficos, desenhos geométricos, etc., bem como a sua movimentação no espaço e principalmente a precisão dos traços, atividade essa que para ser reproduzida várias vezes pelo professor em cada turma diferente que ele leciona, demanda muito tempo, tempo este que pode ser melhor aproveitado com os alunos esclarecendo dúvidas e particularidades dos assuntos. (MOREIRA, 2018, p. 35)

Outra constatação da autora é sobre a personalização do ensino que a SAI permite. Sobre isso, Moreira (2018) relata que,

> [...] esse modelo permite uma diversidade de atividades, de modo que todas convergem pra uma espécie de trilha de aprendizagem, onde cada aluno se torna responsável pelo seu aprendizado de forma mais ativa, apropriando-se de uma parte desse currículo de forma independente, praticando assim sua autonomia, seu poder de escolha, de decisão de onde e quando é o melhor momento para assistir ao vídeos, os tutoriais, as leituras ou qualquer que seja a técnica empregada pelo professor e disponibilizada para o aluno. (MOREIRA, 2018, p. 36)

Moreira (2018) destaca ainda que a possibilidade de reaproveitar de forma satisfatória o tempo de aula é uma das grandes vantagens da SAI, uma vez que, segundo a autora, essa metodologia permite que o aluno esteja na presença do professor no momento em que mais tem dificuldades, ou seja, durante a resolução de exercícios e problemas.

A proposta de Santana (2018) para a SAI, foi que os alunos de sua turma do 3° ano do ensino médio fossem divididos em três grupos, em que cada grupo iria estudar uma parte da teoria dos números complexos e depois, preparar e apresentar uma aula para os demais colegas da sala. Não é relatado durante a pesquisa, mas como os conteúdos abordados por alguns grupos eram pré-requisito dos outros, tudo indica que essa atividade não foi síncrona, ou seja, os três grupos não trabalharam ao mesmo tempo.

Entre as análises feita por Santana (2018) há destaque para o seguinte sobre o uso da metodologia SAI: “[...] a possibilidade de independência e liberdade por parte do aluno, permitindo que este se depare com outras metodologias e explicação de outros professores durante a pesquisa que antecede a apresentação”.

Santana (2018) faz uma análise de algumas atividades desenvolvidas pelos alunos na perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica. O autor apresenta exemplos em que os alunos realizaram tratamentos e conversões de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica.

Matos (2018) fez uma aplicação da metodologia SAI com os anos finais do ensino fundamental. O autor relata que teve alguns problemas com a aplicação da SAI pois nem todos seus alunos tinham acesso à internet. Ele reitera a importância da escola como ambiente de universalização, principalmente quando se trata de alunos mais carentes. Matos (2018) ressalta ainda que o uso das TIC na implementação de sua pesquisa, ajudaram no processo de *feedbacks* instantâneos, de modo que os alunos tinham indicativos mais rápidos de onde precisavam melhorar.

Com a implementação da metodologia SAI denominada de modelo cíclico SAIMAT: Sala de Aula Invertida de Matemática, Matos (2018) relata que,

> Observamos no modelo cíclico da SAIMAT o quanto a colaboração entre os pares e o trabalho em grupo podem ser potencializadores do processo de educação, isso tem efeitos para além do campo do conhecimento pois também exercita o lado humano no que diz respeito à redução das diferenças em busca de uma sociedade com mais equidade e oportunidade para todos. O trabalho em grupo permitiu que todos fossem beneficiados, os alunos que tinham mais facilidade aperfeiçoavam seus conhecimentos ao ajudar os colegas com mais dificuldade, esses por sua vez tinham agora a oportunidade

> de acompanhar a turma sem se sentirem deixados para trás ou desmotivados por não entenderem algo por conta própria. (MATOS, 2018, p.113)

O autor ainda ressalta que um de seus alunos, por necessidades de saúde, não pode acompanhar regularmente as aulas presenciais. Com tudo, com a SAI, esse aluno pôde acompanhar o conteúdo mesmo sem poder participar dos encontros presenciais.

Souza (2018) buscou analisar as possibilidades do desenvolvimento do ensino híbrido para a aprendizagem de matemática e música no ensino médio e, se é possível explorar a função trigonométrica seno usando a música como elemento motivacional. A autora propôs uma sequência baseada em duas metodologias: SAI e rotação por estações. Souza (2018) relata que os alunos se sentiram motivados com a dinâmica proposta – misto de SAI com rotação por estações – para estudar gráficos de funções seno.

Segundo Creswell (2007, p.96), “Depois de apresentar o problema e rever a literatura, o pesquisador identifica as deficiências encontradas nessa literatura”. De um modo geral todos os trabalhos recomendam a SAI como uma proposta de mudança dos modelos de metodologia para o ensino. Algumas dificuldades encontradas como: 1) clareza com os alunos e pais sobre a mudança de metodologia; 2) garantia de que os alunos terão acesso aos materiais extraclasse e; 3) incentivo para que os alunos usem os AVA, servirão como alertas para esta pesquisa. Dos pontos positivos: 1) a SAI proporciona a oportunidade de alunos que não podem comparecer as aulas acompanharem o curso a distância, mesmo que em parte não tenham participado das atividades presenciais; 2) uma interação maior entre os alunos; 3) uma gerência mais customizada do processo de educação.

As demais pesquisas relatam o engajamento dos alunos, fator que é muito importante nesse processo, mas cujas análise não focam a aprendizagem de conteúdos, um dos pontos de vista da educação matemática. Nesta pesquisa a intenção principal é avaliar efeitos na aprendizagem, quando se analisa as atividades que os alunos entregaram na atividade de controle. Essas considerações justificam o desenvolvimento desta pesquisa, à qual esperamos tenha potencial de contribuir com outros aspectos além dos expostos na revisão bibliográfica, de modo que professores que utilizam/utilizarão a metodologia SAI, tenham mais dados para viabilizar o uso da SAI como uma alternativa metodológica.

2.2 PROBLEMÁTICA

De acordo com Laville e Dionne (1999; p.98) “Problemática é o conjunto dos fatores que fazem com que o pesquisador se conscientize de um determinado problema, veja-o de um modo ou de outro, imaginando tal ou tal eventual solução”

É importante, portanto, quando se tem um propósito de apresentar um problema de pesquisa em um tema, verificar se ele está problematizado e, consequentemente, porque ele precisa ainda ser pesquisado. (SEVERINO, 2008, p.130)

Em nosso caso, o tema trata do questionamento das metodologias tradicionais, na medida em que valorizamos a autonomia dos alunos em seus processos de aprendizagem, preocupamo-nos com as diferenças existentes entre os alunos de uma sala de aula, e buscamos um melhor aproveitamento da sala de aula, entre outras condições que possam favorecer a aprendizagem. E buscamos na literatura elementos que problematizam esse tema, nas limitações de uma dissertação de mestrado. Iniciamos a exposição desses elementos trazendo alguns autores que expõem seus pensamentos a respeito dos problemas que envolvem o tema.

Alguns deles indicam que:

> Quando o foco é aprendizagem matemática, a interação é uma condição necessária no seu processo. Trocar ideias, compartilhar as soluções encontradas para um problema proposto, expor o raciocínio, são as ações que constituem o “fazer” Matemática. (BORBA; MALHEIROS; AMARAL; 2011, p.29)

Outros que:

> As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras. (BERBEL, 2011, p. 28)

As escolas têm investido na formação de professores em novas metodologias de ensino, em especial as consideradas metodologias ativas, que segundo Moran (2015) trata-se de uma mudança mais suave no processo de ensino:

> As instituições educacionais atentas às mudanças escolhem fundamentalmente dois caminhos, um mais suave - mudanças progressivas - e outro mais amplo, com mudanças profundas. No caminho mais suave, elas mantêm o modelo curricular predominante – disciplinar – mas priorizam o envolvimento maior do aluno, com metodologias ativas como o ensino por

projetos de forma mais interdisciplinar, o ensino híbrido ou *blended* e a sala de aula invertida. (MORAN, 2015, p.17)

De acordo com os pesquisadores e adeptos da metodologia SAI, uma das vantagens que se consegue é a personalização do ensino, pois uma vez que os alunos estarão fora da sala de aula acessando os materiais disponibilizados pelo professor, eles podem ver e rever quantas vezes considerar necessário para que entendam um determinado conceito.

Outra vantagem, de o aluno estudar dessa forma em casa, é a diversidade de recursos que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) possibilitam. O aluno pode assistir a um vídeo, acessar um site, responder um questionário online, interagir com algum simulador, fazer perguntas para seus colegas mesmo que estejam em lugares diferentes, entre outros. As TIC facilitaram as possibilidades de acesso às informações. Sabendo como utilizá-las, as TIC se tornam uma ferramenta que pode ajudar no processo de ensino.

Juntando os dois pontos destacados anteriormente, o aluno passa a ser o agente principal no processo de ensino. Além do aluno acessar os materiais disponibilizados pelo professor, fazer anotações e perguntas, recorrendo ao professor e aos colegas para ajudá-lo na compreensão dos conceitos, ele pode expandir suas fontes de informação, principalmente por meio das TIC. Buscar outras fontes de explicação que versem sobre aquele assunto ou sobre um assunto que seja pré-requisito para aquele que está sendo estudado naquele momento. Por exemplo: um aluno pode estar estudando o conceito de função inversa por meio de uma metodologia SAI. Durante uma videoaula, aparecem os termos domínio, contradomínio e imagem de uma função. Se o aluno sabe/lembra esses conceitos, segue com o estudo da função inversa. Caso o aluno não lembre/saiba esses conceitos, ele pode buscar novas fontes de estudo que tratem sobre esses tópicos. Desse modo, o aluno controla o ritmo de seus estudos de acordo com seus conhecimentos, personalizando e avançando no seu processo de aprendizagem de modo que não fiquem lacunas de domínio dos conceitos estudados.

Bergmann e Sams (2016) ainda relatam que,

> Pedimos a todos os alunos não só que mostrem suas anotações, mas também expressem alguma dúvida ou questionamento que lhes tenha ocorrido enquanto assistiam ao vídeo. Essas perguntas e resposta individuais são muito importantes, pois exigem que todos os alunos interajam com o professor quase todos os dias. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.91)

O principal papel do professor agora é o de esclarecer as dúvidas e corrigir os erros, pois agora sua função em sala de aula é orientá-los e não mais transmitir informações (BERGMANN; SAMS, 2016). Com isso, o aluno passa a ser o centro no processo de aprendizagem, e o professor passa a ser o responsável por preparar o ambiente para que o aluno assuma essa postura.

Uma das formas de se implementar a metodologia SAI é por meio de videoaulas que o professor pode gravar/selecionar e/ou disponibilizar para os alunos outros materiais – livros, sites, simuladores, experiências entre outros – que os alunos devem consultar para estudarem fora da sala de aula. Mas qual a diferença entre um professor falando ao vivo na sala de aula e um vídeo gravado do professor falando a mesma coisa? Em ambos os casos o aluno poderia ter a mesma postura: ficar sentado, ouvindo e fazendo anotações daquele conteúdo exposto. Sobre isso, Bergmann e Sams (2016) relatam que:

> Quando damos aos alunos a capacidade de “pausar o professor”, eles têm a chance de digerir a exposição em seu próprio ritmo. Recomendamos, em especial, aos alunos mais vagarosos que usem sem inibição o botão de retrocesso, para que ouçam nossa explicação mais uma vez e a absorvam profundamente. Se ainda assim não compreenderem, trabalharemos com eles individualmente ou em pequenos grupos na sala de aula. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.22)

Essa pesquisa se insere nessa problemática do esgotamento das metodologias tradicionais, no movimento de passagem para o uso no ensino básico de novas metodologias nas salas de aula. Muitos problemas estão abertos para a investigação desse tema. Esta pesquisa tem esse alcance.

2.3 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA

A hipótese de que a metodologia tradicional tem seu esgotamento anunciado, a problemática revelada, no item anterior, envolvendo fatores de favorecimento de aprendizagem como: a necessidade de uma pedagogia diferenciada, a importância do incentivo à autonomia do aluno na construção de seus conhecimentos, a disponibilização de novas tecnologias para o ensino, nos levaram a declarar como objetivo desta pesquisa o seguinte: “investigar se o uso de uma metodologia ativa, como a de Sala de Aula Invertida traz avanços em aspectos que favorecem a aprendizagem no ensino de um conceito matemático, mais especificamente, os números complexos.”

A partir do objetivo estabelecido elaboramos a questão norteadora que possibilitaria atingi-lo, tomando por base algumas considerações, que enunciamos no que segue.

A definição de um problema começa por meio da identificação de uma situação que nos perturba de alguma forma. Uma pesquisa científica traz luz ao problema, por meio de teorias consagradas, tentando solucionar – ou propor uma tentativa de solução – para o tal problema. Segundo Rudio (1995),

> "Formular o problema consiste em dizer, de maneira explícita, clara, compreensível e operacional, qual a dificuldade com a qual nos defrontamos e que pretendemos resolver, limitando o seu campo e apresentando suas características. Desta forma, o objetivo da formulação do problema é torná-lo individualizado, específico, inconfundível" (RUDIO, 1995, p. 75).

Na busca de atingir o objetivo declarado elaboramos a seguinte questão de pesquisa:

Quais ganhos à aprendizagem adviriam ao se propor estratégias didáticas que preveem uma proposta baseada no modelo de Sala de Aula Invertida com alunos do ensino médio que estão habituados a um ensino de aulas tradicionais, para atividades dos números complexos?

CAPÍTULO III

Este capítulo traz alguns aspectos históricos dos números complexos. Para essa abordagem, foi utilizado o livro “O romance das equações algébricas” de Gilberto G. Garbi. Trata-se de um livro que relata o contexto histórico envolvendo diferentes tipos de equações, entre elas, a busca de soluções para as equações de terceiro grau, busca essa culminante para o surgimento dos números complexos.

3.1 O OBJETO MATEMÁTICO

O objeto matemático envolvido desta pesquisa é o número complexo. Este objeto foi escolhido devido à programação de conteúdos regulares da escola dos sujeitos desta pesquisa tinham que estudar.

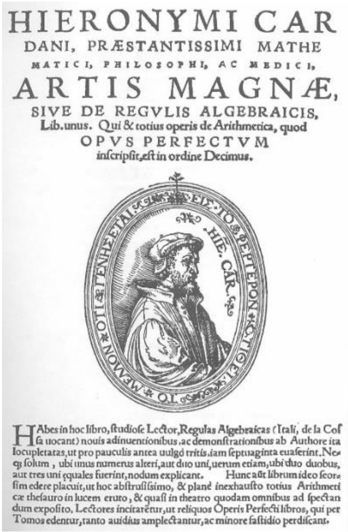
3.2 ALGUNS ASPECTOS DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O desenvolvimento dos números complexos se deu por meio do estudo de equações algébricas do terceiro grau. Os matemáticos já tinham dado como certo o método para determinar as soluções de equações algébricas de segundo grau, apresentando para isso uma fórmula em que aparece um radical quadrático. E no caso em que o radicando fosse um número negativo, a equação não tinha solução, ou seja, o radical quadrático de um radicando negativo não resultava um resultado real.

Alguns matemáticos se envolveram numa disputa pela resolução das equações de terceiro grau, entre eles: Girolamo Cardano e Nicolò Fontana, o Tartaglia.

Girolamo Cardano nasceu em Pavia em 1501 e faleceu em Roma em 1576. Dentre algumas publicações de Cardano encontra-se a ARTIS MAGNAE SIVE DE REGULIS ALGEBRAICIS, mais conhecida por ***Ars Magna***, publicada em 1545.

Figura 1: Frontispício da célebre Ars Magna (1545), de Cardan*o*



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit,eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna

O matemático italiano Nicolò Fontana nasceu em Bréscia em 1501 e faleceu em 1557 em Veneza. Fontana teve um ferimento profundo na boca quando era criança, o que lhe deixou com deficiência para falar, sendo apelidado de Tartaglia, que quer dizer gago.

Consta que por volta de 1510, um matemático chamado Scipione del Ferro encontrou uma fórmula para resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Antes de morrer e sem publicar tal descoberta, del Ferro revelou-a para seu aluno Antonio Maria Fior.

Naquela época era normal uma pessoa considerada sábia (ou não) desafiar outra para resolver problemas, na tentativa de ganhar notoriedade. Eis que Fior elegeu Tartaglia para um desafio, em que entre outros problemas, iria desafiar Tartaglia a resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Tartaglia ficou sabendo que Fior detinha um método descoberto por seu falecido professor del Ferro para resolver equações de terceiro grau. Tartaglia correu e conseguiu não só encontrar a fórmula para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, como também para casos do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Ao final desse embate, Fior saiu humilhado uma vez que não conseguiu resolver os problemas propostos por Tartaglia e por querer ganhar notoriedade às custas de seu falecido professor del Ferro.

Sabendo da descoberta de Tartaglia sobre as equações de terceiro grau, Cardano pediu-lhe que revelasse a ele a fórmula para publicá-la em seu livro. Tartaglia não aceitou, alegando que ele mesmo iria publicá-la em um livro no futuro. Cardano acusou-o de mesquinho, egoísta e disse que ele não estava interessado em ajudar no desenvolvimento da ciência. Passado algum tempo, após Cardano fazer juramentos sobre o Evangelho para que Tartaglia lhe revelasse a fórmula, jurando que não iria publicá-la, Tartaglia revelou-a para Cardano.

Como era de se esperar, Cardano quebrou suas promessas e juramentos, e publicou a fórmula no livro ***Ars Magna,*** segundo Garbi (2007). Mesmo Tartaglia tendo o denunciado, a fórmula para resolver equações de terceiro grau acabou por ficar conhecida como fórmula de Cardano.

A fórmula que gerou toda essa briga entre esses matemáticos é a seguinte:

Dada uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, pode-se obter o valor de x por meio da fórmula $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$.

Para demonstrar essa relação, devemos escrever $x = u + v$. Ao substituí-lo na equação $x^3 + px + q = 0$, obtemos,

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

ou ainda,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Assim, se determinarmos números u e v tais que, $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\frac{p}{3}$, então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Ao elevarmos $uv = -\frac{p}{3}$ ao cubo dos dois lados, obtemos $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Assim, basta determinar dois números u^3 e v^3 de tal modo que a soma seja $-q$ e o produto seja $-\frac{p^3}{27}$. Os valores procurados são raízes da equação na variável w,

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Ao resolver a equação anterior, encontramos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

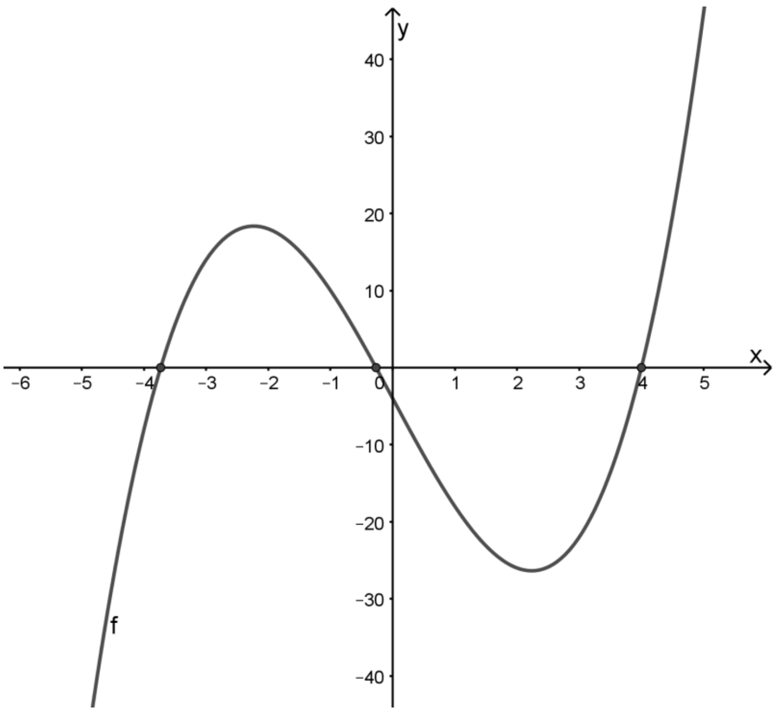
e consequentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Vale ressaltar que uma equação geral do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, pode ser transformada em uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, basta fazer $x = x' + m$ e obter um valor conveniente para m de modo que ao substituir x por $(x' + m)$ na equação geral do 3º grau, o termo de 2° grau se anule. Ao obter as soluções dessa nova equação, obtêm-se as soluções da equação geral.

A fórmula de Cardano (Tartaglia!) funciona muito bem. Só que para algumas equações, a fórmula apresentou alguns resultados "estranhos". É o caso por exemplo da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. É fácil constatar que $x = 4$ é uma das raízes dessa equação (as outras são $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$). A Figura 2 representa a função $f(x) = x^3 - 15x - 4$. Foi construída com auxílio do software Geogebra.

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$



Fonte: o autor

Ao aplicar a fórmula de Cardano (Tartaglia!), obtemos $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Neste momento os matemáticos não sabiam como dar continuidade aos cálculos: eles conheciam as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e sabiam que a fórmula de Cardano (Tartaglia!) funcionava, mas não sabiam como trabalhar com essas raízes quadradas de números negativos.

Quem conseguiu dar um passo importante no tratamento desses radicais quadráticos de números negativos foi o matemático e engenheiro hidráulico Rafael Bombelli, nascido em Bolonha em 1530. De acordo com Garbi (2007), Bombelli baseou-se em um "pensamento rude" como ele mesmo relatou no livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica* de 1572. Bombelli trabalhou com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e com a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Generalizando, ele considerou os radicandos cúbicos $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, na forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, $a \neq 0 \; e \; b \neq 0$, respectivamente, ou seja:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Ao operar com as raízes quadradas de números negativos, Bombelli estipulou algumas regras para o tratamento com o $\sqrt{-1}$:

$$\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right) = -1$$

$$(\pm 1)\left(\sqrt{-1}\right) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)\left(-\sqrt{-1}\right) = \mp\sqrt{-1}$$

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right) + \left(c + d\sqrt{-1}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

A seguir será apresentada uma demonstração que implica em $a = 2$ e $b = 1$.

