

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

JANINE FREITAS MOTA

**UM ESTUDO ONTOSSEMIÓTICO SOBRE OS CONHECIMENTOS
DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DE APLICAÇÕES DA INTEGRAL
DEFINIDA COM ESTUDANTES DE MATEMÁTICA**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2021

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

JANINE FREITAS MOTA

**UM ESTUDO ONTOSSEMIÓTICO SOBRE OS CONHECIMENTOS DIDÁTICO-
MATEMÁTICOS DE APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA COM
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA**

Tese apresentada à Banca Examinadora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutora em Educação Matemática**, sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

SÃO PAULO

2021

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadora ou eletrônicos.

Assinatura: _____ São Paulo, ___/___/2021.

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

M917 Mota, Janine Freitas
UM ESTUDO ONTOSSEMIÓTICO SOBRE OS CONHECIMENTOS
DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DE APLICAÇÕES DA INTEGRAL
DEFINIDA COM ESTUDANTES DE MATEMÁTICA . / Janine
Freitas Mota. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
291p. il. ; cm.

Orientador: Celina Aparecida Almeida Pereira
Abar.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, (Mestrado Profissional) -- Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Educação Matemática no Ensino Superior.. 2.
Licenciatura. Integral Definida.. 3. Enfoque
Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução
Matemática.. 4. Conhecimento Didático-Matemático do
Professor.. I. Abar, Celina Aparecida Almeida
Pereira . II. Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática. III. Título.

CDD

JANINE FREITAS MOTA

**UM ESTUDO ONTOSSEMIÓTICO SOBRE OS CONHECIMENTOS DIDÁTICO-
MATEMÁTICOS DE APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA COM
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA**

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a Celina Aparecida Almeida Pereira Abar — orientadora
PUC-SP

Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos
UNIMONTES-MG

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima
PUC-SP

Prof. Dr. João Bosco Laudares
PUC-MG

Prof.^a Dr.^a Sonia Barbosa Camargo Iglioni
PUC-SP

À minha mãe Flora, que fez tudo o que podia e que não podia por seus filhos. Esse título é seu, Mamãe: Doutora na arte de educar!

Ao meu esposo Raphael e meus filhos Miguel e Lavínia. Obrigada pelas expressões de carinho que me fortalecem a cada dia.

*O presente trabalho foi realizado com apoio da
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal
de Nível Superior - Brasil (CAPES). Código de
Financiamento 001 – Número do Processo:
88887.163120/2018-00.*

*Agradeço à CAPES pela Bolsa de Estudos
concedida, o que permitiu o desenvolvimento
desta pesquisa.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço-Vos, meu Deus, que sois Pai, Filho e Espírito Santo, por me dar força e coragem para vencer mais uma jornada. A Maria Santíssima, pela intercessão poderosa. A todos os Santos e Anjos de Deus, por rogarem por mim.

À professora Dra. Celina Abar, pelo apoio e pela competente orientação.

Aos professores Dr. Edson Crisostomo dos Santos, Dr. Gabriel Loureiro de Lima, Dr. Frederico da Silva Reis, Dr. João Bosco Laudares, Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni, que compuseram a banca examinadora desta pesquisa e muito contribuíram com valiosas críticas e sugestões.

Ao professor Dr. João Bosco, pelo acompanhamento acadêmico desde o Mestrado, incentivo, sugestões e revisões neste trabalho, e, sobretudo, por sua amizade.

À minha família, com quem pude contar em todos os momentos. A meu pai e minha mãe que, com todo o Amor, provam que o infinito existe. A meu esposo Raphael, que muito me ajudou e incentivou na realização desta pesquisa – foi meu companheiro nos momentos difíceis, paciente e compreensivo durante as minhas ausências. Aos meus filhos Miguel e Lavínia, minha razão de viver e de me aprimorar como pessoa. Aos meus irmãos Ricardo, Eduardo e Aline pelo incentivo constante. Aos meus cunhados e cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, pelas orações e pelo incentivo. À minha sogra e tias que torceram por mim e me ajudaram a cuidar das crianças.

Aos alunos colaboradores que contribuíram na resolução das atividades desta pesquisa, sem os quais não seria possível nossa análise.

Ao acadêmico de iniciação científica voluntária, Rafael Dias, que prestou assistência técnica no desenvolvimento e implementação da proposta didática abordada nesta investigação.

Ao amigo Gilberto Janeiro, por valiosas sugestões e correções, pelo olhar atencioso e leitura dedicada a este trabalho, por ter viabilizado a realização da turma especial do doutorado com os contatos iniciais feitos ao Programa, por nos ensinar o valor da Amizade. Aos amigos, Vanessa Mangelot, Kátia Lima, Marco Lacerda e família, pelo carinho e hospitalidade.

Aos professores que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho: À Professora Elaine Veloso, pela cuidadosa revisão gramatical; aos professores José Higino e Tatiana Pena, pelas correções relativas aos conceitos da Física presentes nesta tese; ao professor Rosivaldo Antonio Gonçalves pelo apoio, pela leitura e apontamentos que enriqueceram esta pesquisa.

A todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação

Matemática da PUC-SP pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação como professora e pesquisadora.

Aos colegas da minha turma de doutorado em Educação Matemática, em especial, às amigas “Poderosas” Galvina Souza e Rieuse Lopes. Obrigada por todo apoio sentimental e acadêmico apresentado em forma de conversas, abraços, sugestões e discussões para o texto da tese – vocês são especiais!

A Suzanne Lima de Freitas, secretária do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, pela dedicação e eficiência.

A todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram para a realização desta pesquisa.

“Quando se diz obrigado se dizem muitas coisas mais, que vêm de muito longe e de muito perto, de tão longe como a origem do indivíduo humano, de tão perto como o secreto pulsar do coração”.

Pablo Neruda, 2013

MOTA, Janine Freitas. **Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática.** 2021. 291f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2021.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar como um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática mobiliza competências e desenvolve conhecimentos didático-matemáticos, durante a implementação de uma proposta didática que aborda significados da Integral Definida, envolvendo tecnologias digitais. O aporte teórico situa-se no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e no Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM). Recorrendo aos aspectos metodológicos da Engenharia Didática, interpretados de acordo com o EOS, por meio das facetas epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva, instrucional, realizamos as fases Estudo Preliminar, Desenho, Implementação da Trajetória Didática e Avaliação, o que possibilitou a análise sistemática do desenvolvimento e implementação da proposta didática. A fase do Estudo Preliminar evidenciou as contribuições das investigações que abordaram aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos, relacionados à Integral Definida. Na fase do Desenho, planejamos as atividades que compõem a proposta didática, partindo de situações-problema elaboradas em contextos intra e extramatemáticos, assistidas pelo GeoGebra. Na Fase de Implementação da Trajetória Didática, as atividades foram aplicadas a estudantes do terceiro período da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros em dois encontros presenciais e um encontro remoto. Os dados foram coletados por meio de gravações dos diálogos entre os participantes da pesquisa, registros escritos e digitais contendo o desenvolvimento das atividades, além de anotações das observações realizadas no momento de aplicação das atividades. As ferramentas e noções de objeto matemático e configuração de processos do EOS, utilizados na Fase de Avaliação, tornaram possíveis identificar as configurações didáticas que permitiram determinar o quanto os estudantes institucionalizaram os conhecimentos acerca dos objetos matemáticos em estudo. A análise dos dados mostrou que a proposta didática em experimentação contribuiu para os conhecimentos didático-matemáticos de estudantes em relação à Integral Definida nos aspectos: conexões entre teoria e prática, com a utilização de contextos intra e extramatemáticos; formalização, generalização e institucionalização de conhecimentos; mobilização de competências; desenvolvimento da autonomia; utilização da interdisciplinaridade; uso de diferentes tipos de registros de representação e mobilização de processos cognitivos. O processo educativo, na perspectiva do modelo de Análise Didática proposto pelo EOS, obteve um nível satisfatório de adequação didática. Concluímos que uma proposta didática referenciada nas categorias do EOS, em que se utiliza um recurso digital adequado, pode potencializar a construção de significados pessoais, uma vez que, quando as atividades envolvem contextos que trazem sentido e significado aos conhecimentos sobre o objeto matemático em estudo, os estudantes tendem a compreendê-lo melhor.

Palavras-chave: Educação Matemática no Ensino Superior. Licenciatura em Matemática. Integral Definida. Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. Conhecimento Didático-Matemático do Professor.

MOTA, Janine Freitas. **An ontossemiotic study on the didactic-mathematical knowledge of Integral Definite Integral applications with mathematics students**. 2021. 291f. Doctoral Dissertation (Doctoral Program in Mathematics Education) - Faculty of Exact Sciences and Technology, Pontifical Catholic University of São Paulo. São Paulo, 2021.

ABSTRACT

This research aims to analyze the way a group of licenciante in Mathematics students mobilizes competencies and develop didactic-mathematical knowledge during the implementation of a didactic proposal that approaches the meanings of the Definite Integral, involving digital technologies. The theoretical contribution lies in the Ontossemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (OAK) and in the Didactic-Mathematical Knowledge of the teacher (DMK). Using the methodological aspects of Didactic Engineering interpreted according to the OAK, through the epistemic-ecological, cognitive-affective and instructional facets, we conducted the Preliminary Study, Design, Implementation of the Didactic Trajectory and Evaluation phases which enabled the systematic analysis of the development and implementation of the didactic proposal. The Preliminary Study phase highlighted the contributions of investigations that approached cognitive, didactic, epistemological aspects related to Definite Integral. In the Design phase, we planned the activities that compose the didactic proposal, starting from problem situations developed in intra and extra-mathematical contexts, assisted by GeoGebra. In the Implementation Phase of the Didactic Trajectory, the activities were applied to students of the third semester of the Licenciante degree in Mathematics at the State University of Montes Claros (Unimontes) in two face-to-face meetings and one remote meeting. The data were collected through recordings of the research participants' dialogues, written and digital records containing the development of the activities, in addition to observation notes written during the activities. The tools and notions of mathematical object and OAK process configuration used in the Evaluation Phase enabled to identify the didactic configurations identification that permitted to determine how much the students institutionalized the knowledge about the studied mathematical objects. The analysis of the data showed that the didactic proposal in experimentation contributed to the didactic-mathematical knowledge of students in relation to the Definite Integral in the aspects: connections between theory and practice using intra and extra-mathematical contexts; formalization, generalization and institutionalization of knowledge; mobilization of skills; development of autonomy; use of interdisciplinarity; use of different types of representation records and mobilization of cognitive processes. The educational process in the perspective of the Didactic Analysis model proposed by OAK obtained a satisfactory level of didactic adequacy. We concluded that a didactic proposal referenced in the categories of OAK in which an adequate digital resource is used can enhance the construction of personal meanings and once the activities involve contexts that bring meaning and meaning to the knowledge about the mathematical object under study, students tend to understand it better.

Keywords: Mathematics Education in Higher Education. Licenciante degree in Mathematics. Definite Integral. Ontossemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction. Didactic-Mathematical Knowledge of the Teacher.

MOTA, Janine Freitas. **Un estudio ontosemiótico sobre los conocimientos didáctico-matemáticos de aplicaciones de la Integral Definida con estudiantes de Matemática.** 2021. 291f. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) - Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Pontificia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2021.

RESUMEN

Esta investigación tiene el objetivo de analizar cómo un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemática moviliza competencias y desarrollan conocimientos didáctico-matemáticos, durante la implementación de una propuesta didáctica que aborda significados de la Integral Definida, involucrando tecnologías digitales. El aporte teórico se sitúa en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (EOS) y en el Conocimiento Didáctico-Matemático del Docente (CDM). Recurriendo a los aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica, interpretados de acuerdo con el EOS, a través de las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional, realizamos las fases de Estudio Preliminar, Diseño, Implementación de la Trayectoria Didáctica y Evaluación, que posibilitó el análisis sistemático del desarrollo e implementación de la propuesta didáctica. La fase del Estudio Preliminar destacó los aportes de las investigaciones que abordaron aspectos cognitivos, didácticos, epistemológicos, relacionados con la Integral Definida. En la fase de Diseño planificamos las actividades que componen la propuesta didáctica, partiendo de situaciones problemáticas elaboradas en contextos intra y extramatemáticos, asistidas por GeoGebra. En la Fase de Implementación de la Trayectoria Didáctica, las actividades fueron aplicadas a estudiantes del tercer período de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Estatal de Montes Claros en dos reuniones presenciales y una reunión telemática. Los datos fueron recolectados a través de grabaciones de los diálogos entre los participantes de la investigación, registros escritos y digitales que contienen el desarrollo de las actividades, además de anotaciones de las observaciones realizadas en el momento de la aplicación de las actividades. Las herramientas y nociones de objeto matemático y configuración de procesos del EOS, utilizados en la Fase de Evaluación, hicieron posible identificar las configuraciones didácticas que permitieron determinar en qué medida los estudiantes institucionalizaron el conocimiento sobre los objetos matemáticos en estudio. El análisis de los datos mostró que la propuesta didáctica en la experimentación contribuyó para los conocimientos didáctico-matemáticos de los estudiantes en relación a la Integral Definida en los siguientes aspectos: conexiones entre teoría y práctica, con el uso de contextos intra y extramatemáticos; formalización, generalización e institucionalización de conocimientos; movilización de competencias; desarrollo de la autonomía; empleo de la interdisciplinariedad; utilización de diferentes tipos de registros de representación y movilización de procesos cognitivos. El proceso educativo, en la perspectiva del modelo de Análisis Didáctica propuesto por el EOS, obtuvo un nivel satisfactorio de adecuación didáctica. Concluimos que una propuesta didáctica referenciada en las categorías del EOS, en la que se utilice un recurso digital adecuado, puede potenciar la construcción de significados personales, puesto que, cuando las actividades involucran contextos que dan sentido y significado a los conocimientos sobre el objeto matemático en estudio, los estudiantes tienden a comprenderlo mejor.

Palabras clave: Educación Matemática en la Enseñanza Superior. Licenciatura en Matemática. Integral Definida. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática. Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação matemática de uma peça de concreto	43
Figura 2 – Representação matemática de uma peça de concreto no GeoGebra	43
Figura 3 – Facetas e Níveis de Análise Didática sob a perspectiva do EOS	50
Figura 4 – Tipos de significados institucionais e pessoais e a relação entre eles.....	55
Figura 5 – Representação ontossemiótica dos conhecimentos matemáticos.....	57
Figura 6 – Dimensões e componentes do Conhecimento Didático-Matemático (Modelo CDM) e suas relações com outros modelos	63
Figura 7 – Focos de atenção para análise didático-matemático	76
Figura 8 – Fases de desenvolvimento da proposta didática.....	78
Figura 9 – Interações didáticas	84
Figura 10 – Componentes e dinâmica interna de uma configuração didática.....	86
Figura 11 – Adequação Didática	93
Figura 12 – Distribuição dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ...	132
Figura 13 – Exemplo de um conjunto S ordenado de f	136
Figura 14 – Partição P etiquetada pela sequência I	138
Figura 15 – Representação gráfica Gf de uma função g em um sistema cartesiano, com exposição sombreada de regiões retangulares usadas para aproximar a medida da área sob a curva g , em um intervalo $[a, b]$	138
Figura 16 – Representação gráfica Gf de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada de regiões retangulares usadas para aproximar a medida da área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$	139
Figura 17 – Representação gráfica Gf de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada da região que representa a área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$	140
Figura 18 – Representação gráfica Gf de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada da região que S que representa a área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$	140
Figura 19 – Representação gráfica de uma região $S_\varepsilon(x)$ em um intervalo $x - h/2, x + h/2$..	141
Figura 20 – Representação gráfica da região S limitada pelo conjunto Gf ,.....	146
Figura 21 – Representação gráfica da região S , formada pelas representações gráficas de duas funções f e g	147
Figura 22 – Organização da Proposta Didática para o estudo da Integral Definida.....	150