Como uma das raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é 4, e considerando $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$, podemos estabelecer a seguinte igualdade,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

$$a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$$

$$2a = 4$$

$$a = 2.$$

Por outro lado, elevando ao cubo os dois membros da igualdade $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}$, obtemos:

$$a^3 - 3ab + (3a^2 - b)\sqrt{-b} = 2 + \sqrt{-121},$$

e

$$a^3 - 3ab - (3a^2 - b)\sqrt{-b} = 2 - \sqrt{-121}.$$

Somando membro a membro as duas equações anteriores, obtemos $2a^3 - 6ab = 4$, ou ainda,

$$a^3 - 3ab = 2.$$

Como $a = 2$, ao substituir na equação anterior, obtemos,

$$2^3 - 3 \cdot 2 \cdot b = 2$$

$$-6b = -6$$

$$b = 1.$$

Aqui é importante fazer uma observação: posteriormente com o desenvolvimento dos números complexos, em especial as operações de radiciação, foi possível verificar que a fórmula de Cardano (Tartaglia!) fornece as três soluções de uma equação de 3° grau. Assim, é correto estabelecer a igualdade $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$ para determinar os valores de a e b de modo que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}$. Se igualarmos $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ com uma das outras raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obteremos outros valores para a e b.

Com essas operações estabelecidas, o desenvolvimento da teoria dos números complexos começava a emergir.

O desenvolvimento da teoria dos números complexos continuou com a colaboração de outros matemáticos, mas só avançou bastante após quase 200 anos, com o matemático suíço Leonhard Euler, nascido em 1707 na Basiléia. Segundo Garbi (2007), Euler foi o responsável pela designação $\sqrt{-1} = i$ e por pelo desenvolvimento de outras partes da teoria dos números complexos, em especial as representações e operações de números complexos na forma trigonométrica. A fórmula de potenciação dos números complexos na forma trigonométrica,

$$z^n = [\rho(cos\theta + isen\theta)]^n = z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

ficou conhecida como fórmula DeMoivre, em referência ao matemático francês Abraham DeMoivre, nascido em 1667, em Vitry-le-François. Apesar desse reconhecimento, a fórmula já era conhecida antes de DeMoivre. Esses equívocos eram comuns antigamente perante a dificuldade de comunicação que existia naquela época.

Euler descobriu que qualquer número complexo não nulo tem exatamente n raízes enésimas (n natural não nulo). Com a teoria de radiciação de números complexos, é possível justificar que, de fato, a fórmula de Cardano (Tartaglia!) resolve muito bem, inclusive para determinar as três raízes de uma equação do terceiro grau. Observe que na fórmula de Cardano (Tartaglia!),

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

há a soma da extração de duas raízes cúbicas. Cada uma dessas raízes cúbicas fornece três resultados gerando 9 combinações que são possíveis soluções para a equação. Dentre essas 9, apenas três são de fato raízes, e as outras 6 devem ser descartadas. Isso acontece pelo fato de ao longo do desenvolvimento da fórmula, ser necessário elevar algumas potências e depois extrair algumas raízes, invalidando alguns resultados encontrados.

O geógrafo dinamarquês Gaspar Wessel (1745-1818) e o bibliotecário genebrino Jean-Robert Argand (1768-1822), fizeram contribuições importantes para o desenvolvimento de uma representação geométrica dos números complexos.

3.3 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Seja o sistema retangular de coordenadas $\mathbb{R}^2$. Sejam A, B, C ... a designação dos pontos desse sistema e a notação (a, b) que indica o ponto de abscissa **a** e ordenada **b**. Dados os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$,

1) definimos como $A + B$ o ponto C de abscissa $a + c$ e ordenada $b + d$, ou seja,

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a + c, b + d)$$

2) definimos como produto $A \cdot B$ o ponto P de abscissa $ac - bd$ e ordenada $ad + bc$, ou seja,

$$A \cdot B = (ac - bd, ad + bc)$$

Uma vez definidas as operações de soma e produto nesse sistema, podemos provar as propriedades da adição e do produto.

A) Propriedades da Adição

A1) Comutatividade

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b) \ \ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

A2) Associatividade

$$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = [(a,b) + (c,d)] + (e,f) \ \ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

A3) Elemento neutro

$$(a,b) + (0{,}0) = (0{,}0) + (a,b) = (a,b) \ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

A4) Existência do simétrico

Para cada ponto (a,b) existe um único ponto $(-a,-b)$ tal que

$$(a,b) + (-a,-b) = (0{,}0).$$

Desse modo, $-(a,b) = (-a,-b)$.

P) Propriedades do Produto

P1) Comutativa

$$(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b) \ \ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

P2) Associatividade

Dados os pontos $(a,b), (c,d)\ e\ (f,d)$, temos que:

$$[(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e,f) =$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

e

$$(a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)] = (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) =$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

P3) Elemento neutro

$$(a,b) \cdot (1{,}0) = (1{,}0) \cdot (a,b) = (a,b) \ \ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

P4) Existência do inverso

Seja $(a,b) \neq (0{,}0)$. Temos que:

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1{,}0)$$

Logo, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

D) Distributividade

$$[(a,b) + (c,d)] \cdot (e,f) = (a + c, b + d) \cdot (e,f) =$$

$$= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de)$$

e

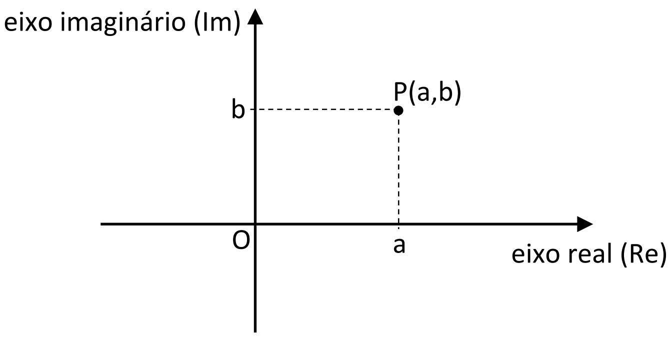
$$(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)=(ae-bf,af+be)+(ce-df,cd+de)=$$
$$=(ae-bf+ce-df,af+be+cf+de)$$

Definição: O corpo dos números complexos é o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações de adição e multiplicação como acabamos de indicar, que satisfazem as 9 propriedades demonstradas. Esse corpo é indicado por $\mathbb{C}$ e cada elemento desse corpo é chamado de número complexo.

3.4 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Um número complexo z é, portanto, representado na forma $z=(a,b)$. Podemos a partir da definição de adição e de multiplicação de complexos escrever $(a,b)=a+(0,1)$. Considerando o complexo $(0,1)=i$ que é outra forma de expressar o complexo $z=a+bi$. Então um ponto P pode ser representado no plano cartesiano, em que o eixo das abcissas é o eixo da parte real de z e, o eixo das ordenadas o eixo da parte imaginária de z, como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3: Plano Complexo ou plano de Argand-Gauss



Fonte: o autor

O ponto P é chamado de afixo ou imagem geométrica de z.

CAPÍTULO IV

Este capítulo aborda alguns aspectos sobre o conceito do termo tecnologia. Também é apresentado o conceito de tecnologias da informação e comunicação (TIC).

4.1 O QUE SÃO TECNOLOGIAS?

Atividades do nosso dia a dia, como cozinhar, ir ao trabalho, viajar ou simplesmente escovar os dentes, só são possíveis graças as diversas tecnologias que foram desenvolvidas e aperfeiçoadas ao longo do tempo. Elas se tornaram fundamentais e, em alguns casos, até necessárias para a nossa sobrevivência.

O conceito de tecnologia não se resume a simplesmente meios de comunicação ou aparelhos eletrônicos em geral. Kenski (2003, p. 18) apresenta uma definição do que seriam tecnologias: “conjunto de conhecimentos e princípios científicos, que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade”.

Algumas são tão naturais no nosso dia a dia, como a lousa e o giz da sala de aula por exemplo, que não nos damos conta de que também se tratam de tecnologias. Essas tecnologias que são tão comuns no nosso dia a dia, são chamadas de “tecnologias invisíveis” segundo Bruce e Hogan (1998), pois são tão naturais que parecem existir desde sempre.

> [...]passamos a olhar para a tecnologia como um complemento à vida, para ver a vida através dessa tecnologia. A incorporação da tecnologia na matriz de nossas vidas a torna invisível. De fato, quanto maior a sua integração nas práticas diárias, menos ela é vista como uma tecnologia.(BRUCE; HOGAN; 1998, p.270, tradução nossa)

Algumas tecnologias são tão antigas, como a alavanca por exemplo, que remetem a tempos imemoráveis. Outras vão sofrendo evoluções ao longo do tempo e/ou sendo substituídas por novas tecnologias. No caso da educação matemática, a tábua de logaritmos desenvolvida pelo inglês John Napier no século XVI representa um exemplo de uma tecnologia revolucionária para a época, mas que foi substituída pelo advento de novas tecnologias, no caso, calculadoras e computadores, que conseguem fornecer valores mais rápidos e precisos do que a tábua de logaritmos.

Outras tecnologias não desaparecem e sim, entraram num processo chamado de convergência. Segundo Oliveira *et al.* (2018) convergência pode ser definada como:

> “[...] o potencial que determinadas tecnologias possuem, na dimensão aplicada, para serem usadas conjuntamente, em processos mais ou menos integrados, nos quais são importantes as demandas impostas pelas atividades, as aprendizagens desenvolvidas pelas pessoas em relação aos conhecimentos envolvidos e a fluência acrisolada em relação a cada uma das formas de uso dos dispositivos” (OLIVEIRA *et al*, 2018, p. 27-28)

É o caso por exemplo da informática que fez com que textos, vídeos, fóruns, animações entre outras tecnologias, se unam num processo de convergência, gerando assim um rol de novas combinações para que juntas, ofereçam mais possibilidades de interação.

4.1.1 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Muitas tecnologias foram desenvolvidas pela necessidade do ser humano conseguir fazer ou facilitar a execução de uma determinada atividade. A comunicação sempre teve um lugar de destaque quando se pensa em novas tecnologias, porque é por meio da comunicação que podemos expor, compartilhar e debater nossas ideias.

Desde o desenvolvimento da linguagem, o ser humano sempre investiu em melhorar os meios de comunicação. A criação da escrita, dos livros, da impressão dos jornais, do telefone, do rádio, da televisão, do computador, da internet, dos celulares e dos smartphones, são exemplos de como a comunicação foi ficando cada vez mais imediata, ao alcance de todos e evoluindo de um sistema unidirecional (do emissor para o receptor) para um sistema bidirecional. Hoje qualquer pessoa que tenha acesso à internet pode compartilhar informações e/ou criticar informações advindas de terceiros. Há de se tomar cuidado para não confundir conhecimento com informação. A internet possibilitou o acesso a uma infinidade de informações que podem ou não gerar conhecimento.

Sobre as TIC e a educação, Valente (2014) ressalta que,

> Infelizmente as mudanças observadas no campo da comunicação não têm a mesma magnitude e impacto com relação à educação. Esta ainda não incorporou e não se apropriou dos recursos oferecidos pelas TDICs. Na sua grande maioria, as salas de aulas ainda têm a mesma estrutura e utilizam os mesmos métodos usados na educação do século XIX: as atividades curriculares ainda são baseadas no lápis e no papel, e o professor ainda ocupa a posição de protagonista principal, detentor e transmissor da informação. (VALENTE, 2014, p.142)

As TIC têm um grande potencial quando se trata de educação, mas como destacou Valente (2014), não vemos toda a revolução e potencialidade que poderia ser causada pelas TIC na sala de aula. Para explorar o que as TIC podem oferecer na educação, não basta o acesso, é preciso conhecer a tecnologia e compreender quais as potencialidades que aquela tecnologia aliada aos interesses de aprendizagem, pode oferecer, gerando um domínio sobre o saber fazer tecnológico. Sobre este saber, Oliveira (2013) relata que,

> [...] o domínio das ferramentas inerentes à interface é condição para usá-la com fluência, de modo que, a partir daí, a tecnologia associada possa se transformar em extensão de memória, do pensamento, de procedimentos de construção e de conjectura, ou seja, aprender a usar, de maneira fluente, o dispositivo, o software, o artefato (OLIVEIRA, 2013, p.7).

Independente da tecnologia, o professor ainda é o principal agente responsável pela transformação da informação em conhecimento por meio da fluência entre estudantes e as tecnologias. Os alunos têm acesso à informação por diferentes tipos de tecnologias – livros, revistas, televisão, internet entre outros –, mas o professor é a peça chave nesse processo de propiciar a interação que transforme informação em conhecimento. Demo (2008) ressalta que,

> Temos que cuidar do professor, pois todas as mudanças só entram bem na escola se entrarem pelo professor, ele é a figura fundamental. Não há como substituir o professor. Ele é a tecnologia das tecnologias, e deve se portar como tal. (DEMO, 2008, p.134)

CAPÍTULO V

Este capítulo aborda aspectos teóricos desta pesquisa, como os elementos das metodologias ativas segundo Jonathan Bergmann e Aaron Sams, o conceito de competências segundo Perrenoud e o conceito de registros de representação semiótica de Raymond Duval.

5.1 METODOLOGIAS ATIVAS

Dentre os vários modelos metodológicos denominados de ensino híbrido, é apresentado aqui o modelo conhecido como sala de aula invertida (SAI), o modelo utilizado nesta pesquisa.

Na literatura sobre o assunto, aparecem dois termos: "aprendizagem ativa" e "metodologias ativas". De acordo com Valente (2017), o termo "aprendizagem ativa" aparece por conta de uma tradução mais literal do termo em inglês *active learning*. Segundo Valente (2017), esse termo traz uma redundância, uma vez que a aprendizagem acontece em função da interação do sujeito com o meio, da realização de atividade mentais, não sendo possível aprender alguma coisa sem que o sujeito não seja ativo. Assim, apesar de aparecer o termo "aprendizagem ativa", o termo "metodologias ativas" parece mais coerente com nossa proposta de trabalho.

O conceito de metodologias ativas está ligado ao processo de colocar os alunos como protagonistas de sua aprendizagem. Segundo Valente (2017), podemos classificar metodologias ativas como

> "[...] estratégias pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem no aprendiz, contrastando com a abordagem pedagógica do ensino tradicional, centrada no professor, que transmite informação aos alunos." (VALENTE, 2017, p.463)

É possível adaptar modelos conhecidos como tradicionais, para modelos mais ativos. Segundo Moran (2015),

> Um bom professor pode enriquecer materiais prontos com metodologias ativas: pesquisa, aula invertida, integração sala de aula e atividades online, projetos integradores e jogos. De qualquer forma esses modelos precisam também evoluir para incorporar propostas mais centradas no aluno, na colaboração e personalização. (MORAN, 2015, p.23)

A perspectiva apresentada por Moran (2015) mostra que o professor tem um papel fundamental para a elaboração e execução de atividades que demandam metodologias ativas. Nem o docente e nem o conhecimento são mais o foco no processo de aprendizagem, mas o docente ainda é o responsável por todo o processo. O professor, com base na sua formação e experiência, tem o conhecimento sobre quais caminhos os alunos devem tomar para que desenvolva seu conhecimento sobre um determinado conteúdo, tendo a possibilidade de ajustar ou até mudar completamente o direcionamento de atividades de acordo com suas perspectivas e metas para aquele conteúdo.

Uma das formas de implementar metodologias ativas, é por meio do chamado “ensino híbrido”.

5.2 ENSINO HÍBRIDO

A palavra “hibrida” remete a algo que é composto por elementos diferentes. A educação já é hibrida por natureza, pois aprendemos de diferentes formas em diferentes lugares, o tempo todo. Quando se pensa em educação na escola, a ideia de híbrido já é intrínseca ao processo de ensino e aprendizagem, pois há uma composição de diferentes meios visando o ensino, como aulas expositivas, atividades em laboratórios, trabalhos, listas de exercícios, seminários, brincadeiras educativas, entre outros.

Porém, o termo “Ensino Híbrido” nos últimos anos ficou conhecido e se remete, de modo geral, como um processo de ensino em que, parte é feito presencial e parte é feito de maneira *online*, mas não apenas isso.

Horn e Staker (2015), entrevistaram mais de 150 responsáveis por programas considerados de Ensino Híbrido para fazer uma definição do termo. Segundo esses autores, há três fatores importantes em um modelo de Ensino Híbrido.

1) Em parte, por meio do ensino *online*. O aluno deve estudar um determinado conteúdo formal – conteúdo que faz parte da matriz curricular – de maneira *online*, em que ele pode controlar o tempo, o ritmo, o lugar e/ou o caminho, ou seja, o aluno tem um controle maior sobre seus estudos.

2) Em parte, em um local físico. Esse local – geralmente a escola tradicional – conta com a supervisão de um professor ou monitor.

3) Uma experiência de aprendizagem integrada. Isso significa que há uma interação entre o que o aluno estuda *online* e o que o aluno estuda presencialmente, formando um curso integrado. Isso não quer dizer que o aluno vai rever

presencialmente o que estudou *online*, mas sim, que os estudos irão se complementar.

Essa definição de Ensino Híbrido proposto por Horn e Staker (2015) corrobora com nosso entendimento sobre o assunto, uma vez que a proposta do modelo metodológico Sala de Aula Invertida adotada nessa pesquisa e discutida a seguir, envolve maneiras diferentes de aprender, na qual professor, alunos e tecnologias da informação e comunicação, atuam mutuamente em prol de um processo de ensino com mais momentos de interação e colaboração. E é importante acrescentar que,

> [...] esse método é um avanço diante dos métodos ditos mais tradicionais, pois reconhece o contexto do discente, observa que seu mundo é cibernético, é digital e é dinâmico. Isso permite que as fronteiras da sala de aula sejam eriçadas, tornando a vida do estudante mais interativa e mais conectada, proporcionando a ele o contato com seu mundo e se utilizando dele. (BOUCHERVILLE; VALENTE, 2019, p.6)

Apesar da personalização que cada instituição faz do que considera como Ensino Híbrido de acordo com sua realidade, Horn e Staker (2015) consideram quatro modelos gerais de Ensino Híbrido: Rotação, Flex, À la Carte e Virtual Enriquecido. Dentro do modelo de Rotação há ainda quatro divisões: Rotação por Estações, Laboratório Rotacional, Sala de Aula Invertida e Rotação Individual. A seguir, será tratado especificamente da metodologia Sala de Aula Invertida.

5.3 SALA DE AULA INVERTIDA (SAI)

Em 2006, os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams faziam parte do departamento de química da escola Woodland Park High School, em Woodland Park, Colorado, Estados Unidos. Os professores começaram a perceber uma situação que os incomodava: muitos alunos faltavam em suas aulas, por causa de competições esportivas em outras escolas ou por causa de outras atividades que tinham fora da escola. Em meados de 2007, após Aaron Sams consultar uma revista sobre tecnologia, descobriu um software que possibilitava gravar *slides* de um arquivo em *PowerPoint*, bem como a voz e as anotações. Aaron Sams percebeu ali uma oportunidade de gravar suas apresentações usadas em aula e disponibilizá-las para os alunos que faltavam. Essa disponibilização foi feita por meio do canal de vídeos, recém-criado na época, *Youtube*.

Após começarem a gravar as aulas e disponibilizá-las, a primeira recomendação para os alunos que haviam faltado era que assistissem ao(s) vídeo(s) sobre a aula que eles perderam. Com isso, o problema dos alunos que precisavam faltar e ficavam defasados no conteúdo em relação aos colegas foi solucionado.

Foi nesse momento que Aaron Sams percebeu que os alunos não precisavam do professor no momento de receber informações, mas sim, precisavam do professor quando tinham dúvidas. Foi então que Aaron Sams e Jonathan Bergmann decidiram gravar suas apresentações de aulas e solicitar aos alunos que assistissem como dever de casa e que viessem para a aula com as anotações e com as dúvidas registradas. Esse foi o primeiro ano em suas carreiras de professores, que Aaron Sams e Jonathan Bergmann conseguiram terminar as atividades programadas para os estudantes daquela série. E assim nasceu o termo *flipped classroom*, que no Brasil foi traduzido para Sala de Aula Invertida (SAI).

5.3.1 CARACTERÍSTICAS DA SAI

Para os criadores do termo sala de aula invertida, Bergmann e Sams (2016), as interações entre professor e alunos são intensificadas na metodologia da sala de aula invertida, em que os professores também podem explorar as potencialidades das tecnologias para melhorar a interação com seus alunos, dando aos educadores a chance de conhecer seu alunado melhor. Valente (2014) ressalta que,

> A inversão ocorre, uma vez que no ensino tradicional, a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar alguma atividade de avaliação para indicar se o material foi assimilado. Na abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes da aula e esta se torna o lugar de aprendizagem ativa, o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo, laboratórios etc. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina. (VALENTE, 2014, p.159)

Na SAI, como o professor não precisa despender de tempo da aula presencial para expor a teoria, ele tem um gerenciamento diferente do tempo da aula, podendo propor/intensificar outras atividades, como problemas, discussões em grupo, seminários etc. O professor pode passar quase toda a aula caminhando pela sala realizando atendimentos individuais aos estudantes com mais dificuldades, o que pode ser uma das razões para a melhor progressão destes alunos (BERGMANN; SAMS, 2016).

A sala de aula invertida não se trata apenas de inverter a estrutura do processo de aprendizagem, ela ressignifica também os papeis de alunos e professores.

> O momento em que os alunos realmente precisam da minha presença física é quando empacam e carecem de ajuda individual. Não necessitam de mim pessoalmente ao lado deles, tagarelando um monte de coisas e informações; eles podem receber o conteúdo sozinhos. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.4).

A aula nessa proposta metodológica é centrada nos alunos, em que eles têm o compromisso de assistir aos vídeos, fazer anotações e perguntas, recorrendo ao professor no momento do encontro presencial para ajudá-lo na compreensão dos conceitos. O principal papel do professor agora é o de esclarecer as dúvidas e corrigir os equívocos, pois agora sua função em sala de aula é ampará-los e não mais transmitir informações (BERGMANN; SAMS, 2016).

Uma das grandes vantagens da metodologia da sala de aula invertida segundo seus pesquisadores, é a possibilidade de personalização do processo de ensino. Como as salas de aula são formadas geralmente por grupos heterogêneos, ou seja, alunos com diferentes níveis de conhecimento, com diferentes dificuldades de aprendizagem, com diferentes interesses e com diferentes humores, fica difícil – praticamente impossível – para o professor conseguir que todos os alunos aprendam o conteúdo proposto.

> O atual modelo de educação reflete a era em que foi concebido: a revolução industrial. Os alunos são educados como em linha de montagem, para tornar eficiente a educação padronizada. Sentam-se em fileiras de carteiras bem arrumadas, devem ouvir um "especialista" na exposição de um tema e ainda precisam se lembrar das informações recebidas em um teste avaliativo. De alguma maneira, nesse ambiente, todos os alunos devem receber uma mesma educação. A debilidade do método tradicional é a de que nem todos os alunos chegam à sala de aula preparados para aprender. Alguns carecem de formação adequada quanto ao material, não têm interesse pelo assunto ou simplesmente não se sentem motivados pelo atual modelo educacional. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.6).

Na metodologia sala de aula invertida o aluno estuda a teoria em casa no momento em que ele está interessado/preparado para tal; o aluno pode ver e rever quantas vezes considerar necessário o material indicado pelo professor, tomando notas de seu entendimento, tendo a possibilidade ainda de recorrer a outras fontes de estudo, tanto para aprofundar quanto para complementar seu entendimento. O aluno vai para as aulas já com suas dúvidas definidas e interessado naquilo que ainda não compreendeu.

> Quando lecionávamos da maneira tradicional, os alunos que recebiam a maior parte da nossa atenção eram os melhores e os mais brilhantes – aqueles que levantavam a mão primeiro e faziam ótimas perguntas. Nesse contexto, o resto dos estudantes ouvia passivamente nossa conversa com os colegas mais inquisitivos. Desde que adotamos o modelo de sala de aula invertida, porém, nosso papel mudou: passamos agora quase toda a aula caminhando pela sala e atendendo os estudantes com mais dificuldade. Achamos que essa é a principal razão de os alunos progredirem mais no modelo invertido. Não significa dizer que ignoramos os melhores, mas grande parte da nossa atenção já não se concentra neles. Agora, ela se dirige aos estudantes que solicitam mais ajuda. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.20).

Esse cenário mostra o quão personalizado o ensino pode se tornar com a metodologia da sala de aula invertida para um atendimento heterogêneo de uma sala de aula.

5.3.2 IMPLEMENTANDO A METODOLOGIA SAI

Para implementar a metodologia SAI, o professor precisa reorganizar todo o processo de ensino, desde selecionar os materiais que os estudantes irão acessar antes do encontro presencial, bem como as atividades que serão trabalhadas/discutidas durante a(s) aula(s).

Para que o aluno possa estudar antes da aula, uma opção é por meio de videoaulas. Vale ressaltar que o importante nesta etapa não é o formato, mas sim, o acesso, ou seja, as videoaulas são uma possibilidade para que o professor disponibilize os materiais para os alunos estudarem, mas o mais importante nesta etapa é que os alunos tenham acesso ao conteúdo, seja por meio de videoaulas, textos, pesquisas, experimentos, entre outros. Talbert (2019) apresenta um exemplo de uma disciplina na George Washington University que usa a SAI e não usa videoaulas,

> No curso, os alunos aprendem sobre métodos numéricos e computação científica por meio da solução de problemas básicos em física e engenharia, aprendendo toda a teoria de que precisam no contexto do trabalho com problemas. Eles se engajam no curso principalmente trabalhando por meio de uma sequência de notebooks computacionais, usando a plataforma Jupyter (http://jupyter.org) executando a linguagem de programação Python. No MOOC e nas versões presenciais do curso, os alunos experimentam o que poderíamos facilmente chamar de um ambiente de aprendizagem invertida. Em seus espaços individuais, exploram o conteúdo novo trabalhando com os notebooks. No espaço grupal (um encontro da turma para a versão presencial do curso, um fórum de discussão para a versão MOOC),

> os alunos estão aplicando suas explorações básicas a problemas mais complexos e trabalhando com o professor e seus colegas. (TALBERT, 2019, p. 19-20)

O exemplo apresentado por Talbert (2019) mostra como o processo de inversão de aula pode ser diversificado, tendo como cerne do processo a postura mais ativa dos alunos e o acesso aos materiais antes do(s) encontro(s) presencial.

Dentre os meios citados anteriormente, a produção de videoaulas pode ser um meio interessante de disponibilizar conteúdos, pois o professor consegue ajustar o conteúdo de acordo com o nível de profundidade desejada e, por meio de seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo, pode propor caminhos que transformem aquele conteúdo em conhecimento para os alunos. Porém, a gravação de videoaulas pode ser um empecilho para alguns professores. Produzir vídeos sobre os conteúdos ensinados não é algo comum para a maioria dos docentes. Além de equipamentos e softwares para a gravação, processos de edição devem ser considerados. Como hoje há muito material pronto na internet, Bergmann e Sams (2016) sugerem que, caso o professor opte por videoaulas e não se sinta à vontade para gravar, editar e publicar seus próprios vídeos, que ele faça uma seleção de materiais já disponíveis na internet. Esse pode ser um processo inicial e, com o passar do tempo, o professor pode ir produzindo os próprios materiais.

Caso o professor queira produzir o próprio vídeo, Bergmann e Sams (2016) sugerem equipamentos como: anotações manuscritas com caneta digital, quadro branco interativo, microfone, webcam e câmera de vídeo. Será necessário também softwares de gravação ou captação da tela, além de softwares para a edição dos vídeos.

Bergmann e Sams (2016) com base em suas experiências, sugerem que ao gravar vídeos, o professor: seja breve; fale com entusiasmo; crie vídeos com outro professor; acrescente humor; não desperdice o tempo do aluno com assuntos paralelos que não sejam relevantes para o estudo; acrescente anotações e chamadas (detalhes que se destacam na tela por alguns segundos); aumente e diminua o zoom e; respeite os direitos autorais.

Bergmann e Sams (2016) relatam algumas situações – vivenciadas por eles e/ou outros professor – que ocorreram durante o processo de adesão à metodologia

SAI. Em alguns casos foi preciso adaptar a metodologia de acordo com a realidade de cada professor, escola e alunos.

- Nem todos os professores usam vídeo como recurso de estudo em casa. A característica comum é o desejo de redirecionar a atenção da sala, ou seja, o professor ter mais tempo no momento da aula presencial para reorganizar os conteúdos do jeito que considera mais produtivo.
- Para aqueles alunos que não têm acesso à internet, alguns professores disponibilizaram seus materiais em várias mídias diferentes, como DVD ou pen-drives.
- Para saber se os alunos estão assistindo aos vídeos, Jonathan Bergmann propôs que os alunos fizessem anotações sobre o material assistido e que formulassem sempre pelo menos uma pergunta sobre o vídeo. Essas anotações e essa pergunta devem ser apresentadas ou enviadas antes do encontro presencial.
- Para os alunos que não assistiram ao vídeo, eles devem assistir durante o começo da aula. Com o tempo, segundo os pesquisadores da metodologia, esses alunos percebem que estão perdendo discussões interessantes que os demais alunos que assistiram ao vídeo estão tendo. Essa percepção de que estão sendo prejudicados, os faz mudar de ideia e começam a assistir aos vídeos.
- Bergmann e Sams (2016) também relatam que o índice dos alunos que não se engajavam antes da mudança da metodologia permaneceu praticamente igual após a implantação da SAI. Eles enfatizam que não têm a solução para esse problema, mas que, conhecendo-os melhor por conta da troca de metodologia, perceberam que muitos desses alunos têm problemas extra escola e que isso acaba influenciando em seus resultados dentro da escola.

5.4 A IDEIA DE COMPETÊNCIA POR PERRENOUD

Como o objetivo desta pesquisa é investigar os resultados da mudança que uma metodologia ativa causa no processo de ensino, optamos por introduzir a ideia de competência por Perrenoud pois nossa intenção é a de utilizá-la na análise dos dados obtidos, uma vez que os alunos terão que desenvolver estratégias que vão além da compreensão de conteúdos.

O sociólogo suíço Philippe Perrenoud propõe algumas discussões em seu livro *Construir as competências desde a escola*, sobre o papel da escola na construção de competências dos indivíduos. Para o autor, competência é “[...]uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles.” (PERRENOUD, 1999, p. 7).

Para o autor, desde quando se começou a discutir a ideia de competências, as escolas vivem um dilema: é papel da escola desenvolver competências ou limitar-se a transmissão de conhecimentos? Assim, as escolas se dividem em: 1) focar na transmissão ampla de conhecimentos e deixar que o desenvolvimento de competências se dê na formação profissionalizante ou pela vida de um modo geral ou, 2) rever seu currículo diminuindo a quantidade de conhecimentos científicos e focando na mobilização de situações complexas para o desenvolvimento de competências.

Segundo Étienne e Lerouge (1997),

> "A construção de uma competência depende do equilíbrio da dosagem entre o trabalho isolado de seus diversos elementos e a integração desses elementos em situação de operacionalização. A dificuldade didática está na gestão, de maneira dialética, dessas duas abordagens. É uma utopia, porém, acreditar que o aprendizado sequencial de conhecimentos provoca espontaneamente sua integração operacional em uma competência" (ÉTIENNE; LEROUGE, 1997, p. 67, *apud*, PERRENOUD, 1999, p. 10)

Perrenoud (2011) traz questionamentos sobre qual a importância para a vida em estudar determinados conteúdos na escola. Como exemplo, o autor relata sobre o ensino do teorema de Pitágoras,

> “[...] o ensino do teorema de Pitágoras não prepara para a vida, então, para que ele serve, exatamente? Para compreender o que é um teorema? Para permitir outros aprendizados de matemática que exigem o seu conhecimento e compreensão? Para desenvolver a inteligência, a capacidade de observação e de raciocínio? A *priori*, nenhuma dessas justificativas é absurda, porém, nenhuma delas poderá ser imposta sem uma argumentação e sem uma enquete relativa aos usos desse saber.” (PERRENOUD, 2011, p.11-12)

Ainda sobre as disciplinas e os conteúdos na escola, Perrenoud (2011) relata que o currículo adotado nas escolas não foi pensado para preparar os estudantes para a vida, e sim, para prepará-los para dar continuidade a seus estudos após o ensino básico. Desse modo, como poderiam justificar-se as disciplinas e seus conteúdos para ajudar na tomada de decisões e nas ações na vida das pessoas? Perrenoud (2011).

Ainda sobre o dilema das escolas, Perrenoud (1999) relata que:

> Aceitar uma abordagem por competências é, portanto, uma questão ao mesmo tempo de continuidade – pois a escola jamais pretendeu querer outra coisa – e de mudança, de ruptura até – pois as rotinas pedagógicas e didáticas, as compartimentações disciplinares, a segmentação do currículo, o peso da avaliação e da seleção, as imposições da organização escolar, a necessidade de tornar rotineiros o ofício de professor e o ofício de aluno têm levado a pedagogias e didáticas que, às vezes, não contribuem muito para construir competências, mas apenas para obter aprovação em exames. (PERRENOUD, 1999, p. 15).

Desse modo, a formação de competências no ambiente escolar requer uma mudança no contrato didático e novos combinados com todos os envolvidos: alunos, professores, pais, direção, entre outros. É preciso que todos estejam cientes dos impactos que essas mudanças podem ocasionar.

Segundo Perrenoud (2011),

> "Com um pouco de habilidade, qualquer especialista é capaz de reformular os conteúdos de uma disciplina sem alterar a sua essência, de modo que eles pareçam estar mais conectados com os usos sociais. Isto pode ser feito sem abalar os grandes equilíbrios, sem reduzir o volume de saberes ensinados e sem exigir que os professores mudem as suas práticas."(PERRENOUD, 2011, p. 15)

Assim, cabe as escolas reavaliar o que desejam para seus alunos no âmbito profissional e como cidadãos, de modo que possam proporcionar situações que façam com que seus alunos transcendam os conteúdos científicos para além de situações controladas dentro das disciplinas, possibilitando assim, a criação de competências.

5.5 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Como a sequência de atividades propostas nesta pesquisa envolve diferentes representações dos números complexos, optamos por apresentar a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, com o intuito de trazer contribuições para a análise dos resultados das atividades desenvolvidas pelos alunos nesta pesquisa.

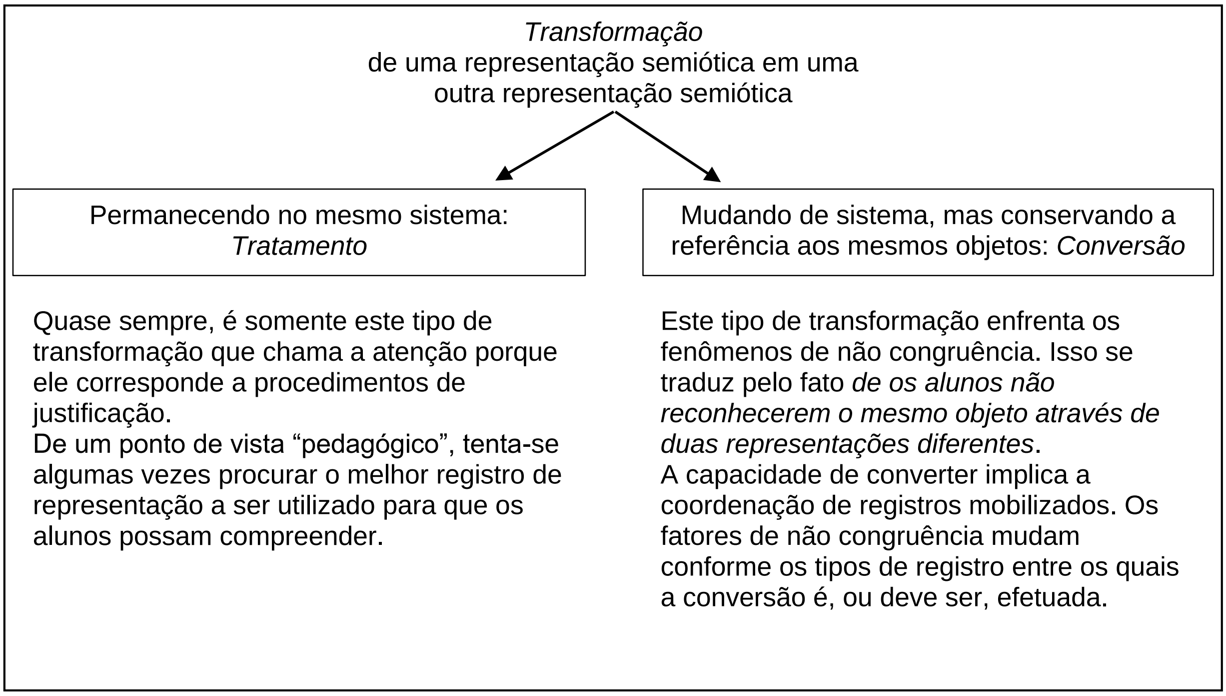
Na matemática trabalhamos o tempo todo com representações. Só é possível trabalharmos e entendermos os entes matemáticos por meio de representações. Segundo Duval (2010),

> [...]diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos

> matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2010, p.21)

A teoria das representações semióticas de Raymond Duval ajuda a entender a importância que os diferentes tipos de representações de um mesmo objeto matemático têm no processo cognitivo. Existem dois tipos de transformações que podemos operar sobre os objetos matemáticos: o tratamento e a conversão. Na Figura 4, Duval (2010) apresenta as duas formas de transformação de objetos matemáticos.

Figura 4: Transformação de objetos matemáticos



Fonte: Duval (2010, p.15)

A matemática é constituída por entes abstratos e é por meio de diversos tipos de representações (gráficas, figurais, da língua materna, simbólica etc.) que conseguimos “enxergar” e operacionalizar tais abstrações. Para Duval “As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. ” (DUVAL, 2012, p. 269). Essas representações são essenciais para a organização, manipulação e entendimento dos entes matemáticos. Ainda segundo Duval (2012),

> [...]o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. (DUVAL, 2012, p. 270).

Um mesmo ente matemático pode apresentar diversas representações diferentes. Duval destaca que “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (DUVAL, 2010, p.13), ou seja, como a matemática trata de entes abstratos, somente com as representações é que foi possível o desenvolvimento da matemática. Ainda segundo Duval, a originalidade da atividade matemática está na capacidade de saber converter um ente matemático para dois ou mais tipos de registros de representação.

Para Duval, a dificuldade cognitiva no processo de ensino e aprendizagem se dá pelo fato de não haver apreensão conceitual de um objeto matemático – noesis – sem a devida apreensão ou construção de representações semióticas desses objetos – semiose –, de modo que ambas, noesis e semioses, são inseparáveis.

Para que um sistema chamado de semiótico possa ser considerado como um sistema de registro de representações, o mesmo deve apresentar três atividades cognitivas:

1) a formação de uma representação identificável, ou seja, a seleção de um conjunto de relações que caracterizam, formam e possibilitam a identificação de um determinado tipo de representação. Por exemplo, no registro da língua materna, não se deve escrever “Um objeto + pesado…” pois apesar de ser possível o entendimento, a mistura de registro pode causar confusões;
2) o tratamento de uma representação se dá pelas transformações internas que uma representação pode sofrer sem mudar o tipo de representação. No caso da representação simbólica de uma equação por exemplo, podemos efetuar alguns tratamentos de modo a obter uma nova equação que ajude a chegar no objetivo proposto, como mostra a Figura 5.

Figura 5: Exemplo de tratamento

$$x+3=5 \xrightarrow[\text{Tratamento}]{\text{Subtraindo 3 unidades de cada lado da igualdade}} x+3-3=5-3 \xrightarrow[\text{Tratamento}]{\text{Efetuando as subtrações}} x=2$$

Fonte: o autor

3) a conversão é a mudança na forma de registro de um ente matemático, conservando toda ou parte das características do ente matemático em questão.

Geralmente se dá mais importância ao tratamento do que a conversão. Por um momento parece que a conversão trata apenas de escolher qual a melhor representação para resolver um problema, ou seja, qual registro que é mais fácil de se trabalhar para se obter a resposta final. Porém, Duval (2010) ressalta que "[...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. " (DUVAL, 2010, p.16).

Há de se tomar cuidado no processo de conversão para não o confundir com um simples processo de codificação. Sobre isso, Duval (2010) esclarece que,

> É comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como, por exemplo, em geometria) ou reduzi-la a uma "codificação". De acordo com essas ideias, o ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois seria suficiente aplicar regras de correspondência para "traduzir". Assim, passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou ainda, passar de uma expressão em português - como "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" – à escrita simbólica – no caso, "y>x", seria igualmente uma codificação, como toda escrita literal de relações entre os números. (DUVAL, 2010, p.16-17).

A conversão trata-se então de uma mudança de registro levando-se em conta não apenas uma descrição ou codificação das informações, mas sim, uma apreensão global das potencialidades que cada registro dispõe.

O fato de um aluno conhecer diversas representações de um ente matemático, sabendo efetuar a mudança de registro e como tratar cada uma no seu campo de representação, favorece no entendimento e na exteriorização do objeto matemático em estudo. Sobre essa coordenação, Duval (2012) afirma que

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações onde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito. (DUVAL, 2012, p.283)

CAPÍTULO VI

Este capítulo apresenta elementos da metodologia pesquisa-ação, que será a metodologia utilizada nessa pesquisa. A escolha dessa metodologia se deu por conta de suas características e do envolvimento do pesquisador durante a aplicação das atividades.

6.1 METODOLOGIA DE PESQUISA-AÇÃO

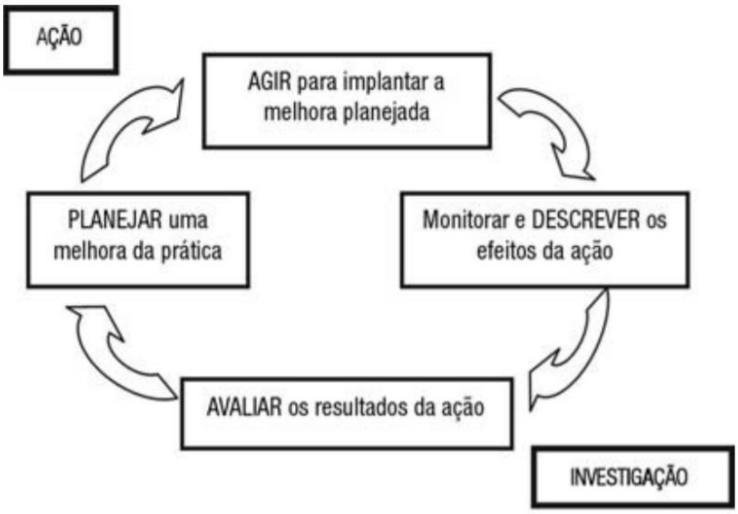
A escolha da metodologia pesquisa-ação se deu principalmente por se tratar de uma metodologia baseada em uma prática, em que o pesquisador também participa ativamente da pesquisa, não havendo uma separação entre pesquisador e sujeitos. Durante o processo de pesquisa, a análise das informações e a interação entre pesquisador e sujeitos, fornecem ao pesquisador informações que podem gerar decisões que não estavam pré-estabelecidas, redirecionando o percurso da pesquisa.

Segundo Thiollent (2011),

> Um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 2011, p. 20).

A metodologia conhecida como pesquisa-ação pode ser considerada, segundo Tripp (2005), um tipo de investigação-ação, que é um termo genérico usado para um ciclo em que se aprimora a prática em consequência das ações no campo da prática e das investigações a respeito dela. O processo de investigação-ação pode ser observado na Figura 6.