Figura 23 – Configuração de objetos matemáticos primários	163
Figura 24 – Identificação dos elementos de análise didática utilizados	185
Figura 25 – Esquema que representa funções semióticas em termos de linguagem	191
Figura 26 – Tela do GeoGebra referente às práticas inerentes à CD 1.1	196
Figura 27 – Protocolo extraído do Guia de Atividades de uma.....	203
Figura 28 – Protocolo da dupla Mariana e Jair, referente à Tarefa 1, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1.....	204
Figura 29 – Protocolo da dupla Ítalo e Luiz, referente à Tarefa 1, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1.....	204
Figura 30 – Protocolo da dupla Gisele e Bruno referente à Tarefa 2, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1.....	205
Figura 31 – Tela do arquivo GeoGebra da dupla Mariana e Jair – Atividade 1 da Unidade 1	214
Figura 32 – Protocolo do estudante Jair referente à Tarefa 4, 1º passo da Atividade 2, Unidade 1	221
Figura 33 – Protocolo das estudantes Elba e Franciele referente à Tarefa 6, 1º passo – Atividade 2 da Unidade 1	222
Figura 34 – Protocolo do estudante Jair referente à Tarefa 6, 1º passo – Atividade 2 da Unidade 1.....	222
Figura 35 – Protocolo dos estudantes Gisele e Bruno, referente à Tarefa 7.....	222
Figura 36 – Protocolo dos estudantes Gisele e Bruno, referente à resolução da Tarefa 11 –	224
Figura 37 – Telas de Gisele e Bruno; e de Elba e Franciele referente à realização da Tarefa 12 – Atividade 2 da Unidade 1; utilização dos comandos <i>Soma Superior</i> e <i>Soma Inferior</i> do GeoGebra.....	227
Figura 38 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 9$, no intervalo $[0,3]$	232
Figura 39 – Representação gráfica da função $vt = 6 - t$, no intervalo $0,12$	244
Figura 40 – Hexágono da adequação geral da proposta didática implementada.....	263

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conhecimento do conteúdo (comum, especializado e ampliado)	64
Quadro 2 – Conhecimento de conteúdo em relação aos estudantes (aprendizagem)	65
Quadro 3 – Conhecimento do conteúdo em relação ao ensino.....	65
Quadro 4 – Conhecimento do currículo e das conexões intra e interdisciplinares.....	65
Quadro 5 – Configurações didáticas.....	85
Quadro 6 – Lista de trabalhos utilizados na revisão bibliográfica	96
Quadro 7 – Síntese das Configurações Epistêmicas da Integral propostas por Crisostomo (2012)	144
Quadro 8 – Configuração Epistêmica por Unidade de Estudo	147
Quadro 9 – Atividade 1 da Unidade 1, conforme foi apresentada aos estudantes	152
Quadro 10 – Atividade 2 da Unidade 1, conforme foi apresentada aos estudantes	159
Quadro 11 – Atividade 3 da Unidade 2, conforme foi apresentada aos estudantes.	171
Quadro 12 – Implementação das trajetórias didáticas	180
Quadro 13 – Facetas com indicadores de instrução da didática da Matemática	183
Quadro 14 – Situações-problema propostas nas Atividades 1 e 2 da Unidade 1	190
Quadro 15 – Configurações Didáticas – Atividade 1 da Unidade 1.....	193
Quadro 16 – Configuração Didática 1.1 – Atividade 1 da Unidade 1.....	194
Quadro 17 – Configuração Didática 1.2 – Atividade 1 da Unidade 1.....	198
Quadro 18 – Configuração Didática 1.3 – Atividade 1 da Unidade 1.....	207
Quadro 19 – Prática P3.3 – Cálculo da proporcionalidade entre a medida aproximada da ...	210
Quadro 20 – Prática P3.3 – Cálculo do erro encontrado como resultado da.....	210
Quadro 21- Protocolos extraídos dos guias de atividades dos estudantes – CD 1.3 da Atividade 1, Unidade 1	213
Quadro 22 – Configurações Didáticas – Atividade 2 da Unidade 1.....	217
Quadro 23 – Configuração Didática 2.1 – Atividade 2 da Unidade 1.....	218
Quadro 24 – Configuração Didática 2.2 – Atividade 2 da Unidade 1.....	224
Quadro 25 – Configuração Didática 2.3 – Atividade 2 da Unidade 1.....	230
Quadro 26 – Situação-problema 3, proposta na Atividade3 da Unidade 2	239
Quadro 27 – Configurações Didáticas – Atividade 3 da Unidade 2.....	241
Quadro 28 – Configuração Didática 3.1 – Atividade 3 da Unidade 2.....	242
Quadro 29 – Configuração Didática 3.2 – Atividade 3 da Unidade 2.....	229

Quadro 30 – Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 14 – Atividade 3 da Unidade 2.	252
Quadro 31- Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 16 – Atividade 3 da Unidade 2 ..	253
Quadro 32 – Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 21 – Atividade 3 da Unidade 2.	255
Quadro 33 – Abordagem de pontos fortes e entraves manifestados pelos estudantes na implementação da proposta didática	272

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	18
Capítulo 2 – Trajetória Profissional e Problematização	26
2.1 Trajetória profissional e motivações para a pesquisa	26
2.2 Caracterização dos componentes do conhecimento do professor	28
2.3 A problematização subjacente aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral	35
2.4 A constituição da problematização da pesquisa, seu objeto de estudo e a opção pelo uso de tecnologias digitais	38
Capítulo 3 – Estrutura Teórica: O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e o Conhecimento Didático-Matemático (CDM)	48
3.1 Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) 48	
3.1.1 <i>Sistemas de Práticas</i>	51
3.1.2 <i>Configurações de objetos e processos</i>	52
3.1.3 <i>Dimensão normativa</i>	59
3.1.4 <i>Idoneidade didática</i>	59
3.2 Modelo de Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM)	61
3.3 Aspectos do EOS e CDM considerados na pesquisa	66
Capítulo 4 – Estrutura Metodológica: Elementos do EOS com aportes da Engenharia Didática	70
4.1 Pesquisa Qualitativa	70
4.2 Enfoque Ontossemiótico com aportes da Engenharia Didática	71
4.3 Metodologia, participantes e contexto da pesquisa	77
4.4 Procedimentos metodológicos para estudo preliminar diagnóstico (Fase 1)	78
4.5 Procedimentos metodológicos para o desenho da proposta didática (Fase 2)	79
4.5.1 <i>Escolhas Macro e Microdidáticas</i>	82
4.6 ...Procedimentos metodológicos para implementação da proposta didática (Fase 3)	83
4.7 Procedimentos metodológicos para avaliação da proposta didática (Fase 4)	90
Capítulo 5 – Estudo Preliminar	95
5.1 Seleção das referências	95
5.2 Categoria Epistêmica-ecológica	98