Figura 6: Representação em quatro fases do ciclo básico da investigação-ação



Fonte Tripp, 2005

Segundo Tripp (2005) “pesquisa-ação é uma forma de investigação-ação que utiliza técnicas de pesquisas consagradas para informar a ação que se decide tomar para melhorar a prática”.

Na área de educação a pesquisa-ação desempenha um papel importante, pois trata-se de uma estratégia para que professores e pesquisadores aprimorem seus métodos de ensino, relacionando teorias científicas com análises das interações e resultados de atividades de seus alunos.

6.2 A PESQUISA-AÇÃO NESTA PESQUISA

Engel (2000) descreve algumas fases para uma pesquisa baseada na metodologia de pesquisa conhecida como pesquisa-ação. A seguir, serão descritas como cada uma dessas fases se dará nesta pesquisa.

<u>Definição de um problema</u>

O conceito de problema proposto por Engel (2000) deve ser entendido como,

> a consciência, por parte do pesquisador, de que algo que o intriga, que pode ser melhorado na área de ensino, ou o reconhecimento da necessidade de inovação em algum aspecto do programa de ensino. Esta consciência pode ser resultado de um período anterior de observação e reflexão. (ENGEL; 2000, p.186).

O problema a ser analisado nessa pesquisa, se dá pela postura de alguns alunos durante o processo no ensino tradicional. Ao longo dos últimos seis anos, a minha metodologia sempre foi a do ensino tradicional, e nem por isso os resultados dos alunos em processos de avaliação, sejam na própria escola ou externos, apresentaram índices insatisfatórios. No entanto comecei a me inquietar sobre a qualidade da aprendizagem de meus alunos e com as condições das diferenças em sala, quanto à participação e a apresentação de dúvidas. Assim sendo, o problema é como fazer para que os alunos participem de maneira mais ativa no processo de ensino.

Pesquisa preliminar

Por pesquisa preliminar, Engel (2000, p.186) descreve que “A pesquisa preliminar se subdivide em três etapas: revisão bibliográfica, observação em sala de aula e levantamento das necessidades.”

A primeira vez que ouvi falar o termo sala de aula invertida foi durante uma capacitação na escola, onde os professores participaram de um curso sobre metodologias ativas. Voltei a estudar mais sobre o assunto quando decidi que iria utilizar a metodologia SAI na minha pesquisa de mestrado. Para essa pesquisa, foi feito um aprofundamento sobre o tema por meio de artigos, dissertações e livros que versam sobre a SAI. A análise de todo o processo comumente adotado nas minhas aulas – metodologia tradicional – foi o que motivou para uma proposta metodológica diferenciada.

Hipótese

Engel (2000, p. 187) relata que: “Com base nas informações coletadas na pesquisa preliminar, passa-se, então à formulação de uma ou mais hipóteses, a serem testadas.”

A hipótese dessa pesquisa é que com a abordagem tradicional vem apresentando esgotamento, até mesmo pela existência das tecnologias, e que mudança de uma metodologia tradicional para uma metodologia ativa, os alunos sejam mais autônomos no processo de ensino e, que possam gerenciar de acordo com suas facilidades/dificuldades o seu ritmo de estudos.

Desenvolvimento de um plano de ação

Segundo Engel (2000, p. 187), “Para reverter a situação problemática e com base na hipótese levantada, o professor decide, então, modificar seu modo de transmissão do conteúdo da disciplina[...]”.

Para essa pesquisa foi desenvolvida uma sequência didática com base nos pressupostos da metodologia SAI. Para que os alunos sejam mais autônomos no processo de ensino, eles serão responsáveis pela pesquisa e estudo dos conteúdos que serão indicados pelo professor. No caso desta pesquisa, os conteúdos são: representação de números complexos no plano de Argand-Gauss, conceito de módulo de um número complexo e do argumento de um número complexo.

A sequência didática tem quatro etapas: 1) assistir a um vídeo (produzido pelo professor/pesquisador) em casa, que contém a indicação dos conteúdos que devem ser estudados; 2) responder a um questionário sobre suas pesquisas e estudos (ANEXO 1); 3) realizar uma atividade de controle (ANEXO 2), para que o aluno se auto avalie sobre o seu entendimento dos conteúdos pesquisados e estudados e; 4) discussão/validação dos conteúdos estudados com toda a classe, com a participação do professor/pesquisador no final da aula, além da apresentação da forma trigonométrica dos números complexos.

Coleta de dados para avaliação dos efeitos da implementação do plano

Além de coletadas as respostas dos alunos sobre seus estudos e na atividade de controle, durante a aula, enquanto os alunos estão resolvendo a atividade de controle, é o momento em que professor/pesquisador e sujeitos da pesquisa estão diretamente envolvidos, pois o professor/pesquisador circula pela sala e tira dúvidas pontuais sobre o conteúdo. Para ajudar nas análises posteriores, será gravado o áudio durante a aula que os alunos estão fazendo a atividade de controle.

Avaliação do plano de intervenção

Após o final da aplicação da sequência, serão analisados os efeitos que a mudança na metodologia ocasionou no processo de aprendizagem desses alunos.

CAPÍTULO VII

Neste capítulo são apresentadas todas as etapas que foram criadas/selecionadas para a aplicação das atividades envolvendo a metodologia SAI. Cada etapa, além da descrição, traz a justificativa de suas escolhas com base no que se pretende analisar. Na sequência são apresentados os detalhes de cada etapa da sequência de atividades e é feita uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori* sobre cada etapa.

7.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE

A sequência de atividades que foi proposta aos alunos tem como base os pressupostos da metodologia SAI. A sequência de atividades foi planejada para manter algumas características importantes relacionadas a SAI, mas com algumas alterações. São elas:

1) Os alunos estudam o conteúdo antes do encontro presencial. Nesse ponto a lógica proposta pela SAI foi mantida nessa pesquisa. Foi preparado um vídeo (é descrito mais adiante) que traz quais conteúdos os alunos devem estudar para a próxima aula, tratando-se de conteúdos inéditos para os alunos. Os alunos tiveram acesso a esse vídeo antes do próximo encontro presencial quando foram trabalhados os conteúdos indicados no vídeo.

2) O professor/pesquisador seleciona os materiais que os alunos irão acessar para estudar. A literatura sobre a SAI indica que o professor deve produzir e/ou selecionar materiais prontos que tratem do assunto que será estudado pelos alunos, mas também traz como cerne do processo, que o aluno tenha acesso ao conteúdo antes da aula. Sobre esse aspecto foi feita uma alteração para essa pesquisa: houve apenas a indicação de quais conteúdos os alunos deveriam estudar para a próxima aula, que no caso são: 1) Como representar números complexos no plano de Argand-Gauss; 2) Como calcular o módulo de um número complexo; 3) Como determinar o argumento de um número complexo. A escolha por não indicar quais materiais deveriam ser acessados pelos estudantes, foi uma opção do professor/pesquisador. A ideia por de traz dessa escolha é tentar refletir ao máximo uma situação mais próxima do que geralmente acontece na vida das pessoas: quando uma pessoa tem a necessidade de conhecer algo, ela é responsável por ir atrás de fontes de informação que lhe tragam o conhecimento necessário sobre aquele assunto. No caso

dos alunos, a necessidade em ampliar seus conhecimentos sobre números complexos veio por conta da demanda do currículo escolar. Já a responsabilidade por buscar fontes de estudo, foi designada aos alunos. Havia a expectativa de que essa etapa auxiliasse os alunos na construção de novas competências.

3) No encontro presencial, os alunos podem discutir e tirar suas dúvidas sobre o que estudaram antes do encontro presencial. Esse aspecto foi mantido, uma vez que foi proposto na aula presencial uma atividade de controle (ANEXO 2) sobre os conteúdos que foram estudados antes da aula. A atividade era para ser feita de forma individual, mas os alunos puderam interagir entre eles e com o professor/pesquisador para debater/tirar dúvidas.

4) Com a inversão, o tempo de aula muda, possibilitando que o professor proponha mais atividades, variando o tipo de interação dos alunos com o conteúdo. Esse tópico foi mantido, mas com alterações. A literatura sobre a SAI indica que, ao inverter o processo de ensino, o professor tem uma gerência diferente do tempo de sua aula, tendo assim, a possibilidade de propor, nos encontros presencias, atividades mais diferenciadas do que apenas listas de exercícios. A atividade de controle (ANEXO 2) que foi proposta aos alunos tratou-se de uma seleção de atividades que buscam mostrar ao pesquisador se os alunos conseguiram estudar e entender o processo mais analítico dos conceitos, ou seja, as atividades buscam verificar se os alunos conseguem, com seus estudos autônomos, apresentar conhecimentos iniciais sobre os tópicos abordados. Por conta disso, as atividades são diretas e não são diversificadas nesse momento. Como a mudança de uma metodologia tradicional para uma metodologia ativa como a SAI envolve uma quantidade grande de variáveis, há ideia aqui para essa pesquisa, era manter as características do tipo de atividade que já era aplicado na metodologia tradicional, de modo que essa variável interferisse o mínimo possível para a análise de todo o processo. Essa escolha, feita pelo professor/pesquisador, seria analisada posteriormente e debatida se foi uma escolha adequada ou não para o processo de inversão de aulas.

7.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Essa aplicação foi efetivada em uma escola particular da cidade de São Paulo. Trata-se de uma escola de classe média alta em que todos os alunos têm acesso à internet, seja por meio de *smartphones*, tablets ou computadores. São 4 turmas, num total de 151 alunos da terceira série do ensino médio, na qual o pesquisador é professor. Antes da aplicação dessa atividade, os alunos já estudaram no começo do ano a forma algébrica de um número complexo, geometria analítica, polinômios e equações polinomiais. Todos esses tópicos foram trabalhados por meio da metodologia tradicional.

7.3 APLICAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa conta com uma sequência de atividades divididas em: 1) ao final de uma aula os alunos são avisados que irão participar de uma pesquisa de mestrado e será disponibilizado o vídeo no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) da escola; 2) os alunos acessarão o vídeo, pesquisarão e estudarão os conteúdos fora do horário da aula, tendo sete dias até o próximo encontro, ou seja, a aula presencial; 3) na próxima aula presencial, os alunos responderiam a um questionário sobre seus estudos (ANEXO 1); 4) os alunos resolveriam durante a aula presencial uma ficha de atividades (ANEXO 2) referentes aos conteúdos estudados; 5) o professor faria um fechamento do assunto com todos os alunos, debatendo as principais dificuldades apresentadas e, relacionando os três conteúdos estudados com a representação trigonométrica de um número complexo.

Na escola que foi aplicada essa pesquisa, cada aula tem a duração de setenta e cinco minutos. Os alunos seriam avisados ao final de uma aula que participariam de uma pesquisa de mestrado feita pelo seu professor – no caso, o pesquisador. Os alunos seriam informados que se trata de uma proposta metodológica baseada na metodologia conhecida como sala de aula invertida, em que eles entrariam em contato primeiro com a teoria – fora da sala de aula – e depois, na sala de aula, farão atividades relacionadas aos conteúdos que estudaram e poderão tirar suas dúvidas – caso tenham – enquanto resolvem as atividades.

Os dias da semana que são ministradas as aulas de matemática para essas turmas dos terceiros anos são segunda-feira e quarta-feira. Por conta de uma dinâmica que a coordenação fez com os alunos do terceiro ano numa determinada quarta-feira, na aula de segunda-feira dessa semana, os alunos foram avisados pelo professor/pesquisador sobre a aplicação da pesquisa e que o vídeo estaria disponível para consulta no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) que a escola adota. Desse modo, os alunos teriam uma semana para acessar o vídeo, pesquisar e estudar os conteúdos propostos. O AVA que a escola adota é o *Canvas*, que é similar ao *Moodle*, pois trata-se de uma plataforma que os professores podem incluir atividades, indicar conteúdos, aplicar questões objetivas e analíticas, entre outros. Os alunos podem acessar esse AVA em qualquer lugar e a qualquer momento por meio de um aparelho com acesso à internet.

7.4 DESCRIÇÃO, APLICAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

A sequência de atividades criada conta com 4 etapas: 1) um vídeo de produção autoral do professor-pesquisador; 2) um questionário sobre os estudos (ANEXO 1) realizados fora da sala de aula relacionados aos temas indicados no vídeo; 3) uma atividade de controle (ANEXO 2) presencial composta por atividades ligadas aos conceitos estudados fora da sala de aula; 4) validação/discussão dos conteúdos estudados e correlação de tais conteúdos com a representação trigonométrica de um número complexo, ambas realizadas pelo professor/pesquisador na lousa debatendo/analisando para com todos os alunos da classe.

Cada uma dessas etapas é descrita e analisada a seguir. Algumas etapas são mais direcionadas para o objetivo desta pesquisa: investigar se o uso de uma metodologia ativa, como a de Sala de Aula Invertida traz avanços em aspectos que favorecem a aprendizagem no ensino de um conceito matemático, mais especificamente, os números complexos. Outras etapas são mais direcionadas para a questão desta pesquisa: Quais ganhos à aprendizagem adviriam ao se propor estratégias didáticas que preveem uma proposta baseada no modelo de Sala de Aula Invertida com alunos do ensino médio que estão habituados a um ensino de aulas tradicionais, para atividades dos números complexos?

Como se trata de 151 alunos, as análises serão divididas em duas vertentes. Para os alunos que interagiram com o professor durante a realização da atividade de controle, de modo que expuseram suas dúvidas e apresentaram seus entendimentos, é possível uma análise mais consistente, pois além do registros na atividade de controle desses alunos, há o registro da interação com o professor/pesquisador, sendo possível fazer inferências sobre a aprendizagem desses alunos de maneira mais concisa. Para esse grupo de alunos, é feita uma análise das atividades discutidas com o professor/pesquisador, expondo diálogos e fotos dos registros desses alunos durante as atividades. Para os demais alunos da classe que não interagiram com o professor/pesquisador durante a realização da atividade de controle, é difícil inferir sobre o que pensaram durante a realização das atividades. Assim, seus registros nas atividades compõem uma análise baseada na estatística de acertos ou erros. Para essa análise de dados, serão consideradas todas as atividades de todos os alunos.

9.1 O VÍDEO

O vídeo foi produzido pelo professor/pesquisador e é descrito e analisado a seguir. A produção do vídeo se deu por meio do software *PowerPoint*, que tem uma opção de gravação de tela e som, gerando assim um vídeo que foi disponibilizado para os alunos no AVA da escola. O software permite também uma gravação via *webcam*, mas, por opção do pesquisador, apenas a voz e as telas que compõem a apresentação foram registradas no vídeo.

Descrição

Como o vídeo foi disponibilizado unicamente no AVA da escola, a seguir será feita descrição detalhada do vídeo.

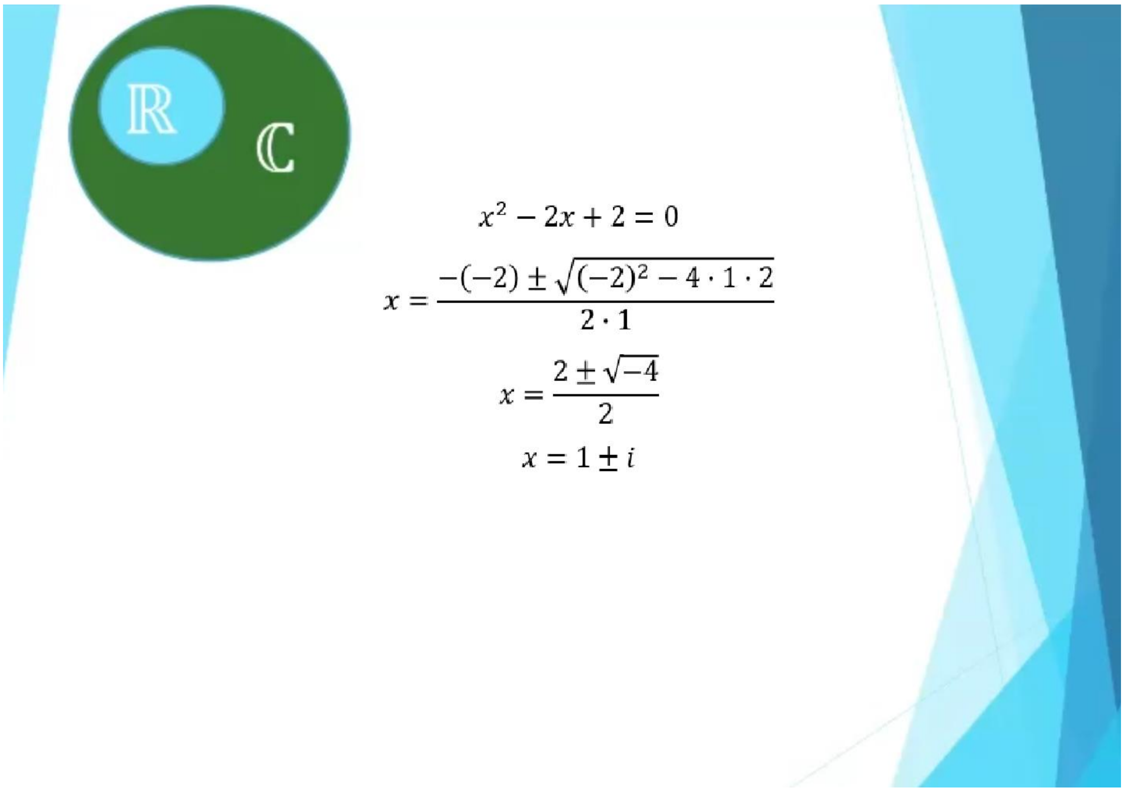
O vídeo começa com um resumo histórico a respeito dos números complexos. São apresentados alguns nomes importantes na história que colaboraram para o desenvolvimento da teoria dos números complexos (Figura 7).

Figura 7: uma cena do vídeo

Fonte: o autor

Na sequência, é comentado sobre o trabalho de Gauss que ficou conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra. Então é dito que esse teorema implicou diretamente que “toda equação polinomial de grau n tem exatamente n soluções no conjunto dos números complexos”. Em seguida, é resolvida a equação de segundo grau $x^2 - 2x + 2 = 0$ no universo dos complexos (Figura 8).

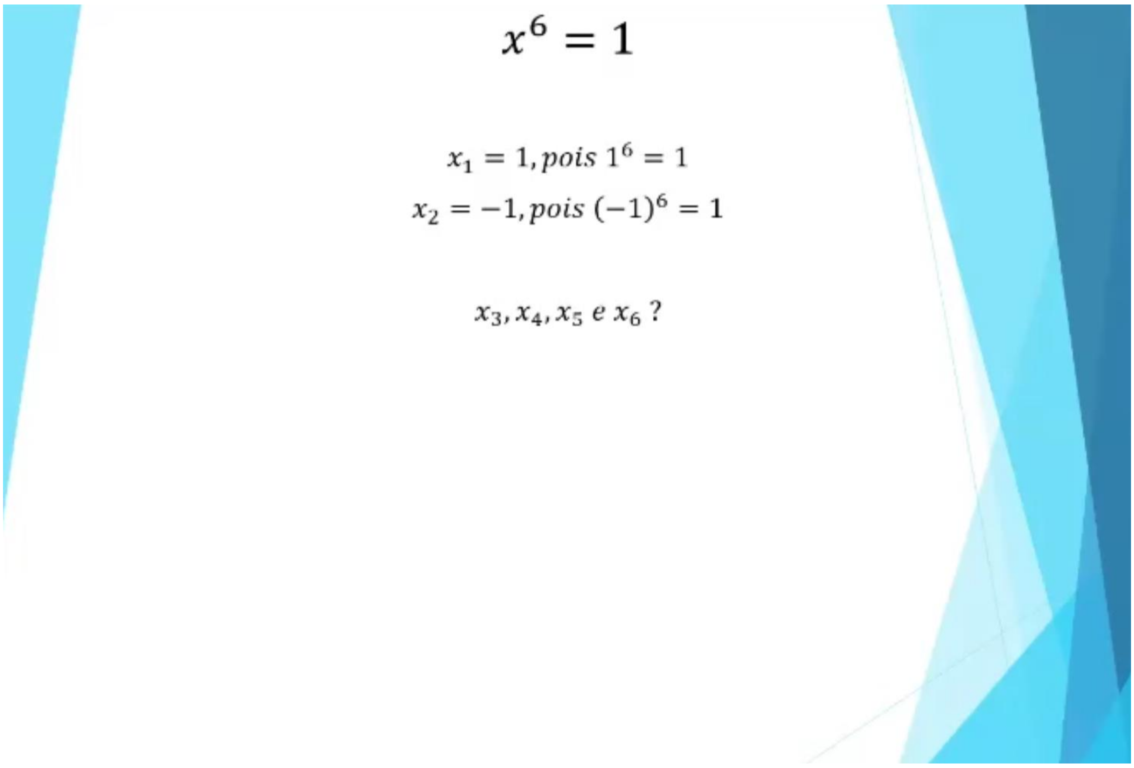
Figura 8: uma cena do vídeo



Fonte: o autor

Na sequência é proposta a seguinte questão no vídeo: “mas e equações como $x^6 = 1$?”. Após esse questionamento, é dito que: “com um pouco de análise é possível determinar duas soluções dessa equação”. Na sequência são apresentadas duas soluções: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, e a justificativa de que ambas são soluções da equação $x^6 = 1$, elevando-as a sexta potência e mostrando que o resultado é 1. Depois é feita outra questão: “mas e as outras quatro soluções $x_3,\ x_4,\ x_5\ e\ x_6$?” (Figura 9).