5.3	Categoria Cognitiva-afetiva	105
5.4	Categoria Instrucional	110
5.5	Considerações sobre o Estudo Preliminar e Diagnóstico	118
Capítulo 6 – Desenho da Proposta Didática		128
6.1	O processo de construção do desenho da proposta didática	128
6.2	Configuração Epistêmica-ecológica	131
6.2.1	<i>O Estudo da Integral Definida na Licenciatura em Matemática da Unimontes</i>	131
6.2.2	<i>Significados Institucionais de Referência</i>	135
6.2.2.1	Área, Integral de Riemann e Integral Definida.....	135
6.2.2.2	Significados Institucionais da Integral Definida utilizados na proposta didática ...	143
6.2.3	<i>Trajetória Didática em cada Unidade de Estudo</i>	147
6.2.3.1	Unidade 1: Institucionalização do conceito de Integral Definida.....	150
6.2.3.2	Unidade 2: Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos	170
6.3	Configuração Cognitiva-Afetiva	175
6.4	Configuração Instrucional (Mediacional e Interacional)	177
Capítulo 7 – Implementação e Análise da Proposta Didática		179
7.1	Trajetórias didáticas realizadas	179
7.2	Elementos da análise didática	181
7.3	Descrição da trajetória didática referente ao desenvolvimento da Unidade 1: Institucionalização do conceito de Integral Definida	186
7.3.1	<i>Práticas Matemáticas e Didáticas referentes à Unidade 1</i>	189
7.4	Descrição da trajetória didática referente ao desenvolvimento da Unidade 2: Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos	238
7.4.1	<i>Práticas Matemáticas e Didáticas referentes à Unidade 2</i>	238
7.5	Avaliação da Adequação da Proposta Didática sobre Integral Definida	256
7.5.1	<i>Adequação epistêmica-ecológica</i>	257
7.5.2	<i>Adequação cognitiva-afetiva</i>	259
7.5.3	<i>Adequação instrucional (mediacional e interacional)</i>	261
7.5.4	<i>Perspectiva Geral da Adequação Didática</i>	262
Capítulo 8 – Considerações Finais		265
Referências		277
Anexos		289

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A investigação da qual resultou esta tese insere-se na linha de pesquisa *Tecnologias da Informação e Educação Matemática*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), especificamente no âmbito do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM). Para seu desenvolvimento, o Projeto de Pesquisa foi submetido ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) e aprovado mediante parecer consubstanciado n. 3.943.407.

A formação matemática e didática de estudantes de Licenciatura em Matemática constitui um campo de pesquisa que tem apresentado acentuado interesse nas últimas décadas pela comunidade acadêmica em Educação Matemática, embora, há muito tempo, seja uma área ativa com considerável produção (BISHOP, 2013). O principal motivo dessa expansão de estudos, em que se considera a natureza teórica desse campo, é que, reconhecidamente, o conhecimento¹ matemático e as competências² dos professores contribuem significativamente para construção de conhecimentos pelos estudantes e aprimoramento de suas capacidades. Assim, a formação de conceitos e o desenvolvimento do conhecimento curricular, didático e matemático exigidos dos futuros professores para ensinar Matemática vêm gerando interesse na pesquisa em Educação Matemática.

No âmbito desse interesse, a busca pela qualidade do ensino e pela aprendizagem de Matemática suscita mudanças de paradigmas, incitadas pelas formas de inserção da atual sociedade nos espaços cibernéticos, com transformações que vêm ocorrendo em velocidades cada vez maiores, notadamente nas duas últimas décadas. Ao discutir sobre esse aspecto, Rajobac e Romani (2011, p. 16) ponderam que “a condição pós-moderna compõe um cenário marcado pelo científico-cibernético, pelo técnico e informacional. Essas dimensões são determinantes para que se pensem os processos educativos e o conjunto da vida social no contexto pós-moderno”.

A Matemática é uma das principais fontes de conhecimento para a comunicação da linguagem em *bits*, as quais fundam o modelo de processos e produtos que respondem às novas demandas sociais, de novas culturas, de comportamentos, entre eles o de mercado.

¹ Na abordagem teórica que assumimos neste estudo, o termo conhecimento é utilizado no sentido de "construção epistêmico-cognitiva geral que inclui compreensão, competência e disposição" (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2010, p. 209).

² Assumimos, nesta pesquisa, o indicador de competência proposto por Font (2011, p. 18), como “uma ação efetiva realizada em determinado contexto com um determinado propósito”.

Nesse contexto, o *mercado* também impulsionou novas tendências de funcionamento social e cultural da sociedade imersa em tecnologia, cujas características apelam para uma expansão do consumo frenético e da comunicação em larga escala. Essas tendências revolucionaram as formas tradicionais de formação dos profissionais na atualidade, entre eles, os profissionais da Educação. A Didática da Matemática, problematizando essas tendências, auxilia o professor a pensar o papel dessa ciência na formação de sujeitos consumidores de informação e de tecnologia. Assim, colabora para (re)significar o planejamento, a forma de abordar e apresentar a Matemática nas situações de aula e a proceder em intervenções e encaminhamentos, em que se objetiva a construção de aprendizagens pelos estudantes.

Atinente aos estudantes de Licenciatura em Matemática, esses têm nessa área do conhecimento uma importante ferramenta de linguagem que modela os vários fenômenos científicos, assim, é possível pensar em seu ensino de modo que contemple variados contextos e que mobilize o conhecimento acerca dos distintos significados dos objetos matemáticos em estudo.

O uso de tecnologias digitais e outros recursos didáticos exigem planejamento de práticas do professor, a fim de integrar docência e pesquisa, teoria e prática, com o propósito de criar condições para qualificar o processo de educar matematicamente. Há também uma expectativa de que a aprendizagem seja um processo de construção de sentidos e significados pelos estudantes, em diferentes níveis e modalidades de ensino. Desse modo, a prática convencional de ensinar pode ser ressignificada: professor e estudante auferindo novas atribuições, com atitudes dinâmicas e integradas.

Ao refletirmos sobre o processo de significação relativo aos conteúdos matemáticos, recorreremos aos estudos de Vygotsky (2001, p. 465), que faz uma distinção entre sentido e significado de uma palavra. Para esse autor,

[...] o sentido de uma palavra e a soma de todos os fatos psicológicos que ela desperta em nossa consciência. Assim, o sentido é sempre uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem várias zonas de estabilidade variada. O significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata.

Embora esse autor faça uma distinção entre sentido e significado de uma palavra, entendemos que essa diferenciação também pode se referir a um objeto matemático, conforme estabelecido na base teórica que utilizamos nesta pesquisa e que será apresentada adiante, em

que o significado é relacionado ao *conteúdo de qualquer função semiótica*³ (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 19).

A discussão acerca da formação de professores de Matemática demanda identificar o tipo de conhecimento didático-matemático⁴ que o professor de Matemática tem, ou deveria ter, para planejar e realizar suas aulas. Nesse sentido, Pino-Fan (2014, p. 1, tradução nossa) pondera que “várias pesquisas têm sido realizadas para a identificação dos componentes do complexo de conhecimentos que um professor deve ter com o propósito de desenvolver, eficientemente, a sua prática e, assim, facilitar a aprendizagem de seus alunos”.

Ao considerar a mobilização da atividade docente nos diversos níveis de ensino, Godino *et al.* (2017) concebem que essa remete ao argumento de que o professor de Matemática precisa apresentar competência matemática, ou seja, precisa entender e ser capaz de realizar as práticas matemáticas, necessárias para resolver os problemas matemáticos a serem abordados com os estudantes no nível correspondente, fazendo uma articulação com os conteúdos dos níveis seguintes. Nesse sentido, discorrem que

[...] há também consenso geral de que os professores devem ter conhecimento especializado de seu próprio conteúdo, das transformações que devem ser aplicadas a ele nos processos de ensino e aprendizagem, bem como as interações do conteúdo matemático a ser ensinado com diversos fatores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos etc.) que condicionam esses processos (GODINO *et al.*, 2017, p. 91, tradução nossa).

A opção pelo tema de formação didático-matemática de professores, justifica-se pela motivação e relevância em colaborar com a mobilização de conhecimentos e o desenvolvimento de competências dos estudantes de Licenciatura em Matemática, no que se refere à sua formação inicial e ao seu papel no estabelecimento de condições, em suas práticas profissionais futuras, que incentivem seus estudantes a construir as aprendizagens esperadas.

As pesquisas em Educação Matemática, com o tema Formação de Professores de Matemática, tem passado por avanços consideráveis na perspectiva de se organizar a licenciatura, desde o início, por meio do desenvolvimento de disciplinas específicas de Matemática, Educação Matemática, disciplinas pedagógicas, entre outras.

Ao buscar na prática um suporte no desenvolvimento de competências dos professores,

³ Uma função semiótica é entendida, no EOS, como a correspondência entre um objeto antecedente (expressão, significante) e um conseqüente (conteúdo, sentido) estabelecido por um sujeito (pessoa ou instituição), segundo um critério ou regra de correspondência.

⁴ Usamos a expressão *conhecimento didático-matemático* – em referência ao conhecimento profissional docente em Matemática – no âmbito do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), que constitui a estrutura teórica desta pesquisa, abordada no Capítulo 3.

os currículos das licenciaturas em Matemática abordam formas de aquisição de competências matemáticas docentes, conforme disposto por Rubio (2012, p. 4, tradução nossa): “promover a competência dos professores na análise de práticas, processos e objetos matemáticos é uma etapa necessária para desenvolver a competência profissional que lhes permite desenvolver e avaliar as competências matemáticas”.

Na Universidade Estadual de Montes Claros, onde a autora deste trabalho atua como formadora, o currículo da Licenciatura em Matemática passou por diversas modificações que visaram acompanhar os avanços ocorridos na sociedade, intentando implementar um processo formativo que esteja coerente com as políticas públicas e com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). As modificações recentes no projeto do referido curso têm como principal inovação a adequação aos avanços teóricos e tecnológicos de atuação docente que estão acontecendo na sociedade.

Pautamo-nos na perspectiva de que a formação inicial busca proporcionar aos futuros professores experiências enriquecedoras e desafiadoras, permitindo-lhes ser criativos e competentes, tanto na resolução de problemas e nas investigações como na compreensão de novos conceitos, na problematização do fazer docente e no uso coerente das tecnologias digitais.

O objetivo desta pesquisa é identificar competências e conhecimentos didático-matemáticos mobilizados ou desenvolvidos na implementação de uma proposta didática, realizada com o suporte das tecnologias digitais, que aborda significados de um objeto matemático, tendo como base teórica o modelo de Conhecimento Didático-Matemático (CDM), proposto por Godino (2009). Intentamos contribuir para a formação inicial de professores de Matemática no contexto do estudo do Cálculo Integral, em específico, da Integral Definida de funções reais de uma variável real, com a utilização de tecnologias digitais.

São abordados aspectos epistêmicos e cognitivos para os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico⁵ do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2008), apoiados em ferramentas das tecnologias digitais.

Os sujeitos da pesquisa foram um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática. A expectativa, nessa *práxis*, reside na potencialização de competências relativas à resolução de problemas, envolvendo Integral Definida, com o propósito de colaborar com seus processos formativos e constitutivos de sujeitos atuantes em uma sociedade consumidora de informações

⁵ A palavra "onto-semiótico" e suas derivações foi grafada, nesta tese, na língua portuguesa como "ontossemiótico", segundo o novo acordo ortográfico.

e de tecnologias.

Selecionamos um tema do Cálculo Diferencial e Integral como objeto matemático de investigação didática, por ser essa uma área da Matemática que se apresenta como um assunto de especial atenção, de diferentes abordagens teóricas, especialmente, as questões de natureza cognitiva relacionadas às concepções de estudantes, esquemas cognitivos e tipos de erros; e de ensino, referentes a estratégias e alternativas instrucionais, tal como é discutido por Artigue (1991), Tall (2002), González-Martín (2006), Crisostomo (2012), Pino-Fan, Godino e Font (2013), Almeida (2017), Miranda (2018), entre outros.

Duval (1995, p. 15) aponta que "não há conhecimento que possa ser mobilizado por um indivíduo sem uma atividade de representação.". Assim, recorrer a diferentes modos de representação e abordagem dos conteúdos amplia as possibilidades de compreensão pelos estudantes.

O sentido de uma representação, segundo Godino, Batanero e Font (2008), é tido como a possibilidade de interpretação produzida e inerente ao uso de signos num determinado contexto. Nessa perspectiva, o papel de representação não é exclusivamente assumido pela linguagem; as situações-problemas, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos podem ser também expressão ou conteúdo das funções semióticas.

Pino-Fan *et. al* (2015) salientam que na estrutura teórico-metodológica do EOS não há sistematização para a análise dos elementos linguísticos, sendo que esses podem ser identificados, mas as diferentes linguagens poderiam fazer referência tanto ao registro da representação semiótica quanto aos sistemas semióticos. A TRRS faz uma distinção clara entre registro de representação semiótica e sistema semiótico. Assim, a noção de registro de representação semiótica da TRRS complementa e enriquece a noção de elementos linguísticos, sistematizando a análise de tais registros. Assim, nesta investigação, relacionamos as noções de objetos matemáticos (como considerados no EOS) e representação semiótica (como considerados na TRRS), para a análise e caracterização do conhecimento matemático acerca da Integral Definida.

A proposta didática, explicitada nesta pesquisa, visa apresentar aos estudantes de Licenciatura em Matemática situações-problema relacionadas à Integral Definida, em que se mobilizam distintas representações. Visa, ainda, mostrar que a formação de conceitos matemáticos não se restringe à memorização de definições e realização de rotinas automatizadas de processos algébricos e/ou operatórios num modelo algorítmico, mas da produção de sentidos e significados acerca dos objetos e dos conceitos.

Visa também considerar a Integral de Riemann de uma função definida, limitada,

contínua e positiva em um intervalo fechado $[a, b]$; nesse caso, uma Integral Definida, para explorar a relação entre Integral e medida de área de uma região plana, conforme é explicitado na seção que trata dos significados institucionais de referência da Integral, no Capítulo 6. É fato que, epistemologicamente, área é definida axiomáticamente como um número real positivo ou nulo, imagem de uma função f cujo domínio é uma família de regiões planas. Levando-se em conta que é mais usual nos livros didáticos do Ensino Básico e em alguns do Ensino Superior considerar área como região e não como sua medida, assim consideraremos, nesta tese, área a região e o número positivo associado à área sua medida.

Destacamos, nesta investigação, aspectos relacionados à interdisciplinaridade, com a mobilização de contextos intra e extramatemáticos, assim como a utilização de recursos de informática que têm o potencial de contribuir para a compreensão de significados dos objetos matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Esses aspectos se apresentam conforme o disposto por Tardif (2000), como saberes que brotam da experiência e são por ela validados, incorporando-se à vivência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades, de saber-fazer e de saber-ser.

Do ponto de vista estrutural, esta tese está organizada em oito capítulos, além das Referências e Anexos.

Neste primeiro capítulo – Introdução – apresentamos a introdução da investigação, com uma breve síntese dos referenciais teóricos e metodológicos.

Apresentamos, no segundo capítulo, nossa trajetória profissional e motivações para a pesquisa, buscando situar o interesse pelo tema nesses aspectos. Explicitamos a caracterização dos componentes do conhecimento do professor, destacando alguns modelos teóricos, elencados nas pesquisas sobre formação de professores de Matemática, que abordam categorias do conhecimento didático-matemático. Também, abordamos a problematização relacionada aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e, especificadamente, da Integral Definida, justificando a escolha desse objeto de investigação didática e enfatizando a importância do uso das tecnologias digitais.

No terceiro capítulo, discorremos sobre os constructos teóricos que ancoram a investigação: o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2008) que possui categorias que podem ser usadas como ferramentas para identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino de Matemática; e o modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor – CDM (GODINO, 2009), que compreende categorias de análise dos conhecimentos postos em atividade em um processo formativo.

No quarto capítulo, expomos a estrutura metodológica, destacando a investigação como sendo de abordagem qualitativa. Elencamos as ferramentas metodológicas do EOS articuladas com a Engenharia Didática (GODINO, 2012; GODINO *et al.*, 2013), que são utilizadas no desenvolvimento da proposta didática em suas quatro fases: estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação. Neste capítulo, também apresentamos os participantes e o contexto da investigação, bem como os meios, materiais e formas de trabalho.