Figura 9: uma cena do vídeo



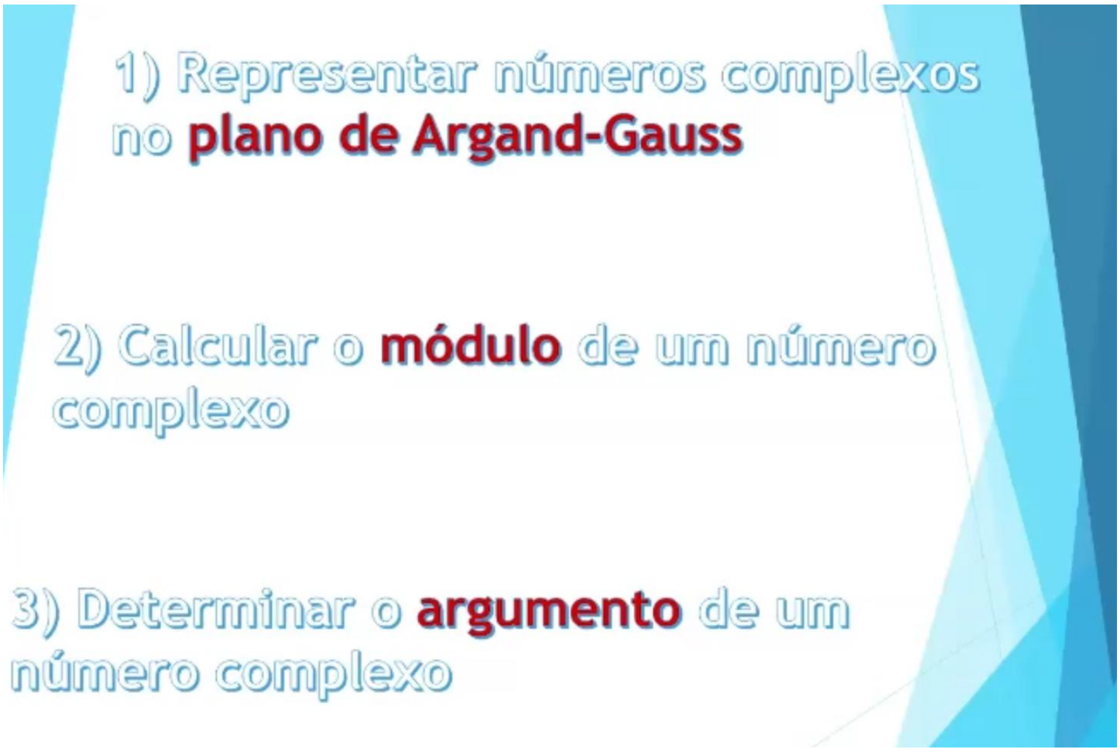
Fonte: o autor

Na sequência do vídeo, é comentado que: "conhecendo um pouco mais sobre números complexos é possível determinar as outras quatro soluções da equação $x^6 = 1$". Então são apresentadas as demais soluções: $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\ e\ x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

Em seguida, é dito no vídeo que: "para que possamos entender como determinar tais soluções, precisamos aprender três conceitos sobre os números complexos: 1) Como representar números complexos no plano de Argand-Gauss; 2) Como calcular o módulo de um número complexo; 3) Como calcular o argumento de um número complexo." (Figura 10).

Figura 10: uma cena do vídeo



Fonte: o autor

O vídeo encerra aqui sem nenhuma indicação de material que os alunos devem consultar.

<u>Análise *a priori*</u>

O objetivo de relatar, mesmo que de maneira suscinta, parte da história do desenvolvimento dos números complexos, é para que os alunos percebam que as teorias que estudam hoje – por mais que seja brevemente – foram foco de estudo por muito tempo de grandes matemáticos.

Ao comentar sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, em particular sobre uma consequência desse teorema, a intenção é que os alunos tenham conhecimento de seu resultado, pois esse teorema irá ser explorado/relacionado um pouco mais à frente no vídeo.

Como os alunos já haviam estudado a representação algébrica de números complexos, então na sequência do vídeo pôde ser resolvida a equação de segundo grau $x^2 - 2x + 2 = 0$ no universo dos complexos. Ao apresentar essa resolução, o objetivo é retomar o processo do que fazer quando nos deparamos com raízes quadradas de valores negativos e, a expectativa é de que os alunos percebam como a ampliação dos números reais para os complexos é necessária para que possamos trabalhar com esses radicais.

A pergunta “mas e equações como $x^6 = 1$?” e a escolha dessa equação tem como objetivos: 1) para que os alunos associem a consequência do Teorema Fundamental da Álgebra com o grau da equação, ou seja, espera-se que os alunos concluam que deve haver seis soluções; 2) analisando com um pouco de calma e testando valores, essa equação tem duas soluções reais que os alunos conseguem determinar; 3) as demais raízes não reais dessa equação possuem argumentos notáveis (futuramente, após os alunos aprenderem como representar números complexos na forma trigonométrica, essa equação será retomada e será discutido como chegar nas seis soluções dessa equação).

A pergunta que vem na sequência do vídeo “mas e as outras quatro soluções $x_3,\ x_4,\ x_5\ e\ x_6$?” tem por objetivo mostrar ao aluno que ele precisa aprender outros conceitos sobre números complexos para determinar as seis raízes sextas de um número complexo, e também, instigar a curiosidade, pois acredito que os alunos achem intrigante que existem seis números que elevados à sexta resultam em 1.

O esperado ao apresentar na sequência do vídeo as outras quatro soluções da equação $x^6 = 1$: $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ e\ x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, é que os alunos percebam que: 1) as demais raízes da equação estão no campo dos números complexos; 2) necessitam aprender novos procedimentos para determinar tais soluções.

No final do vídeo, a indicação direta de quais conteúdos devem ser estudados é importante, pois os alunos precisam saber o que devem pesquisar para estudar. Lembrando que aqui foi feita uma escolha do professor/pesquisador em não indicar quais materiais os alunos deveriam acessar para estudar. A ideia aqui é contribuir para o desenvolvimento de competências para a vida do aluno. O esperado a partir deste momento é que os alunos pesquisem os três conceitos citados em livros, *sites*, vídeos, com parentes, professor particular entre outros, ou seja, que tenham autonomia de escolher qual fonte de pesquisa lhes agrada mais e, ao mesmo tempo, traz o conhecimento necessário sobre os conceitos pesquisados.

Análise *a posteriori*

O vídeo foi realizado como parte da sequência de atividades, mas como o intuito era de apenas indicar quais conteúdos os alunos deveriam pesquisar e estudar, não foi efetivada nenhuma etapa na pesquisa que trouxesse dados sobre a interação dos alunos com o vídeo, ou seja, o esperado aqui era que os alunos assistissem ao vídeo e fossem pesquisar e estudar. Isso poderia até ter sido feito apenas por meio de uma indicação direta, do tipo: “pesquisem e estudem tais conceitos para a próxima aula”. A opção pelo vídeo foi para trazer uma breve apresentação histórica e as discussões acerca da questão $x^6 = 1$, que serviram unicamente como uma tentativa de justificar intramatemática o estudo de tais conceitos sobre os números complexos. No questionário sobre os estudos (ANEXO 1) (próxima etapa da sequência de atividades propostas) há perguntas que indicaram que os alunos acessaram o vídeo para se informar de quais conteúdos deveriam pesquisar e estudar. Posteriormente, ao final desse processo e depois que for estudado o conceito de radiciação dos números complexos, será retomada e discutida a questão: como determinar todas as raízes da equação $x^6 = 1$?

Durante a aula presencial, apenas alguns elogios simplistas sobre o vídeo foram feitos, mas sem relevância para uma análise detalhada.

7.4.2 QUESTIONÁRIO SOBRE OS ESTUDOS

No começo da aula presencial, após os alunos pesquisarem e estudarem sobre os três conceitos citados no vídeo, responderam a um questionário sobre seus estudos. Esse questionário foi montado no AVA que a escola adota. Os alunos responderam a esse questionário utilizando seus *smartphones* ou notebooks da escola que foram reservados para essa aula, caso alguém tivesse dificuldade em acessar o AVA por seu *smartphone*.

Descrição

O questionário é composto por 21 questões que tratam sobre a forma como os alunos estudaram – ou não – os conteúdos indicados no final do vídeo.

Questionário

1) Você acessou e estudou os conteúdos propostos?

2) Antes de estudar os conteúdos propostos no vídeo, você já conhecia alguma coisa sobre o plano de Argand-Gauss, módulo de um número complexo e/ou argumento de um número complexo?

3) Em caso afirmativo, o que você sabia e de onde você tirou essa informação?

4) Para estudar sobre o plano de Argand-Gauss, você estudou por qual meio?

4.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

4.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

4.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

4.4) Caso você tenha respondido "parentes", qual o parentesco e qual a formação deles?

4.5) Caso você tenha respondido "outros", especifique.

5) Para estudar sobre o conceito de "módulo de um número complexo", você estudou por qual meio?

5.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

5.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

5.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

5.4) Caso você tenha respondido "parentes", qual o parentesco e qual a formação deles?

5.5) Caso você tenha respondido "outros", especifique.

6) Para estudar sobre o conceito de "argumento de um número complexo", você estudou por qual meio?

6.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

6.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

6.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

6.4) Caso você tenha respondido "parentes", qual o parentesco e qual a formação deles?

6.5) Caso você tenha respondido "outros", especifique.

Análise *a priori*

Era esperado que com as informações fornecidas pelos alunos, fosse possível entender, principalmente, qual o meio preferido de estudos dos alunos. Havia a crença de que essas informações traçassem um perfil de alunos que preferem estudar usando mais a internet – especialmente vídeos – do que textos. Esperava-se ainda que tais informações trouxessem dados sobre as escolhas dos alunos de modo a indicar um controle sobre seu próprio processo de estudo, gerando mais autonomia no processo de educação.

A parte mais relevante desse questionário para essa pesquisa é identificar quantos alunos declaram que estudaram os conteúdos previamente. Os demais dados desse questionário serviriam apenas para que no futuro, o professor/pesquisador possa elaborar outras atividades usando a metodologia SAI, conhecendo a preferência das fontes de estudos que os alunos indicarem, e com isso, acreditava-se que seria possível direcionar melhor futuras aplicações dessa metodologia.

Análise *a posteriori*

Não foi constatado quantos alunos estavam presentes na aula anterior, em que foram avisados sobre a pesquisa e o vídeo que teriam que assistir para saber quais conteúdos deveriam pesquisar e estudar para a próxima aula. Apesar de não ter essa informação, o vídeo foi postado no AVA que a escola adota e que possui, entre outras ferramentas, um calendário que indica aos alunos quais atividades devem ser entregues e em quais datas. Essa ferramenta ajuda os alunos a se organizarem e minimiza a possibilidade de um aluno alegar que não fez uma determinada tarefa porque não sabia, pois mesmo que o aluno falte no dia que o professor avisou sobre uma tarefa ou não anote em seu caderno, no calendário do AVA aparecem as informações referentes a essa tarefa, bem como a data de entrega.

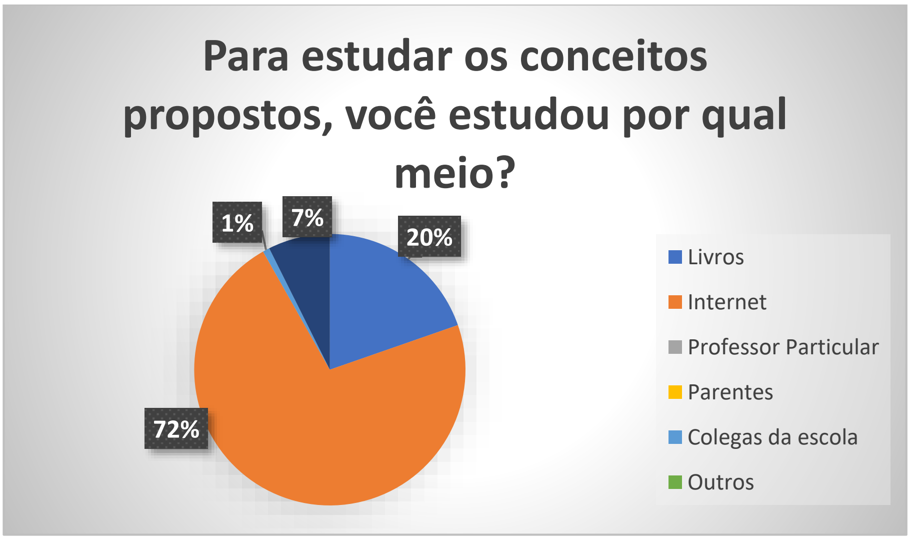
Dos 151 alunos dos quatro terceiros anos, 143 compareceram à aula referente a aula presencial da sequência estabelecida para esta pesquisa. Dos 143 alunos envolvidos na pesquisa, 105 declararam que pesquisaram e estudaram os conteúdos propostos. Os 38 alunos que não pesquisaram e estudaram os conteúdos propostos em casa, começaram a estudar os conceitos em sala utilizando o material de revisão adotado pelo colégio. Não havia uma pergunta no questionário (ANEXO 1) para que os alunos que não acessaram e estudaram antes da aula, justificassem o porquê de não o terem feito. Indica-se aqui que essa pergunta deveria fazer parte do questionário, mas não foi considerado na análise *a priori*, como deveria.

O AVA que a escola adota traz uma série de dados que são criados a partir de informações que são inseridas nele ao longo do ano letivo. Um desses dados é a lição de casa. Durante o ano, são propostas lições de casa, geralmente, em matemática, na forma de testes, que os alunos fazem de uma aula para outra. Esses dados sobre as lições de casa, ao longo do período letivo, vão carregando o sistema e assim é possível ter um porcentual do quanto cada aluno fez das lições de casas propostas. Os 38 alunos que não acessaram o vídeo e não pesquisaram e estudaram os conteúdos propostos na atividade, tem uma média de 25,79% de lições de casa de matemática feitas no período letivo desse ano. A média de lições de casa de matemática feitas dos 105 alunos que declararam ter estudado e pesquisado os conteúdos propostos, é de 56,22%.

Apesar dos porcentuais indicarem que no geral, esse grupo de alunos que já tem um índice baixo de entrega de lição de casa, mantiveram a mesma postura perante a troca de metodologia, olhando para a questão de pesquisa dessa dissertação, não é possível dizer se houve ganhos por parte da mudança de metodologia nesse quesito. Como há uma mudança grande na metodologia que os alunos estão habituados a trabalhar, seria necessário um trabalho a longo prazo para que os alunos se familiarizassem com essa proposta que os deixa numa postura mais central no processo de ensino, ou seja, provavelmente, com a aplicação de mais vezes esse processo, os alunos perceberiam que com esse modelo de metodologia, se não fizerem as atividades pré-aula, estarão sempre um “passo atrás” no processo de ensino, não tendo repertório para participar ativamente das atividades desenvolvidas nos encontros presenciais.

Do grupo de alunos que pesquisaram e estudaram em casa os conceitos propostos, 72% estudaram pesquisando os conceitos na internet, 7% pesquisaram na internet e em livros, 20% pesquisaram em livros e 1% com colegas da escola, como mostra a Figura 11.

Figura 11: Distribuição dos meios de estudos

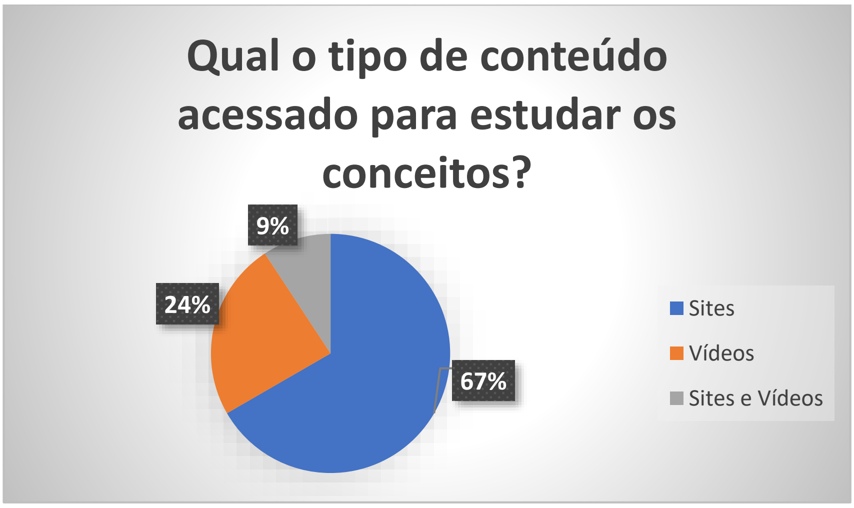


Fonte: dados da pesquisa

Dos 28 alunos que optaram por estudar por livros, apenas 4 consultaram um livro didático do ensino médio. Os demais utilizaram o material de revisão adotado pela escola.

Dentre os que optaram por estudar pela internet, a maioria optou por *sites*, como mostra a Figura 12.

Figura 12: Distribuição dos meios de estudos via internet



Fonte: dados da pesquisa

Os alunos também indicaram os *sites*/vídeos que acessaram para estudar e foi constatado que a maioria dos alunos acessou o mesmo site. Provavelmente isso aconteceu porque ao buscar “números complexos no plano de Argand-Gauss” no *site* de pesquisas *Google*, o primeiro *site* que aparece na lista de resultados, é o *site* que a maioria dos alunos acessou. É um *site* que traz os conceitos de números complexos e alguns exemplos.

7.4.3 ATIVIDADE DE CONTROLE

Após responderem ao questionário sobre os estudos, os alunos receberam uma ficha (ANEXO 2) com 3 atividades distribuídas em: 1) a representação de números complexos no plano de Argand-Gauss; 2) o conceito e a forma de obtenção do módulo de um número complexo; 3) o conceito e a forma de obtenção do argumento de um número complexo. Eles responderam as atividades dessa ficha individualmente, mas puderam conversar com os colegas e com o professor/pesquisador, gerando um processo de colaboração mútua, em que puderam tanto ajudar com explicações quanto tirar dúvidas. Após 40 minutos, as fichas foram recolhidas para serem analisadas posteriormente.

Durante a aplicação dessa atividade, os alunos que pesquisaram e estudaram iriam se dedicar diretamente à resolução das atividades das fichas. Os que não pesquisaram e estudaram devem estudar nesse momento da aula presencial utilizando o material de revisão adotado na escola. O material de revisão conta com um resumo teórico dos conteúdos e uma série de exercícios de vestibulares.

Durante a aplicação da atividade de controle, foi gravado o áudio das aulas para ajudar na análise dos resultados posteriormente.

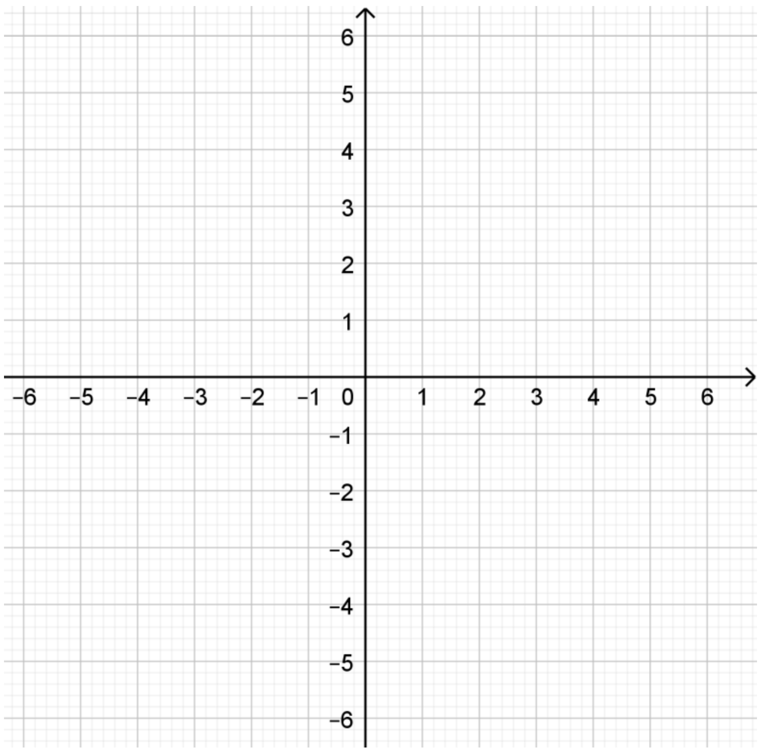
As 3 atividades que compõem a atividade de controle têm como objetivo verificar a compreensão do que foi estudado de maneira autônoma pelos alunos fora da sala de aula. A atividade 3 é a que, além de avaliar a compreensão do que foi estudado, pode trazer resoluções que indicariam ou não a utilização de mais de um registro de representação dos números complexos.

A seguir são descritas as 3 atividades que compõem a ficha, bem como as análises *a priori* e *a posteriori* de cada uma.

<u>Descrição</u>

<u>Atividade 1</u>

Represente no plano de Argand-Gauss os números complexos $z = 2 + 3i$, $w = -1 + i$, $r = -2i$, $s = -\sqrt{3} + i$ e $t = 5$.



Análise *a priori*

A atividade 1 foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos se apropriaram do processo de como representar números complexos na forma algébrica em um plano de Argand-Gauss. Esperava-se que os alunos fossem capazes de, por meio de seus estudos prévios, relacionar corretamente a parte real de um número complexo com o eixo das abscissas (eixo real) e, a parte imaginária de um número complexo com o eixo das ordenadas (eixo imaginário).

O desenho do sistema de eixos entregue aos alunos não contém a descrição de qual eixo é o eixo real e qual eixo é o eixo imaginário. Esperava-se que os alunos nomeassem os eixos e que não tivessem dificuldades em identificar qual dos eixos é o real e qual é o imaginário.

Nas fontes de estudo sobre números complexos, a representação habitual de um número complexo é dada pela letra z. Na atividade 1, foram apresentados 5 números complexos com letras distintas para indicar cada número. Esperava-se que os alunos percebessem que a letra z para representar um número complexo tratava-se de uma convenção, mas que não é a única.

Análise *a posteriori*

Com base nas minhas observações durante a aplicação da atividade de controle, das três atividades que compunham a atividade de controle, a atividade 1 foi a que os alunos mostraram menos dificuldades, resolvendo-a rapidamente.

Um aluno fez a seguinte questão:

Aluno A: Aqui no plano eu nomeio os eixos como?

Professor/pesquisador: Você pesquisou isso? Você lembra?

Aluno A: Eu achei duas representações: Real de z e imaginário de z ou “a” aqui (aluno apontando para o eixo horizontal) e “b” aqui (aluno apontando para o eixo vertical).

Professor/pesquisador: Então, o mais usual é colocar “Re” nesse eixo (professor/pesquisador apontando para o eixo horizontal) que representa a parte real e “Im” nesse eixo (professor/pesquisador apontando para o eixo vertical) que representa a parte imaginária. Porque o número complexo pode ter outro “nome” que não seja z igual a “a” mais “bi” e cujas partes real e imaginária não sejam “a” e “b”. Entendeu?

Aluno A: Entendi.

Professor/pesquisador: Você lembra de onde você tirou essa informação?

Aluno A: Está no livro.

A preocupação do aluno A é válida pois a nomenclatura dos eixos é de extrema importância para a representação correta do plano. Ao consultar o livro didático adotado pela escola, de fato os eixos estão representados com Re(z) e Im(z). Isso pode gerar uma confusão, uma vez que z é um “nome” genérico para um número complexo. Essa dúvida do aluno A pode ter sido gerada por conta das diferentes letras que foram usadas para representar números complexos, no exercício. Essa estratégia de variar as letras que representam os números complexos se apresentou como relevante, pois pôde fazer com que o aluno A refletisse sobre seus estudos, questionando uma definição que pode trazer confusões quando se estuda a representação correta dos números complexos no plano de Argand-Gauss.

Outro aluno B também questionou se deveria colocar “a” e “b” ou “x” e “y” para nomear os eixos. Quando o professor/pesquisador o indagou sobre o que tinha encontrado em seus estudos, o aluno disse que pesquisou duas fontes e que, em uma era usado “a” e “b” e na outra era usado “x” e “y”. Caso o professor/pesquisado tivesse apresentado a ideia do plano de Argand-Gauss na lousa, possivelmente essas discussões não ocorreriam, pois os alunos tratariam as informações como ideias fixas.

A verificação se foram ou não identificados os eixos não depende de uma interação entre professor/pesquisador e os participantes na pesquisa, foi constatado que, dos 143 alunos que entregaram a atividade, 28 nomearam os eixos como real e imaginário, 14 nomearam os eixos como “a” (eixo horizontal) e “b” (eixo vertical) e, 5 nomearam os eixos como “x” e “y”. Os demais alunos não nomearam os eixos, sendo que 6 alunos deixaram essa atividade incompleta ou em branco.

Os dados referentes aos acertos, erros e itens em branco na atividade 1 podem ser visualizados na tabela 2.

Tabela 2: acertos e erros na atividade 1

Representar números complexos no plano de Argand-Gauss						
	Alunos que pesquisaram e estudaram antes da aula (105)			Alunos que não pesquisaram estudaram antes da aula (38)		
Item	Acertos	Erros	Em branco	Acertos	Erros	Em branco
$z = 2 + 3i$	97,14%	0,95%	1,90%	89,47%	0,00%	10,53%
$w = -1 + i$	96,19%	2,86%	0,95%	89,47%	0,00%	10,53%
$r = -2i$	96,19%	1,90%	1,90%	84,21%	5,26%	10,53%
$s = -\sqrt{3} + i$	85,71%	13,33%	0,95%	78,95%	5,26%	15,79%
$t = 5$	95,24%	1,90%	2,86%	86,84%	0,00%	13,16%

Fonte: dados da pesquisa

Os resultados quantitativos indicam que os alunos foram capazes por meio de suas pesquisas e estudos de apresentar acertos referente à representação de números complexos no plano de Argand-Gauss, num processo de autonomia sobre sua própria aprendizagem.

Descrição

Atividade 2

Determine o módulo de cada número complexo a seguir.

a) $z = 2 - 2i$
b) $w = -3 + 7i$
c) $t = \sqrt{5} - i$
d) $s = 2i$
e) $p = 5$
f) $\mathrm{q} = 3 + i$

Análise *a priori*

A atividade 2, assim como a atividade 1, foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos se apropriaram dos conteúdos estudados antes da aula, no caso dessa questão, se os alunos eram capazes de obter o módulo de um número complexo a partir de sua representação algébrica.

Esperava-se que os alunos fossem capazes de identificar corretamente a parte real e a parte imaginária de cada número complexo, para que substituam corretamente tais partes na fórmula para o cálculo do módulo de um número complexo.

Apesar de geralmente encontrarmos números complexos representados pela letra z, aqui foi feita uma variação dessas representações para verificar se os alunos ficariam atentos a isso na hora de resolver e apresentar sua resolução.

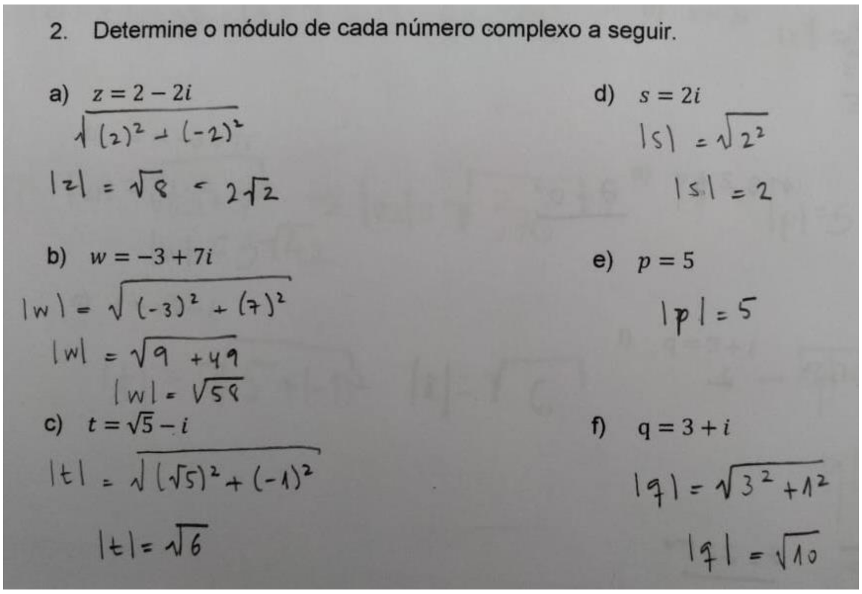
Análise *a posteriori*

A análise dos alunos resolvendo essa atividade durante a aula e os resultados, mostraram que a maioria dos alunos não teve dificuldades para resolver o que era proposto.

Das 143 entregas, vale ressaltar as diferentes notações para o módulo que apareceram durante a análise das atividades feitas pelos alunos.

75 alunos resolveram a atividade utilizando a notação para módulo por meio da própria letra que representa a forma algébrica do número complexo, como podemos na resolução de um aluno na Figura 13.

Figura 13: resolução de um aluno da pesquisa


2. Determine o módulo de cada número complexo a seguir.

a) $z = 2 - 2i$

$\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b) $w = -3 + 7i$

$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2}$

$|w| = \sqrt{9 + 49}$

$|w| = \sqrt{58}$

c) $t = \sqrt{5} - i$

$|t| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-1)^2}$

$|t| = \sqrt{6}$

d) $s = 2i$

$|s| = \sqrt{2^2}$

$|s| = 2$

e) $p = 5$

$|p| = 5$

f) $q = 3 + i$

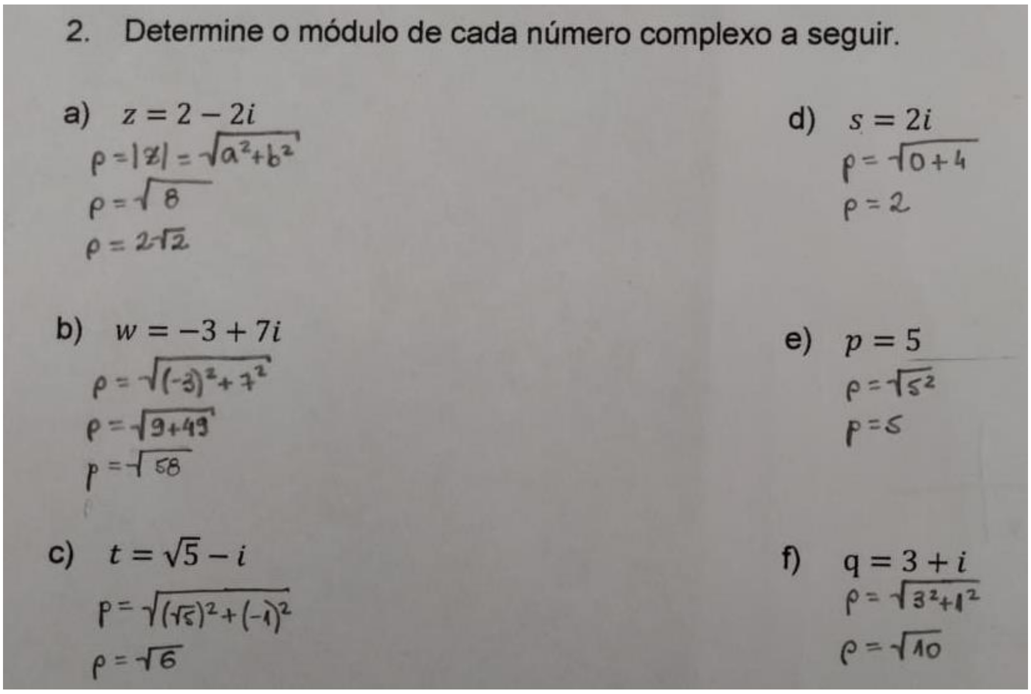
$|q| = \sqrt{3^2 + 1^2}$

$|q| = \sqrt{10}$

Fonte: dados da pesquisa

Um total de 25 alunos resolveram a atividade usando a notação para módulo por meio da letra grega ρ (rô), como se pode ver na Figura 14.

Figura 14: resolução de um aluno da pesquisa


2. Determine o módulo de cada número complexo a seguir.

a) $z = 2 - 2i$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{8}$

$\rho = 2\sqrt{2}$

b) $w = -3 + 7i$

$\rho = \sqrt{(-3)^2 + 7^2}$

$\rho = \sqrt{9 + 49}$

$\rho = \sqrt{58}$

c) $t = \sqrt{5} - i$

$\rho = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-1)^2}$

$\rho = \sqrt{6}$

d) $s = 2i$

$\rho = \sqrt{0 + 4}$

$\rho = 2$

e) $p = 5$

$\rho = \sqrt{5^2}$

$\rho = 5$

f) $q = 3 + i$

$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2}$

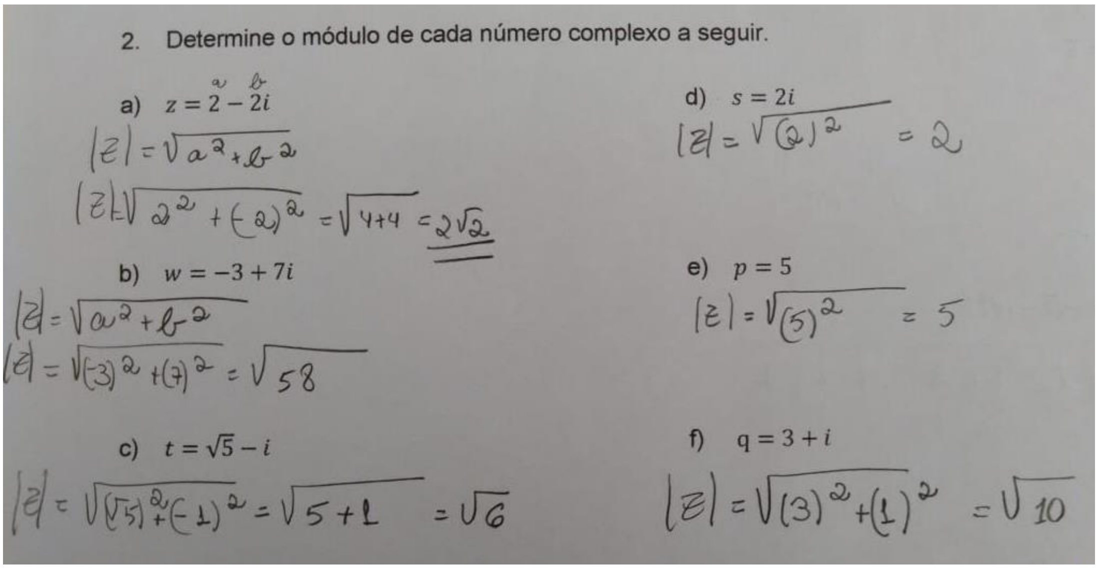
$\rho = \sqrt{10}$

Fonte: dados da pesquisa

As duas notações estão corretas e essas divergências acontecem por conta das diferentes fontes de estudos que os alunos pesquisaram e estudaram. Esses resultados indicaram que esses alunos foram capazes de calcular corretamente o módulo de um número complexo.

9 alunos acertaram os resultados, mas utilizaram a fórmula $|z| = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$ e não se atentaram que essa fórmula foi elaborada para um número complexo $z = a + bi$. Ao alterar a letra que representa o número complexo, deve-se alterar também a representação do módulo desse número complexo. Na Figura 15 podemos ver a resolução de um aluno que manteve a notação $|z|$ para todos os números complexos da atividade 2.

Figura 15: resolução de um aluno da pesquisa

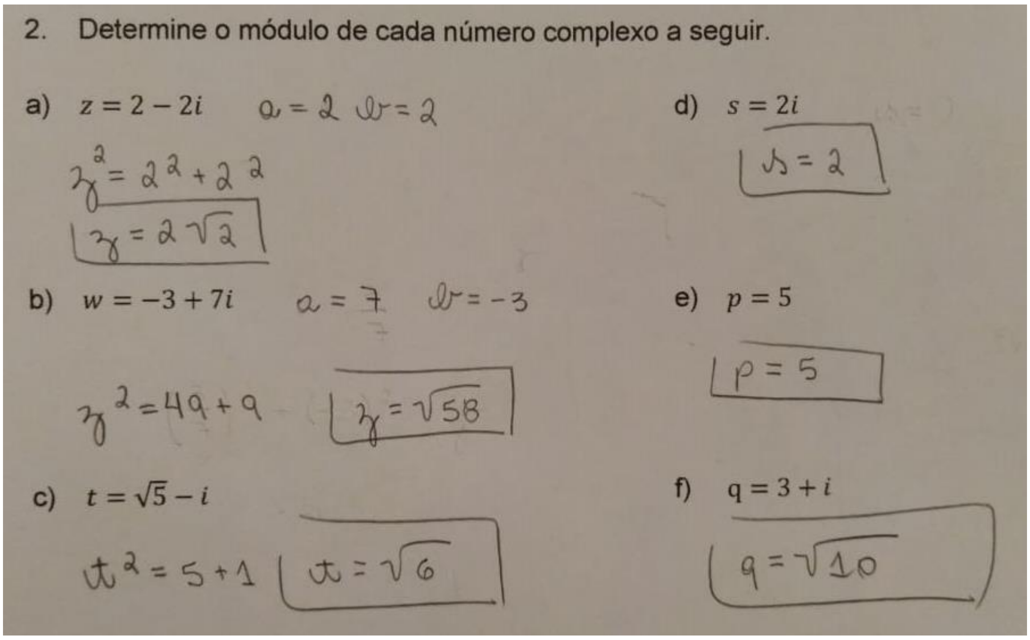


Fonte: dados da pesquisa

As análises das atividades desses 9 alunos permitem inferir que eles sabem o procedimento para obter o valor do módulo de um número complexo, mas cometem equívocos quanto à notação desses valores.

5 alunos cometeram um erro de representação ao identificar o módulo do número complexo como a própria letra que representa esse número complexo na forma algébrica, como podemos ver na resolução de um aluno na Figura 16.

Figura 16: resolução de um aluno da pesquisa



2. Determine o módulo de cada número complexo a seguir.

a) $z = 2 - 2i$ $a = 2$ $b = 2$

$z^2 = 2^2 + 2^2$

$\boxed{z = 2\sqrt{2}}$

b) $w = -3 + 7i$ $a = 7$ $b = -3$

$z^2 = 49 + 9$ $\boxed{z = \sqrt{58}}$

c) $t = \sqrt{5} - i$

$t^2 = 5 + 1$ $\boxed{t = \sqrt{6}}$

d) $s = 2i$

$\boxed{s = 2}$

e) $p = 5$

$\boxed{p = 5}$

f) $q = 3 + i$

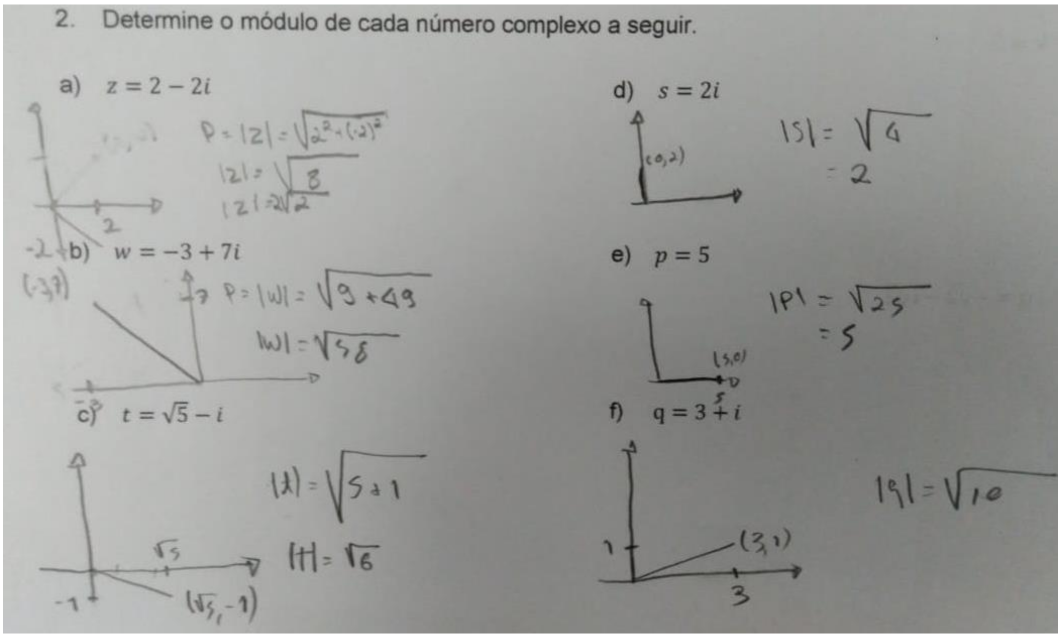
$\boxed{q = \sqrt{10}}$

Fonte: dados da pesquisa

Representar o módulo de um número complexo com a mesma letra que representa esse número complexo na forma algébrica, sem a notação de módulo, representa um equívoco, pois, provavelmente, esses alunos não compreenderam a diferença que existe entre um número complexo na forma algébrica e o seu módulo.

Dois alunos apresentaram uma relação entre a representação geométrica e o significado do conceito de módulo para calcular o módulo dos números complexos, como mostra a Figura 17.

Figura 17: resolução de um aluno da pesquisa



Fonte: dados da pesquisa

O domínio de diferentes representações dos números complexos, permitiu que esses alunos fizessem um esboço da representação geométrica de cada número complexo e, entendendo que o módulo é a distância do afixo até a origem, esse alunos foram capazes de calcular o módulo sem recorrer à “fórmula” que geralmente é apresenta para calcular o módulo de um número complexo.

27 alunos deixaram essa atividade incompletas e/ou cometeram erros de cálculo.

O aluno C chamou o professor/pesquisador porque não estava entendendo uma parte da fórmula para calcular o módulo. Durante seus estudos, ele verificou que a fórmula apresentada não tinha mais ou menos, ou seja, durante a dedução da fórmula, deveria ter ficado os sinais de mais e menos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|z| = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

Aluno C: Eu fiquei com dúvida porque você pode pôr mais ou menos raiz de oito ou só mais raiz de oito?

Professor/pesquisador: Pelo que você estudou o cálculo fica como? Mas a sua pergunta é, deu raiz de oito...

Aluno C: É, mas aí eu posso fazer mais ou menos raiz de oito ou só mais raiz de oito? Porque é tipo, módulo ao quadrado igual a "a" ao quadrado mais "b" ao quadrado. Então na hora de tirar a raiz teria que ser mais ou menos, mas aí eles passam já a raiz da fórmula, aí eles não colocam o mais ou menos, quando eles dão...

Professor/pesquisador: Ah entendi. Então, mas a questão é: você sabe o que representa o módulo?

Aluno C: A distância entre o ponto e a origem.

Professor/pesquisador: Tá, então...

Aluno C: Ah então tem que ser positivo.

Professor/pesquisador: Entendeu?

Aluno C: Aham, entendi.

Professor/pesquisador: Seu raciocínio está certinho, né?! Módulo de z ao quadrado é igual a "a" ao quadrado mais "b" ao quadrado. Quando tira a raiz deveria ter um mais ou menos. Por que não tem um mais ou menos?

Aluno C: Porque é a distância.

O aluno em questão percebeu que o cálculo do módulo de um número complexo nada mais é do que o cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo, podendo fazer essa conta por meio do Teorema de Pitágoras. O aluno lembrou que ao tirar a raiz quadrada dos dois lados da equação para isolar a variável, ele deve colocar o mais ou menos. O aluno só não tinha refletido sobre o que representa o valor que ele iria encontrar. Quando foi perguntado "você sabe o que representa o módulo?", o aluno logo percebeu que não poderia ser um valor negativo, pois ele sabia que o módulo representava uma distância.

Os dados referentes aos acertos, erros e itens em branco na atividade 2 podem ser visualizados na Tabela 3. Para esses dados, foram considerados como certos os resultados da parte algébrica da atividade, ou seja, se o aluno acertou o resultado do módulo, independente se a representação do módulo estava correta ou não.