No capítulo cinco, expomos uma revisão de literatura que compõe a fase do Estudo Preliminar da metodologia de pesquisa. Nesse estudo, são abordados os conhecimentos e aspectos cognitivos associados aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, em que elencamos dificuldades, estratégias e recursos didáticos para a abordagem desse objeto matemático em sala de aula.

O capítulo seis traz o desenho da proposta didática sobre Integral Definida e os aspectos ontossemióticos considerados para sua construção. São explicitadas as situações-problema que compõem cada uma das três atividades⁶, as tarefas propostas para resolução daquelas e as configurações didáticas que permitem a identificação das competências e dos conhecimentos didático-matemáticos desenvolvidos ou mobilizados pelos estudantes.

No capítulo sete, apresentamos a implementação da proposta didática, descrevendo as trajetórias didáticas atinentes às práticas⁷ (matemáticas e didáticas) realizadas pelos estudantes no desenvolvimento das atividades que compõem as unidades de estudo. São explicitados os elementos de análise didática, estabelecidos pelo EOS, que foram utilizados na análise *a priori* e *a posteriori* das práticas realizadas. As trajetórias epistêmicas referentes a cada uma das Unidades de Estudo são também explicitadas nesse capítulo que traz ainda a avaliação da adequação da proposta didática sobre a Integral Definida, em que são utilizadas as ferramentas de análise de questões relacionadas à problematização do conteúdo a ser ensinado (aspecto epistêmico); processos de aprendizagem (aspectos cognitivos e afetivos); currículo e fatores condicionantes, que incluem conhecimento sobre o ensino de Matemática (aspecto ecológico⁸); uso de recursos, incluindo os recursos tecnológicos (aspecto mediacional) e modos de interação instrucional (aspecto interacional) (GODINO, 2017).

⁶ Na perspectiva que adotamos, atividade não é apenas um exercício de Matemática, mas toda a situação na qual o estudante está inserido.

⁷ A prática matemática é considerada como qualquer ação ou manifestação (linguística ou não) realizada na solução de problemas matemáticos e na comunicação de soluções para outras pessoas, a fim de validá-las e generalizá-las para outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO, 1994).

⁸ No quadro teórico que utilizamos nesta pesquisa (Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), a noção de “ecologia” relaciona os ambientes escolar, externo e o currículo, que regulam essa relação. Godino (2002, 2017) esclarece que escola, currículo e sociedade são os fatores que entram em jogo quando se fala em “ecologia” no enfoque que propõe.

No capítulo 8, tecemos nossas Considerações Finais acerca da pesquisa realizada, retomando à questão de investigação com o objetivo de sintetizar os entendimentos para a compreensão dos resultados alcançados e tecer algumas conclusões a que se chegaram no decorrer do estudo. Também explicitamos as contribuições que esta pesquisa pode trazer à Educação Matemática, discutimos as principais limitações que identificamos no trabalho e direcionamos para possíveis estudos futuros que esta investigação pode suscitar.

CAPÍTULO 2 – TRAJETÓRIA PROFISSIONAL E PROBLEMATIZAÇÃO

Neste capítulo, explicitamos nossa trajetória profissional, assim como as motivações que nos levaram a investigar a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores de Matemática, quando submetidos a uma proposta didática para o estudo da Integral Definida. A análise da competência profissional e intervenção didática, que envolve conhecimentos didático-matemáticos específicos, são objeto de estudo e investigação em programas de formação de professores e, nesse contexto, direcionam a pesquisa que também considera a problematização dos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Integral.

2.1 Trajetória profissional e motivações para a pesquisa

As primeiras experiências como professora do Ensino Superior, atuando nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Geometria Analítica, trouxeram-nos a oportunidade de perceber e experienciar situações de ensino e de aprendizagem inerentes ao processo de compreensão dos conceitos e significados de conteúdos da Matemática abordados nessas disciplinas. Essas experiências nos fizeram refletir acerca do que pode ser necessário ao professor para que seja capaz de analisar a atividade matemática envolvida na resolução dos problemas propostos aos estudantes, a fim de que possam ampliar as condições para a construção de suas aprendizagens.

Nossa trajetória formativa como professora de Matemática inclui a licenciatura em Matemática, especialização em Educação Matemática Superior e mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Desde a especialização, estudos e pesquisas associados à discussão de formas alternativas ao modelo convencional de ensino têm despertado nosso interesse.

Na perspectiva convencional de ensino, os momentos de interação, criação ou atuação vividos pelos estudantes são pouco evidenciados, posto que os processos de exploração, formulação e validação são experienciados por esses, muitas vezes, apenas nos momentos de avaliação. As práticas de ensinar Matemática, independentemente do nível ou modalidade de ensino, segundo Godino *et al.* (2017), podem ser empreendidas de modo a propiciar aos estudantes um perfil atuante, que os coloquem em situações de aprimoramento do potencial de

aprendizagens e de estabelecimento de significados, para se tornarem agentes da construção do seu conhecimento.

Indagações relativas ao ensino de Matemática em cursos de graduação desenvolvidos nas instituições de Ensino Superior do Brasil nos motivaram a iniciar pesquisas acadêmicas com o intuito de aprimorar a nossa *práxis*. Destarte, questões como as apresentadas por Frota e Nasser (2009, p. 7) passaram a ser constantes em nossa prática:

Qual o papel da Matemática no Ensino Superior? Como o aluno se relaciona com a Matemática formal? Como abordar tal Matemática? Que estratégias o aluno utiliza para aprender Matemática? [...] Que professor deve ser formado e que reflexões tece esse professor sobre sua prática? Em que consiste a pesquisa sobre a própria prática e seu sentido no Ensino Superior? Que metodologias de ensino-aprendizagem se apresentam para o desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior e como se inserem nesse contexto as tecnologias da informação e comunicação?

Em estudos e pesquisas envolvendo tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de conteúdos de Matemática, percebemos um campo propício para o desenvolvimento de estratégias didáticas diferenciadas. Isso posto, realizamos, em nosso mestrado, uma pesquisa com proposição de alternativas para o ensino de conteúdos da Geometria Analítica (MOTA, 2010), na qual apresentamos uma proposta para o estudo das superfícies tridimensionais Planos, Cilindros e Quádricas, centradas na elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas que dispuseram de elementos teóricos de Zabala (1998). Essas atividades foram desenvolvidas articulando lápis e papel com ferramentas informatizadas, utilizando o *software* Winplot, o qual permite uma dinâmica de rotação e translação de sólidos, especialmente a partição em figuras planas, com uma ferramenta denominada fatiador, facilitando a visualização geométrica, em espaços tridimensionais, com múltiplas representações.

Ao concluir a pesquisa de mestrado, foi criado um ambiente, considerado um espaço de prática e de experimentação sobre o conteúdo trabalhado – Planos, Cilindros e Quádricas – com a edição de um livro didático, visando à compreensão e interpretação desses conteúdos por estudantes de Licenciatura em Matemática ou estudantes de cursos da área de Ciências Exatas, que cursam as disciplinas Geometria Analítica e Cálculo.

Constatamos, na investigação citada, que as atividades propostas incentivaram os estudantes a refletir sobre o uso de novas tecnologias no ensino e, em especial, o uso do *software* Winplot, importante para o desenvolvimento da habilidade de visualização.

A incipiente habilidade dos estudantes na mobilização da visualização geométrica de figuras no espaço tridimensional, verificada em nossa prática, justificou a pesquisa de mestrado, além de evidenciar carências na aprendizagem de conceitos em Geometria Analítica que podem

implicar dificuldades para a aprendizagem em outras disciplinas, como é o caso de Cálculo Diferencial e Integral.

Os resultados observados na investigação do mestrado e a experiência adquirida como professora de Cálculo nos fizeram refletir, por um lado, acerca da necessidade de aprimoramento de competências docentes, referentes a conhecimentos didático-matemáticos; e, por outro, sobre as carências de aprendizagem dos estudantes em temas específicos do Cálculo. Esse saber nos motivou a desenvolver, nesta investigação de doutorado, um estudo que, com o apoio das tecnologias digitais – especificadamente o *software* GeoGebra – se dispõe a contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida no contexto da formação de professores.

Esta investigação, tendo como participantes estudantes de Licenciatura em Matemática, traz reflexões orientadas para os seguintes aspectos:

- a) a maneira pela qual os processos didáticos tratam o conteúdo específico da Integral Definida, abordando, muitas vezes, apenas o significado referente à noção de área sob uma curva, negligenciando outros significados, em outros contextos, como apontado em Berry e Nyman (2003) e Camacho, Depool e Garbín (2008);
- b) a importância do aprimoramento na qualidade da linguagem utilizada ao abordar as tarefas matemáticas, especificamente, relacionadas à articulação das diferentes representações associadas a um objeto matemático, partindo de uma abordagem ontossemiótica, conforme Godino, Batanero e Font (2008);
- c) a conveniência de incorporar recursos tecnológicos, com o objetivo de apoiar a prática educativa de ensinar e aprender Matemática, como forma de contribuir com a compreensão dos significados dos objetos matemáticos (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2008);
- d) a adoção de práticas e experiências que possam contribuir para a formação e docência dos estudantes de Licenciatura em Matemática, no contexto da mobilização de competências e desenvolvimento dos conhecimentos didático-matemáticos dos futuros professores de Matemática (GODINO, 2009).

2.2 Caracterização dos componentes do conhecimento do professor

Pesquisas têm sido destinadas a estudar os componentes de conhecimentos que um professor deveria ter para atender eficientemente as diversas ações emergentes de sua prática profissional, particularmente as voltadas para potencializar o processo de aprendizagem dos

estudantes.

Algumas investigações sobre a formação de professores que ensinam Matemática concentram-se na reorientação de sua formação inicial, a julgar pelas demandas apresentadas pela sociedade contemporânea e pelos sistemas educativos, ou seja, analisam como o desenvolvimento de processos formativos pode, em seu tempo, satisfazer as necessidades educacionais e produzir reflexões acerca dos conhecimentos e competências que são necessários para o futuro professor exercer sua atividade profissional (SHULMAN, 1986; BALL; HILL; SCHILLING, 2008; GODINO, 2009).

Ball e seus colaboradores (BALL; HILL; SCHILLING, 2008) destacam que cada uma das formas de conceber e tratar um conhecimento matemático resulta da visão que o professor tem da Matemática, de como acredita que ocorre o processo de aprendizagem e dos objetivos que atribuem ao seu ensino, em outros termos, depende das concepções e crenças do professor, que são formadas durante todo o período escolar. Isso posto, a estrutura e ênfases que se dão no processo de formação inicial do professor de Matemática influenciarão, significativamente, em sua atuação ao criar as condições para que ocorram as aprendizagens matemáticas.

Algumas pesquisas, como as de Ball, Hill e Schilling (2008); Godino (2009); Carrillo *et al.* (2013) e Pino-Fan (2014), destacam um dos problemas que têm sido de maior interesse nos últimos tempos: determinar quais conhecimentos matemáticos e didáticos são necessários ao futuro professor de Matemática para que esse possa aprimorar o horizonte de realização das práticas de ensino vindouras. Nesse sentido, surgiram investigações e modelos teóricos que dão suporte à formação inicial e continuada de professores, apresentando reflexões direcionadas para a identificação dos componentes de conhecimentos que um professor deve ter com o propósito de desenvolver sua prática, oferecendo outros recursos para a aprendizagem de seus estudantes.

Uma das referências centrais para a pesquisa em formação de professores tem sido o modelo teórico de Shulman (1986), que vem sendo apropriado com novas categorias de análise na pesquisa em Educação Matemática. Esse autor impactou estudos na formação de professores ao apresentar três categorias para o conhecimento desse profissional: o *conhecimento do conteúdo*, considerado o conhecimento do universo de conceitos e procedimentos específicos da disciplina que o professor leciona; o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que engloba o conhecimento do conteúdo da disciplina em pauta, com evidência para o ensino dessa e das estratégias para desenvolver um determinado conceito em sala de aula; e o *conhecimento do currículo*, que inclui o conhecimento das abordagens curriculares para o ensino de determinados conceitos e a relação com os níveis de escolaridade para o qual o ensino está

orientado, como também a compreensão da articulação entre os temas da disciplina em foco.

Shulman ampliou suas ideias e propôs outras categorias para o conhecimento do professor, que ele chamou de categorias de conhecimento básico, sendo as três citadas anteriormente e quatro novas categorias: *conhecimento do conteúdo*; *conhecimentos pedagógicos gerais*; *conhecimento curricular*; *conhecimento pedagógico de conteúdo*; *conhecimento dos alunos e suas características*; *conhecimento dos contextos educacionais*; e *conhecimento dos objetivos, propósitos e valores da educação* (SHULMAN, 1987).

Destacamos, dentre as investigações mais recentes, o modelo teórico proposto por Ball e seus colaboradores (BALL; HILL; BASS, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BALL; HILL; SCHILLING, 2008; entre outros), que ampliaram e recontextualizaram as categorias de Shulman (1987). Os avanços na caracterização dos componentes do conhecimento que um professor deveria ter para ensinar Matemática se deram com a introdução da noção de conhecimentos matemáticos para o ensino, que foi inserida com base na observação do trabalho dos professores na sala de aula de Matemática. Ball, Hill e Schilling (2008, p.374, tradução nossa) definem esse conhecimento como “o conhecimento matemático que o professor usa na sala de aula para que o aluno construa o conhecimento”.

Sucintamente, as categorias desse modelo, conforme disposto por esses pesquisadores, apresentam os seguintes aspectos:

- a) **Conhecimento do Conteúdo:** o *conhecimento comum do conteúdo* – saberes da Matemática mobilizados na resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento; conhecimentos específicos que um profissional precisa ter no âmbito de sua profissão, não se restringindo ao profissional que ensina; o *conhecimento especializado do conteúdo* – conhecimento que os professores precisam ter para ensinar os conteúdos matemáticos, englobando sua compreensão acerca de como esses se estruturam, conceitualmente, e como podem ser ensinados; o *conhecimento horizontal do conteúdo* – o que o professor deve conhecer para organizar os conteúdos, em relação àqueles a serem abordados posteriormente, ou seja, referente ao currículo escolar de Matemática, não se limitando aquilo que será proposto aos estudantes, em determinado período letivo;
- b) **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:** o *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* – a forma como os estudantes se relacionam com os conteúdos matemáticos, as hipóteses e as estratégias que podem criar na resolução de atividades; o *conhecimento do conteúdo e do ensino* – tratamento e abordagem dados aos conteúdos, incluindo a organização e seleção de atividades, o grau de complexidade cognitiva que essas

demandam dos estudantes e que implicarão como as aprendizagens serão construídas; o *conhecimento do conteúdo e do currículo* – objetivos de ensino, proposta de formação matemática dos estudantes e conhecimentos de orientações curriculares presentes em documentos prescritivos.

Ainda, podemos citar o modelo elaborado por Schoenfeld e Kilpatrick (2008) que contribui para a especificação dos conhecimentos que o professor precisa ter para que o seu ensino de Matemática seja adequado nos aspectos conceitual, didático e curricular.

Nesse modelo, é destacada a proficiência no ensino de Matemática, em que são consideradas as dimensões: conhecer as matemáticas escolares com profundidade e amplitude, que se alinham às ideias da categoria de conhecimento de conteúdo de Shulman (1986, 1987); conhecer os estudantes como pessoas que pensam; conhecer os estudantes como pessoas que aprendem; desenhar e gerir entornos de aprendizagem; desenvolver as normas da sala de aula e apoiar o discurso dos estudantes como parte do ensino para a compreensão; construir relações que apoiem a aprendizagem e refletir sobre a própria prática, sendo esses últimos aspectos equiparados à categoria de conteúdo pedagógico em Shulman (1986, 1987).