Tabela 3: acertos e erros na atividade 2

Determinar o módulo de números complexos						
	Alunos que pesquisaram e estudaram antes da aula (105)			Alunos que não pesquisaram estudaram antes da aula (38)		
Item	Acertos	Erros	Em branco	Acertos	Erros	Em branco
$z = 2 - 2i$	97,14%	2,86%	0,00%	78,95%	10,53%	10,53%
$w = -3 + 7i$	87,62%	10,48%	1,90%	89,47%	0,00%	10,53%
$t = \sqrt{5} - i$	94,29%	3,81%	1,90%	78,95%	7,89%	13,16%
$s = 2i$	97,14%	2,86%	0,00%	84,21%	2,63%	13,16%
$p = 5$	94,29%	4,76%	0,95%	78,95%	7,89%	13,16%
$q = 3 + i$	97,14%	1,90%	0,95%	86,84%	0,00%	13,16%

Fonte: dados da pesquisa

Os resultados quantitativos denotam que para essa atividade, os alunos também foram capazes por meio de suas pesquisas e estudos de encontrar corretamente o módulo de números complexos representados na forma algébrica. Esses dados sugerem que a autonomia dos alunos para as pesquisas e estudos prévios pode ser observada.

Descrição

Atividade 3

Determine o argumento de cada número complexo a seguir.

a) $z = 1 + i$
b) $w = -2 + 2i\sqrt{3}$
c) $s = -3i$
d) $t = 4\sqrt{3} - 4i$
e) $k = 5$
f) $q = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Análise *a priori*

A atividade 3 foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos entenderam o que é o argumento de um número complexo e, se são capazes de determinar esse argumento por meio de seus conhecimentos e estudos prévios que fizeram antes da aula.

Esperava-se que parte dos alunos acabasse calculando o argumento por meio das relações apresentadas em livros e/ou *sites* que tratam desse assunto, ou seja, calcular o seno e cosseno do argumento desses números complexos e analisar no ciclo trigonométrico qual o ângulo associado a esses valores.

Esperava-se também que alguns alunos associassem a representação geométrica do número complexo ao quadrante que ele está, o que os ajudaria a determinar o argumento desse número complexo.

Propositalmente, não foi mencionado o termo “argumento principal” para verificar se algum aluno iria questionar a possibilidade de se ter infinitos ângulos para representar o argumento de um número complexo.

Outro fator proposital é que foram escolhidos números complexos cujos argumentos estão nos quatro quadrantes e, mais alguns números complexos que estão sobre os eixos coordenados. Esperava-se verificar com essa proposição, se os alunos identificam corretamente o ângulo de acordo com os valores de seno, cosseno, tangente e/ou a representação geométrica desses números complexos.

Análise *a posteriori*

Esta atividade foi a mais trabalhosa para os alunos. Alguns diálogos e imagens de atividades realizadas pelos alunos são apresentados e analisados a seguir.

O aluno D estava tentando determinar o argumento do número complexo $w = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Aluno D: Como eu sei se o ângulo é esse ou esse? (apontando para os valores 300° e 120°).

Ao analisar o que o aluno fez, foi constatado que ele fez apenas o cálculo da tangente do argumento.

Professor/pesquisador: Você calculou a tangente e agora está na dúvida entre esses dois valores?

Aluno D: Isso.

Professor/pesquisador: Você estudou?

Aluno D: Sim.

Professor/pesquisador: Quando você estudou, ele pedia para calcular a tangente?

Aluno D: Não, mas eu assumi que podia. Lá ele calculava seno e cosseno.

Professor/pesquisador: Você assumiu que pode fazer pela tangente.

Aluno D: É.

Professor/pesquisador: Tudo bem, mas agora você está com uma dúvida.

Aluno D: Então não pode? Porque dá o maior trabalho calcular o módulo e depois o seno e cosseno.

Professor/pesquisador: Entendi. Mas você chegou que a tangente é $-\sqrt{3}$ e percebeu que tem duas opções...

Aluno D: Você pode ver como que ficaria no plano!

Professor/pesquisador: Você está juntando duas informações então. Uma é que a tangente deu $-\sqrt{3}$. Outra é que o número $-2+2i\sqrt{3}$...onde ele está no plano (professor aponta para o sistema de eixos)?

Aluno D: Ele está no segundo quadrante.

Professor/pesquisador: Então se ele está no segundo quadrante e a tangente é $-\sqrt{3}$, então...

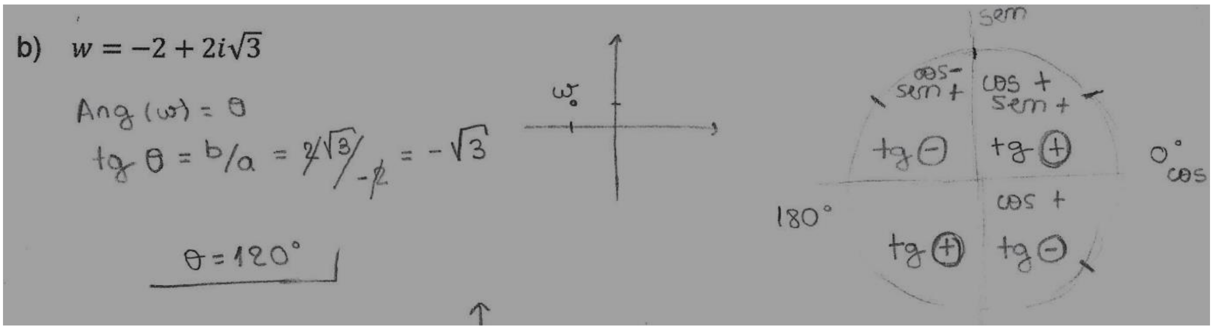
Aluno D: Entendi. Então está certo fazer pela tangente?

Professor/pesquisador: Está certo, mas só o valor da tangente não é suficiente. Por que lá ele fazia seno e cosseno? E não só o seno ou só o cosseno?

Aluno D: Para você saber onde está.

A Figura 18 a seguir apresenta a resolução do aluno B para essa questão.

Figura 18: resolução de uma questão do aluno B



Fonte: dados da pesquisa

O aluno em questão lembrou que a tangente resultando em $-\sqrt{3}$ possui duas soluções na primeira volta do ciclo trigonométrico. Como optou por analisar apenas a tangente, ficou com dúvida sobre qual valor seria o correto. Ao analisar as respostas do questionário sobre os estudos, foi verificado que o aluno em questão estudou por um *site*. Ao analisar o *site* que o aluno estudou, a teoria apresentava o cálculo do argumento usando seno e cosseno, mas no exemplo dado no *site*, eram calculados o seno, cosseno e a tangente. Como para o cálculo da tangente não é necessário calcular o módulo, o aluno optou por determinar apenas a tangente. A conversão de registros que o aluno fez, do algébrico para o figural, foi fundamental para que ele percebesse qual era o ângulo procurado. Duval (2012) relata que uma compreensão mono registro pode não impedir o entendimento daquele ente matemático, mas ao trabalhar com mais de um registro, favorece no entendimento do objeto matemático estudado. O aluno D resolveu todos os itens dessa atividade com base na tangente e na representação geométrica do número complexo.

Sobre a determinação do argumento do número complexo $s = -3i$, o aluno C estava calculando a tangente do argumento, ou seja, parte imaginária sobre a parte real, para determinar o valor do argumento e ficou com a seguinte dúvida.

Aluno E: Esse daqui seria zero..., menos três dividido por zero? Não existe!

Professor/pesquisador: O que que você acha? Não existe?

Aluno E: Não, seria noventa ou duzentos e setenta, porque ele está no eixo y. Então a tangente não existe, mas o ângulo existe.

Professor/pesquisador: Então como saber se é noventa ou duzentos e setenta?

Aluno E: Onde ele está, tipo o ponto? Se está no positivo ele é noventa e se está no negativo ele é duzentos e setenta?

Professor/pesquisador: Então você está querendo fazer a representação...

Aluno E: É.

Professor/pesquisador: Fazendo a representação você vai descobrir?

Aluno E: Sim.

Nesse momento o aluno E escreveu que o argumento de $s = -3i$ era duzentos e setenta graus.

Professor/pesquisador: Aí você chegou que para $s = -3i$ é duzentos e setenta?

Aluno E: Sim, porque está no negativo. E esse daqui? (aluno apontou para o item que era para determinar o argumento do número complexo $k = 5$).

Nesse momento foi possível observar que o aluno E estava calculando a tangente e dando como resposta para cada número complexo, dois valores possíveis para o argumento, sempre pensando na primeira volta do ciclo trigonométrico.

Professor/pesquisador: Ah, o k...

Aluno E: É que poderia ser zero também.

Professor/pesquisador: Zero ou trezentos e sessenta tudo bem. Mas você não desenhou?

Aluno E: Não.

Professor/pesquisador: Só pensou na...

Aluno E: Só pensei na tangente.

Professor/pesquisador: Na tangente..., mas também na representação. Por que que esse daqui deu duzentos e setenta? (professor aponta para o exercício do $s = -3i$)

Aluno E: Porque ele é negativo. Então ele é duzentos e setenta.

Professor/pesquisador: E esse daqui? (professor apontou para o exercício $k = 5$)

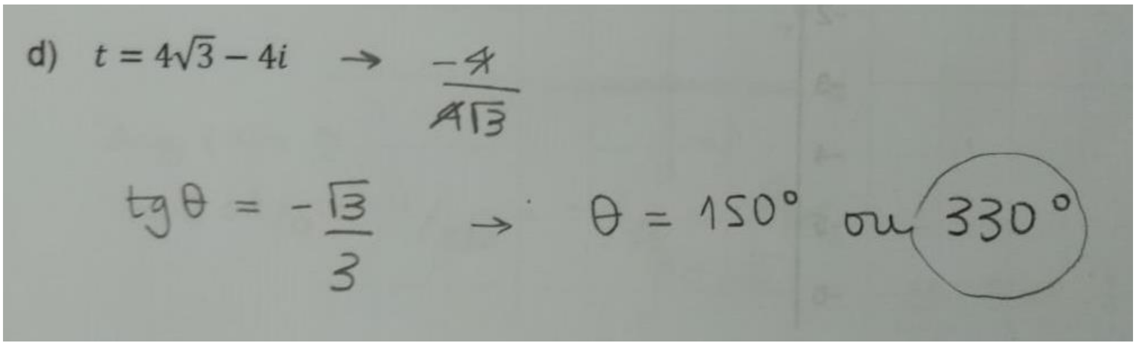
Aluno E: Esse é positivo, por isso é trezentos e sessenta.

Professor/pesquisador: E quando o argumento seria cento e oitenta graus?

Aluno E: Quando for menos qualquer número que não tenha parte imaginária.

O aluno E também optou por calcular a tangente e num primeiro momento encontrou dificuldades em determinar qual seria o ângulo correto. A partir do momento que o aluno começou a converter os números complexos da forma algébrica para a representação geométrica, logo se deu conta de como a representação o ajudaria a determinar o valor correto do ângulo. Na Figura 19, podemos ver que no item em que era para calcular o argumento do número complexo $t = 4\sqrt{3} - 4i$, o aluno circulou a resposta correta.

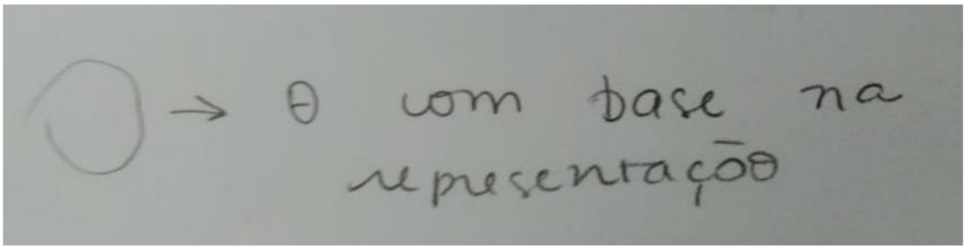
Figura 19: resolução de uma questão do aluno E



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 20, é apresentada uma justificativa que o aluno deixou no final da página para explicar por que escolheu aquele valor para o argumento.

Figura 20: indicação no final da folha do aluno C



Fonte: dados da pesquisa

É possível perceber que o aluno entendeu como determinar corretamente o argumento de um número complexo por meio da tangente e da representação desse número no plano. É possível inferir que o aluno está usando a representação geométrica de um número complexo, mesmo que não tenha desenhado, levando em conta todas as características que acompanham a representação geométrica, inclusive como se identifica o argumento na representação gráfica. Segundo Duval (2010),

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. (DUVAL, 2010, p.17)

Outro aluno, para calcular o argumento do número complexo $z = 1 + i$, relacionou, não só a representação geométrica do número complexo z, mas também conceitos de geometria plana.

Aluno F: Aqui, por exemplo, eu sei que ele vai formar um quadrado, porque os lados são iguais. Não vale a pena fazer a tangente. Se você juntar os quatros...

Professor/pesquisador: Tá, você está pensando que o número $z = 1 + i$...

Aluno F: Ele vai formar um..., 1 com i, se você juntar os dois vai formar um...com as ordenadas e as abcissas...juntando os pontos ele vai formar um quadrado.

Professor/pesquisador: Sim.

Aluno F: E eu vou saber que a diagonal do quadrado vai ter um ângulo de 45°.

Professor/pesquisador: Tá, então...

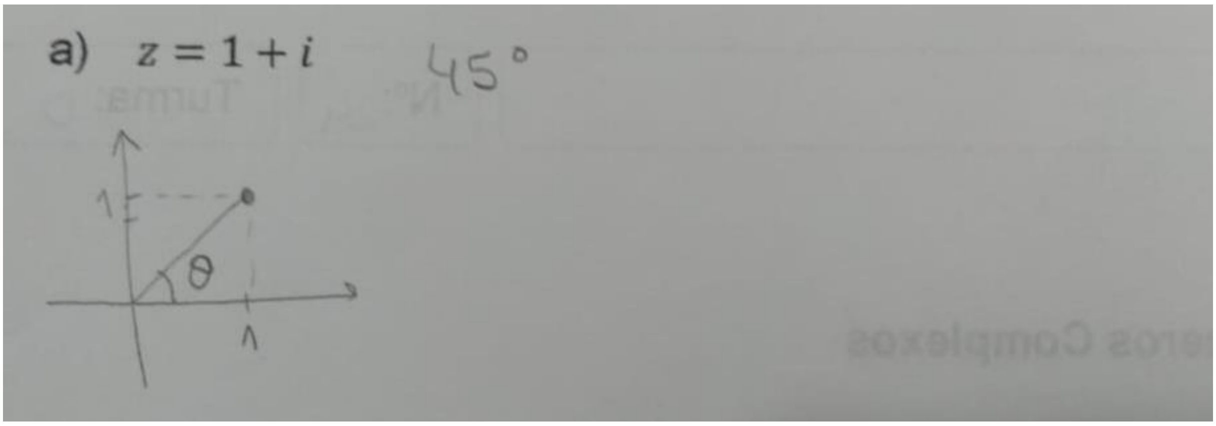
Aluno F: Eu escrevo isso? Vale muito mais a pena do que fazer pela tangente, porque é mais curto de escrever, mas é mais...

Aluno G: Mas não pode fazer pela tangente?

Aluno F: Pode né, mas é mais chato.

A Figura 21 mostra a resolução apresentada pelo aluno F.

Figura 21: resolução de uma questão do aluno F



Fonte: dados da pesquisa

É possível inferir que esse aluno, não só entendeu o conceito de argumento de um número complexo, mas teve a capacidade de relacionar a representação geométrica do número complexo $z = 1 + i$, com as características de um quadrado, identificando que o ângulo formado pela diagonal de um quadrado com um dos lados adjacentes, forma o mesmo ângulo que o exercício solicitava. Segundo Duval (2009, p.91) “[...] essa coordenação lhe dá, com respeito a representações semióticas que ele utiliza, esse grau de liberdade permitindo ter estratégias heurísticas, conduzir bem os tratamentos escolhidos e controlar a sua pertinência”.

Durante a atividade, nenhum aluno questionou ou comentou sobre o conceito de argumento principal. Por conta disso, esse conceito foi debatido na próxima etapa da sequência de atividades.

Dentre os alunos que acertaram a maioria dos itens da atividade 3, 57 alunos optaram pelo cálculo de duas razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) para determinar o argumento. 34 optaram pelo cálculo de uma das razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) e o uso da representação geométrica para determinar o argumento. 52 alunos não concluíram a atividade 3 ou entregaram resoluções sem justificativas.

A seguir estão compilados os dados referentes aos acertos, erros e itens em branco na atividade 3, descritos na Tabela 4.

Tabela 4: acertos e erros na atividade 3

Determinar o argumento de números complexos						
	Alunos que pesquisaram e estudaram antes da aula (105)			Alunos que não pesquisaram estudaram antes da aula (38)		
Item	Acertos	Erros	Em branco	Acertos	Erros	Em branco
$z = 1 + i$	95,24%	2,86%	1,90%	71,05%	7,89%	21,05%
$w = -2 + 2i\sqrt{3}$	77,14%	20,00%	2,86%	60,53%	18,42%	21,05%
$s = -3i$	80,95%	13,33%	5,71%	60,53%	13,16%	26,32%
$t = 4\sqrt{3} - 4i$	60,95%	24,71%	13,33%	44,74%	28,95%	26,32%
$k = 5$	77,14%	7,62%	15,24%	52,63%	7,89%	39,47%
$q = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$	67,62%	14,29%	18,10%	42,11%	15,79%	42,11%

Fonte: dados da pesquisa

Essa atividade foi a que trouxe mais dúvidas para os alunos. Pela observação em sala e pela análise das atividades, é possível inferir que os alunos tiveram mais dificuldades referentes ao processo para determinar qual o ângulo que tem determinado valor de seno, cosseno e/ou tangente. Os resultados indicam que a maioria dos alunos compreendeu o conceito de argumento de um número complexo, sabendo identificá-lo e o processo para determiná-lo.

Os resultados também indicam que a liberdade dada aos alunos para pesquisarem e estudarem os conceitos, proporcionou uma autonomia para que cada aluno escolhesse os procedimentos que julgava mais adequados para determinar o argumento de um número complexo. As interações em sala permitiram que os alunos confrontassem suas percepções, mantendo-as, complementando-as ou redefinindo-as.

7.4.4 DISCUSSÃO/VALIDAÇÃO DOS CONTEÚDOS PESQUISADOS E ESTUDADOS

Descrição

Esta etapa consiste em um momento que o professor/pesquisador vai até a lousa para discutir com os alunos aspectos que ele considera importante sobre os conteúdos trabalhados. É nesse momento também que o professor mostra aos alunos como os três conceitos estudados são importantes para o próximo passo no assunto: forma trigonométrica de um número complexo.

Análise *a priori*

O esperado para esse momento era identificar se, após os estudos prévios antes da aula, a resolução das atividades de controle e a interação com os colegas/professor, foi constatada alguma defasagem nos conteúdos. Caso seja constatada tal defasagem, esse é o momento para que o professor explique/corrija tais defasagens e corrija-as na lousa.

Era esperado para esse momento também que os alunos participassem trazendo contribuições com base no que estudaram. Acredito que alguns alunos irão perceber que a fórmula para calcular o módulo de um número complexo é apenas a fórmula da distância de ponto a ponto que eles já estudaram em Geometria Analítica.

Esperava-se também que nesse momento, os alunos fossem capazes de perceber que é possível indicar onde está o afixo de um número complexo no plano de Argand-Gauss, por meio de uma representação que envolva dois conceitos: o módulo e o argumento. Após isso, foi apresentada a representação trigonométrica de um número complexo.

Análise *a posteriori*

Depois de entregarem a atividade de controle, o professor/pesquisador foi até a lousa para discutir com os alunos da classe os conteúdos que eles pesquisaram e estudaram.

Na sequência foram retomados os três conceitos citados pedindo a participação dos alunos. Nesse momento foi possível trazer para a discussão algumas concepções que alguns alunos apresentaram durante a interação com o professor/pesquisador quando faziam a atividade de controle.

Um dos temas que foi abordado foi sobre a nomenclatura dos eixos no plano de Argand-Gauss. Foi discutido com os alunos os problemas de nomear os eixos com “a” e “b”, “x” e “y” ou “Re(z)” e “Im(z)”. Em uma das discussões, foi relatado que o livro didático adotado pela escola traz a nomenclatura dos eixos como “Re(z)” e “Im(z)”, que acabou gerando uma confusão para o aluno A. Após essa discussão e alguns questionamentos, ficou convencionada que a nomenclatura “Re” e “Im” para os eixos.

Uma pergunta feita aos alunos nesse momento foi “o que representa o módulo de um número complexo?”. Em todas as quatro turmas sempre tinha alunos que diziam que o módulo representa a distância do ponto até a origem. Essas discussões representam um momento importante no processo, pois alguns alunos podem simplesmente ter estudado a fórmula para o cálculo, mas não saber o que estão calculando. Durante esse momento também foi perguntado aos alunos “qual é o nome do ponto que representa o número complexo no plano?”. Em todas as turmas tinha pelo menos um aluno que respondeu corretamente: afixo. Esse tipo de informação é importante e como não foi especificado para pesquisarem e estudarem o nome dado a esse ponto, muitos alunos podiam não ter se preocupado em aprender essa informação ou não entenderam, dependendo da fonte de estudo.

Outra discussão que foi feita foi sobre o número de informações necessárias para determinar o argumento de um número complexo. Foi apresentado e discutido com a classe a necessidade de se ter pelo menos duas informações entre seno, cosseno, tangente e representação geométrica, para determinar o argumento de um número complexo, exceto nos casos em que o argumento for um múltiplo de 90°.

Ainda sobre o cálculo do argumento, foi feita a seguinte questão: “durante seus estudos, alguém se deparou com o termo “argumento principal”?”. Poucos alunos disseram que tinham visto. Ao questioná-los o que significava, não souberam explicar. Então foram feitas algumas perguntas para os alunos da sala, como: “qual é o ângulo cujo seno resulta em meio?”. A resposta da maioria dos alunos é sempre igual: “trinta graus”. Alguns alunos ampliam a resposta: “trinta graus ou o simétrico”, “trinta graus ou cento e cinquenta”. Em nenhuma turma passou disso. Quando eu questionei: “mas só tem esses dois ângulos cujo seno é meio?”, alguns alunos se manifestaram sobre a ideia de considerar outras voltas. Com a participação dos alunos, foi possível explicar que geralmente trabalhamos com os ângulos entre 0° e 360°, e que esses ângulos são denominados de “argumento principal”, mas que existem infinitos ângulos cujo seno resulta em meio, por exemplo. Essa ideia é importante pois é fundamental nos próximos conceitos que os alunos estudarão sobre os números complexos: o processo de radiciação de um número complexo.

Após retomar as discussões sobre os três conceitos na lousa, foi feita a seguinte pergunta para os alunos da sala: “Quais informações você precisa saber para representar o afixo de um número complexo sem conhecer sua parte real e imaginária?”. Em todas as turmas teve alunos que disseram que era necessário conhecer o módulo e o argumento. Após essas discussões, foi demonstrada a forma trigonométrica de um número complexo. Foi dado como lição de casa algumas atividades do livro didático do 3° ano para a próxima aula. As atividades basicamente são para mudar os tipos de representação: da algébrica para a trigonométrica e vice-versa.

7.5 REVISITANDO A LITERATURA APÓS A ANÁLISE DOS RESULTADOS

Durante a revisão da literatura sobre a metodologia sala de aula invertida, alguns pontos identificados por outras pesquisas foram levantados e serão debatidos com as análises dos resultados desta pesquisa.

Moreira (2018), destacou a possibilidade de personalização dos estudos que a metodologia SAI permite, sendo que os alunos podem estudar os conteúdos no seu ritmo. Essa característica também foi observada nesta pesquisa, pois os alunos tiveram sete dias desde que o vídeo foi postado até a aula presencial, de modo que cada aluno usou o tempo que considerou necessário para seus estudos. Como não foi necessário “gastar” tempo de aula para explicar os conceitos, houve mais tempo na aula presencial para que os alunos fizessem mais atividades, podendo interagir com os colegas e com o professor/pesquisador, exatamente quando as dúvidas surgiam.

Um ponto salientado por Honório (2017) é o compartilhamento entre os estudantes de maneiras de compreender o conteúdo estudado. As análises desta pesquisa também corroboram com essa afirmação, uma vez que os alunos puderam interagir entre eles, sendo que cada um pôde explicar ao outro como entendeu os conceitos relacionados daquele conteúdo. Nesta pesquisa esse ponto ficou ainda mais salientado porque os alunos tiveram a liberdade de pesquisar e estudar os conteúdos, de modo que diferentes explicações – de *sites*, livros, vídeos – ocasionaram caminhos variados, situação essa que também é destacada na pesquisa de Santana (2018).

Alguns dificuldade relatadas em algumas pesquisas, como problemas de acesso à internet fora da sala de aula e problemas para acesso aos materiais, não foram identificados nesta pesquisa. Isso provavelmente porque os sujeitos desta pesquisa são de classe média alta, de modo que problemas – infelizmente – comuns como esse no dia a dia de muitas escolas, não fazem parte da rotina dos sujeitos desta pesquisa.

Um ponto destacado por Almeida (2017) é sobre a clareza com os alunos e os pais sobre a mudança de metodologia. Almeida (2017) provavelmente teve mais dificuldades com isso porque os sujeitos de sua pesquisa eram alunos dos anos finais do ensino fundamental. Nesta pesquisa, os alunos foram avisados ao final de uma aula de que estariam participando de uma pesquisa de mestrado que envolvia uma mudança na metodologia, de modo que eles teriam que pesquisar e estudar alguns conteúdos por conta própria. Não houve nenhum registro de algum aluno que tenha se queixado sobre o processo. Mas um outro ponto destacado por Almeida (2017) é sobre a falta de maturidade de alguns alunos. Sobre isso, é difícil tomar uma posição nesta pesquisa, pois foi a sequência de atividades propostas com base na metodologia Sai foi aplicada uma única vez. Seriam necessárias várias aplicações de sequências baseadas nessa metodologia para que pudesse ser identificada – caso exista – a falta de maturidade de alguns alunos. O que não foi possível devido a pandemia.

CAPÍTULO VIII

Com base no que foi proposto para essa pesquisa, este capítulo traz as considerações finais sobre todo o processo. São analisados os resultados obtidos na escolha e aplicação da sequência de atividades. Após as análises sobre a sequência de atividades que foi aplicada para esta pesquisa, este capítulo apresenta também algumas alterações visando melhorá-la para futuras aplicações.

8.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar se o uso de uma metodologia ativa, como a de Sala de Aula Invertida traz avanços em aspectos que favorecem a aprendizagem no ensino de um conceito matemático, mais especificamente, os números complexos. Atrelado a esse objetivo, foi proposta a questão dessa pesquisa: “Quais ganhos à aprendizagem adviriam ao se propor estratégias didáticas que preveem uma proposta baseada no modelo de Sala de Aula Invertida com alunos do ensino médio que estão habituados a um ensino de aulas tradicionais, para atividades dos números complexos?”

Com base nas análises de todo o processo que foi feito nesta pesquisa, acreditamos que a mudança de uma metodologia tradicional para uma metodologia ativa, trouxe ganhos, pois tirou os alunos de sua zona de conforto, colocando-os como centro no processo de aprendizagem. Se num primeiro momento os alunos teriam que apenas ficar sentados ouvindo o professor – pelo menos durante a explanação do conteúdo –, com a mudança de metodologia os alunos tiveram que pesquisar e estudar os conteúdos, em que cada aluno pôde fazer isso no seu tempo, ou seja, usou quanto tempo precisava para estudar os conceitos propostos, incentivando a autonomia no processo para o domínio dos conteúdos estudados. A proposta metodológica adotada nesta pesquisa, permitiu que cada aluno estabelecesse qual o seu ritmo para seus estudos. Isso corrobora com Bergmann e Sams (2016) quando é relatado que a metodologia SAI possibilita a personalização do processo de ensino, considerando a heterogeneidade de uma sala de aula. Cada aluno também pôde determinar por meio de seus estudos, quais conceitos considerava necessários para resolver o que foi solicitado para estudar, sendo que alguns alunos obtiveram êxito em suas escolhas, enquanto outros precisaram complementá-las ou revê-las. Para

Berbel (2011),

> As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras. (BERBEL, p. 28, 2011)

Quando foi apenas indicado quais conteúdos os alunos deveriam estudar, sendo que eles tiveram que pesquisar fontes de estudo para esses conceitos, as análises mostram que os alunos foram capazes de ter tal autonomia sobre seu processo de aprendizagem.

Um ganho que a mudança da metodologia também trouxe em comparação com a metodologia tradicional, foi a possibilidade de observar alguns equívocos que os alunos cometem, que antes – com uma metodologia tradicional – possivelmente não seriam detectados. É o caso por exemplo da atividade 3 da atividade de controle que solicitava o cálculo do argumento de um número complexo. O aluno D que pesquisou e estudou os conceitos propostos pela internet, se deparou com um exemplo no *site* em que era calculado o seno, o cosseno e a tangente do argumento, e então assumiu que apenas o cálculo da tangente seria suficiente para determinar o argumento. Durante a discussão o aluno D disse: “Então não pode? Porque dá o maior trabalho calcular o módulo e depois o seno e cosseno”. É provável que esse aluno optou por esse caminho por considerá-lo menos trabalhoso, uma vez que não é necessário calcular o módulo. Porém, ao tentar resolver a atividade, ele foi capa de perceber que precisaria de mais alguma informação além da tangente.

Esse equívoco provavelmente não seria detectado caso eu tivesse explicado esse conteúdo, pois numa metodologia tradicional optaria por explicar calculando o valor do seno e do cosseno, não deixando espaço para o aluno “pensar” em outras possibilidades. Os alunos apenas replicariam a sequência de passos que eu teria ensinado e obteriam o valor do argumento. Isso não seria ruim para a assertividade, pois acredito que a maioria dos alunos acertaria o valor do argumento. Porém, a metodologia adotada permitiu que os alunos testassem outros caminhos que, num primeiro momento, lhes parecia melhor, possibilitando assim discussões que provavelmente não aconteceriam numa metodologia tradicional.

Ainda sobre a atividade 3, foi possível perceber como alguns alunos se apropriaram de mais de uma representação dos números complexos para determinar o argumento. A capacidade de conversão dos registros, identificando suas características em cada registro, colaboraram para uma coordenação de informações e habilidades que são importantes para a compreensão do objeto matemático estudado (Duval, 2010).

A escolha do pesquisador em não preparar/indicar fontes de estudo para que os alunos estudassem os conteúdos, deixou os alunos mais ainda como sujeitos no processo de ensino. Cabe a escola o papel de não ser apenas um lugar de "transmissão de conhecimento", mas sim, de criar oportunidades para que os alunos desenvolvam competências. Segundo Perrenoud (1999), muitos adultos que tiveram uma escolaridade básica completa, sentem-se despreparados diante das novas demandas da vida cotidiana. Desse modo, a oportunidade de "jogar na mão dos alunos" a responsabilidade por pesquisar fontes de conhecimento, colabora para desenvolver competências que, provavelmente, favorecerão suas maneiras no futuro de lidar com novas situações. Esse fato fica evidenciado inclusive nesse momento, que estamos vivendo uma situação de pandemia. Os alunos, estudando em suas residencias por meio de aulas e atividades onlines, devem ter a capacidade de não se limitar a uma única explicação. Eles podem – e devem – procurar outras fontes de conhecimento para complementar ou aprofundar seus estudos.

A escolha de manter essa fase de pesquisa na adaptação da metodologia SAI, corrobora com a ideia de alunos numa postura ainda mais ativa. Segundo Moran (2015),

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORAN, 2015, p.17)

Com base nas análises dos registros da pesquisa, o fato dos alunos pesquisarem qual(is) fonte(s) de estudo(s) utilizariam, trouxe alguns ganhos e alguns pontos a se tomar cuidado no processo de ensino.

Um ganho observado nas análises, foi que, como os alunos têm a liberdade de pesquisar em diferentes fontes de estudo, cada aluno pode apresentar um caminho diferente para compreender um determinado conteúdo, gerando assim, a possibilidade de debates que envolvam diferentes concepções relacionadas a compreensão daquele conteúdo. Como por exemplo no caso da nomenclatura dos eixos, que os alunos encontraram em seus estudos várias formas de nomeá-los. No momento de validação no final da aula, foi possível fazer uma discussão desse conceito graças as variações sobre esse conceito que apareceram durante os estudos que os alunos fizeram. Segundo (BERBEL, p. 28, 2011) “A implementação dessas metodologias pode vir a favorecer uma motivação autônoma quando incluir o fortalecimento da percepção do aluno de ser origem da própria ação [...]”.

Como um ponto a se tomar cuidado, uma pesquisa feita por um aluno para estudar um conteúdo sem uma orientação/direcionamento de quais materiais ele deve acessar, pode acabar levando a materiais que apresentem concepções equivocadas sobre algum conteúdo ou, levar a materiais que tratem o assunto com uma profundidade/nomenclatura além do exigido na educação básica. Foi o caso de um aluno dessa pesquisa que, ao pesquisar sobre os números complexos na internet, acabou se deparando com um material sobre números complexos voltado para o ensino superior, em que as nomenclaturas e profundidade do assunto não são coerentes para alguém que está começando a estudar esse conteúdo. Esse tipo de situação pode ser um problema caso o aluno não participe das interações com os colegas/professor e exponha seus entendimentos do assunto, correndo o risco desse aluno permanecer com equívocos no domínio daquele conteúdo. Por outro lado, se esse aluno debater com os colegas/professor o que entendeu em seus estudos, isso pode gerar discussões que façam todos os envolvidos refletirem sobre seus estudos e, se necessário, revejam seus conceitos sobre aquele conteúdo.

Não existe uma metodologia perfeita que satisfaça todos as dificuldades encontradas no ambiente escolar. As inúmeras variáveis que compõe um processo de ensino, o tornam tão complexo que é difícil afirmar se determinadas mudanças trouxeram ganhos ou não para o processo de aprendizagem. Por isso a análise se torna quase como um estudo de caso, sendo que os resultados das análises se fazem coerentes para esses sujeitos da pesquisa, nesse tempo e nessas condições. O que se pôde constatar com a proposta de mudança na metodologia foi que a postura dos alunos mudou, tornando-os mais responsáveis pelo domínio dos conteúdos propostos, sendo que cada um pode de maneira autônoma, pesquisar e estudar os conteúdos usando o tempo necessário para tal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, B. L. C. **Possibilidades e limites de uma intervenção pedagógica pautada na metodologia da sala de aula invertida para os anos finais do ensino fundamental**. 2017. 137 f. Dissertação (Programa: Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2017

ARAUJO, U. F. **A quarta revolução educacional: a mudança de tempos, espaços e relações na escola a partir do uso de tecnologias e da inclusão social**. ETD: Educação Temática Digital, Campinas, v. 12, n. especial, p.31-48, 2011. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/etd/article/view/1202>. Acesso em: 15 mar. 2019

BERBEL, N. A. N. **As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes**. Semina: Ciências Sociais e Humanas, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, jan/jun. 2011.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. 1. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; AMARAL, R.B. **Educação a Distância online**, 3ª ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

BOURCHERVILLE G. C.; VALENTE J. A. **Mediação Didática e Métodos Inovadores de Ensino e Aprendizagem**. Revista de Educação a Distância – Re@d, v.1, n.1, São João del-Rei, janeiro-junho, 2019. Disponível em: https://www.nead.ufsj.edu.br/revista/index.php/home/article/download/10/9 Acesso em: 14 jan. 2020.

BRAVIM, J. D. **Sala de aula invertida: proposta de intervenção nas aulas de matemática do ensino médio**. 2017. 211 f. Dissertação (Programa: educação em ciências e matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Espírito Santo, 2017

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques.** Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7, n.2, p. 33-115, 1986

BRUCE, B. C.; HOGAN, M. P. **The Disappearance of Technology: Toward an Ecological Model of Literacy**. In D. Reinking, M. McKenna, L. Labbo, & R. Kieffer (Eds.), Handbook of literacy and technology: Transformations in a post-typographic world, p. 269-281, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1998

HRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. **Ensino Híbrido: uma Inovação Disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos**. Clayton Christensen Institute. Tradução: Fundação Lemann e Instituto Península, p. 1-52. Disponível em: <https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf> Acesso em: 20 mar. 2019.

DEMO, P. **Pedro Demo aborda os desafios da linguagem no século XXI**. In: Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as T IC: guia do cursista / Maria Umbelina Caiafa Salgado, Ana Lúcia Amaral. — Brasília; Ministério da Educação, Secretária de Educação à Distância; cap. 4, p. 139. 2008

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, cap.1, p.11-33, 2010.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre. Editora: Artmed. 2ª Edição. 2007

ENGEL, G. I. **Pesquisa-ação**. Educar em Revista, nº. 16, p.181-191. Universidade Federal do Paraná, Paraná. 2000.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 2ª ed. rev. e ampl. São Paulo, Editora: Livraria da Física, 2007.

HONORIO, H. L. G. **Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática**. 2017. 96 f. Dissertação (Programa: Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2017

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Tradução: Maria Cristina Gularte Monteiro. Porto Alegre: Penso, 2015.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 9ª ed. Campinas: Papirus, 2003.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. tradução Heloisa Monteiro e Francisco Settineri. — Porto Alegre : Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMQ, 1999.

MACHADO, D. R. **Metodologias ativas: o papel da pesquisa na formação de professores de matemática**. 2018. 145 f. (Programa: Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2018.

MATOS, V. C. **Sala de aula invertida: uma proposta de ensino e aprendizagem em matemática.** 2018. 146 f. Dissertação (Programa: Matemática em Rede Nacional) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018

MORAN, J. **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens**. vol. II, p.15-33, Carlos Alberto de

Souza e Ofelia Elisa Torres Morales (orgs.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, Ponta Grossa, 2015. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf> Acesso em: 13 fev. 2019.

MOREIRA, R. C. **Ensino da matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a "sala de aula invertida"**. 2018. 50 f. Dissertação (Programa: Programa de Pós-graduação em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Amazonas, 2018

OLIVEIRA, G. P. **Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do superlogo e do geogebra**. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 7, 2013, Montevideo: programa y resúmenes del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013. v. 1, 359 p.

OLIVEIRA, G. P. *et al*. **Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola***.* Porto Alegre: Artmed, 1999

________. Desenvolver competências ou ensinar saberes? A escola que prepara para a vida. Porto Alegre: Penso, 2011.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. 18 ed. Petropólis: Vozes, 1995.

SANTANA, H. E. M. **Uma proposta de aplicação das fórmulas de Moivre para potenciação e radiciação de números complexos por meio da sala invertida**. 2018. 48 f. Dissertação (Programa: Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amazonas, Amazonas, 2018

SEVERINO, A.J. **Metodologia do Trabalho Científico**, 23ª edição revista e atualizada, 2ª reimpressão, São Paulo, Cortez Editora, 2008

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4ª ed. revisada e atualizada, Florianópolis: UFSC, 2005. Disponível em: <https://projetos.inf.ufsc.br/arquivos/Metodologia_de_pesquisa_e_elaboracao_de_teses_e_dissertacoes_4ed.pdf >. Acesso em: 20 mar. 2019.

SOUZA, I. S. **Matemática e música: desvendando essa relação na perspectiva do ensino híbrido**. 2018. 161 f. (Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

TALBERT, R. **Guia para Utilização da Aprendizagem Invertida no Ensino Superior**. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

THIOLLENT, Ml. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TRIPP, D. **Pesquisa-ação: uma introdução metodológica**. Educação e pesquisa, v. 31, n. 3, p. 443-466, 2005.

VALENTE, J. A. **A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação**. UNIFESO - Humanas e Sociais, Rio de Janeiro, Vol.1, n.1, p. 141-166, 2014. Disponível em: <https://www.unifeso.edu.br/revista/index.php/revistaunifesohumanasesociais/article/viewFile/17/24>. Acesso em: 05 mar. 2019

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B.; GERALDINI, A**. F. S. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 17, n. 52, p. 455-478, abr./jun. 2017. Disponível em: <http://pat.educacao.ba.gov.br/conteudos/conteudos-digitais/download/10586.pdf**> Acesso em: 08 nov. 2019

ANEXO 1: QUESTIONÁRIO

1) Você acessou e estudou os conteúdos propostos?

2) Antes de estudar os conteúdos propostos no vídeo, você já conhecia alguma coisa sobre o plano de Argand-Gauss, módulo de um número complexo e/ou argumento de um número complexo?

3) Em caso afirmativo, o que você sabia e de onde você tirou essa informação?

4) Para estudar sobre o plano de Argand-Gauss, você estudou por qual meio?

4.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

4.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

4.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

4.4) Caso você tenha respondido "parentes", qual o parentesco e qual a formação deles?

4.5) Caso você tenha respondido "outros", especifique.

5) Para estudar sobre o conceito de "módulo de um número complexo", você estudou por qual meio?

5.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

5.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

5.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

5.4) Caso você tenha respondido "parentes", qual o parentesco e qual a formação deles?

5.5) Caso você tenha respondido "outros", especifique.

6) Para estudar sobre o conceito de "argumento de um número complexo", você estudou por qual meio?

6.1) Caso você tenha respondido livro, qual foi o(s) livro(s)?

6.2) Caso você tenha respondido internet, qual foi o termo pesquisado, ou seja, qual foi(foram) a(s) palavra(s) pesquisada(s)?

6.3) Qual site/vídeo você acessou? Coloque os links aqui.

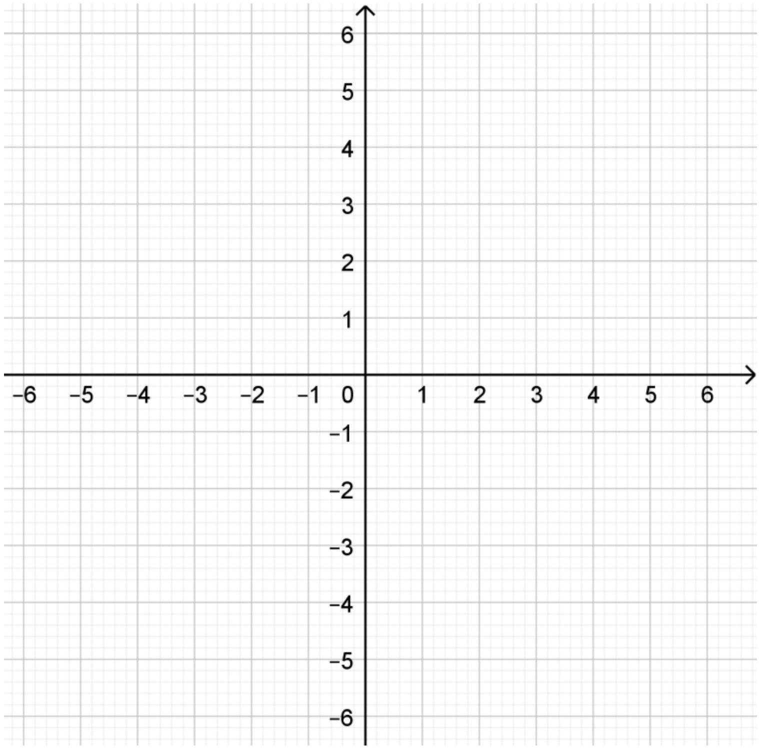
6.4) Caso você tenha respondido “parentes”, qual o parentesco e qual a formação deles?

6.5) Caso você tenha respondido “outros”, especifique.

ANEXO 2: ATIVIDADE DE CONTROLE

Números Complexos

1. Represente no plano de Argand-Gauss os números complexos $z = 2 + 3i$, $w = -1 + i$, $r = -2i$, $s = -\sqrt{3} + i$ e $t = 5$.



2. Determine o módulo de cada número complexo a seguir.

a) $z = 2 - 2i$

b) $w = -3 + 7i$

c) $t = \sqrt{5} - i$

d) $s = 2i$

e) $p = 5$

f) $\mathrm{q} = 3 + i$

3. Determine o argumento de cada número complexo a seguir.

a) $z = 1 + i$

b) $w = -2 + 2i\sqrt{3}$

c) $s = -3i$

d) $t = 4\sqrt{3} - 4i$

e) $k = 5$

f) $\mathrm{q} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$