Esses modelos teóricos têm como foco as competências e conhecimentos dos professores. Pesquisas centradas na temática das tecnologias e formação de professores, evidenciando diferentes perspectivas de incorporação desses recursos ao ensino da Matemática, também motivaram o desenvolvimento de modelos teóricos que abrangessem esse escopo, uma vez que a integração das tecnologias no contexto educacional tem demandado mudanças nas posturas de professores e de estudantes.

Considerando a base de conhecimentos de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006) destacaram, a contar da potencialização do modelo pedagógico do conteúdo, o conhecimento necessário aos professores para ensinar *com* e *sobre* tecnologia, definindo-o como Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (*Technological Pedagogical Content Knowledge* – TPACK). Assim, foi explicitamente integrado o componente de Conhecimento Tecnológico.

O TPACK é constituído por três conhecimentos fundamentais: Conhecimento do Conteúdo (*Content Knowledge* — CK); Conhecimento Pedagógico (*Pedagogical Knowledge* — PK) e Conhecimento Tecnológico (*Technological Knowledge* — TK). São enfatizadas, nesse modelo teórico, as conexões existentes entre tecnologias, abordagens pedagógicas específicas e currículo, conceituando como essa tríade pode interagir entre si, para produzir um ensino baseado em tecnologias educacionais (MISHRA; KOEHLER, 2009).

As reflexões estimuladas nesse modelo advertem que a integração da tecnologia no

ensino envolve mudanças na compreensão do conteúdo e nas estratégias utilizadas, assim como dispõem Cibotto e Oliveira (2017, p. 19):

O TPACK representa a utilização da tecnologia para apoiar estratégias pedagógicas específicas e construtivas para ensinar o conteúdo, devidamente adequadas às necessidades e às preferências dos alunos, exigindo dos professores flexibilidade e fluência do conteúdo curricular (assunto a ser aprendido e ensinado), da pedagogia (os processos, práticas, estratégias, procedimentos e os métodos de ensino e aprendizagem), da tecnologia (tanto as tradicionais quanto as mais avançadas como os computadores, internet e *softwares*) e do contexto envolvido, salientando a complexa interação desses três corpos de conhecimento, em que cada um influencia diretamente o outro.

Existem outros modelos teóricos sobre categorias do conhecimento profissional docente que são elencados em pesquisas sobre formação de professores de Matemática. Ao fazer referência, sinteticamente, a aspectos relativos às teorizações sobre o conhecimento do professor que ensina Matemática, buscamos identificar categorias de análise no contexto de sua formação inicial.

As dimensões ou categorias previstas nos modelos citados guardam relação com o modelo teórico que utilizamos nesta investigação, qual seja, o Modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM) proposto por Godino (2009). Esse modelo se baseia no enquadramento teórico do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) – quadro teórico, ontológico, epistemológico e cognitivo relacionado ao conhecimento matemático (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

O CDM contempla um sistema de categorias de análise que integra, organiza e amplia os modelos propostos por Shulman (1986, 1987), Ball e seus colaboradores (BALL; HILL; SCHILLING, 2008; BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e Schoenfeld e Kilpatrick (2008). A Didática – que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem que envolvem conteúdos, estudantes, professores, meios tecnológicos – é considerada no modelo CDM como objeto central do estudo.

Godino (2009) atenta para o fato de que poderia ser útil ter modelos que permitissem uma análise específica de cada um dos tipos de conhecimento que são mobilizados ao educar matematicamente, “isso permitiria orientar o desenho de ações formativas e o desenvolvimento de instrumentos para avaliar o conhecimento dos professores” (GODINO, 2009, p. 19, tradução nossa).

Nessa perspectiva, propõe um sistema de categorias detalhadas de análise dos conhecimentos didáticos e matemáticos do professor, fundamentado no EOS, o qual, além de atender domínios que o professor deve ter sobre o conteúdo a ser ensinado, destaca que sejam

considerados outros aspectos que devem seguir uma articulação coerente do que considera como seis *facetas* ou *dimensões*: epistêmica (conhecimentos matemáticos), cognitiva (conhecimentos próprios dos estudantes e o progresso de suas aprendizagens), interacional (interação entre professores e estudantes), mediacional (utilização de recursos didáticos, entre os quais os tecnológicos), afetiva (interesse e motivação dos estudantes) e ecológica (conhecimento curricular) (GODINO, 2009). Nesta tese, abordamos essas categorias com a denominação de facetas.

Do ponto de vista do EOS, é esperado que professor analise a atividade matemática ao resolver os problemas e identifique as práticas, objetos e processos mobilizados em contextos de aprendizagem e as variáveis envolvidas nas afirmações, a fim de formular novos problemas, procurando contemplar as particularidades e as demandas formativas dos estudantes.

O CDM considera a utilização de recursos tecnológicos, sendo abordada na faceta mediacional, referentes aos recursos materiais necessários ao desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, os quais são integrados aos elementos das demais facetas. O detalhamento acerca das ferramentas teóricas do CDM está contemplado no Capítulo 3.

Godino (2009) indica a categorização do conhecimento matemático para o ensino, apresentado em Ball, Thames e Phelps, (2008) e Ball, Hill e Schilling (2008), que abordam o conhecimento do conteúdo (conhecimento comum e especializado) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (conhecimento do currículo e dos estudantes, do conteúdo e do ensino, do currículo), estando essa categorização alinhada às ideias de Shulman (1986,1987), principalmente no tocante às categorias de conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo.

As categorias de Shulman (1987) podem ser refletidas no CDM com itens de avaliação similares – a proposta é que a faceta epistêmica possa incluir e refinar o conhecimento do conteúdo (comum, especializado e ampliado); que as facetas cognitiva e afetiva refinem o conhecimento do conteúdo em relação aos estudantes; as facetas interacional e mediacional refinem a noção de conhecimento de conteúdo em relação ao ensino; e a faceta ecológica possa refinar o conhecimento do currículo.

Nesse sentido, são propostas diretrizes para a formulação de itens de avaliação que possibilitam a reflexão acerca do conhecimento didático-matemático dos professores. Godino (2009) considera necessário adotar modelos explícitos e detalhados de seus elementos constituintes que ajudem na análise e reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem.

O modelo CDM de Godino (2009) contempla a noção de proficiência no ensino da Matemática proposta por Schoenfeld e Kilpatrick (2008), ressaltando que essa “pode ser

interpretada em termos da competência profissional do professor de Matemática para que seu ensino possa ser considerado de qualidade" (GODINO, 2009, p. 18, tradução nossa). O que se pretende, nesse modelo teórico, conforme ressaltado por esse pesquisador é "ampliar a noção de proficiência em Matemática escolar (...) para incluir: compreensão conceitual, fluência processual, competência estratégica, raciocínio adaptativo e disposição produtiva" (GODINO, 2009, p. 18, tradução nossa).

Esse pesquisador ressalta que, apesar das dimensões citadas serem similares às dimensões da proficiência (SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008) e às dimensões do conhecimento matemático para o ensino (HILL; BALL; SCHILLING, 2008), as noções de configuração didática, de objetos e processos proporcionam uma separação operativa dessas dimensões, necessária para a organização de processos formativos e sua avaliação.

Algumas questões persistem em relação à formação de professores, como as expostas por Pino-Fan (2014): de que maneira ou sob quais critérios os conhecimentos matemáticos para o ensino podem ser avaliados ou medidos? Como os professores podem ser ajudados a adquirir ou desenvolver os vários componentes desses conhecimentos? Como os diferentes componentes dos conhecimentos matemáticos para o ensino se relacionam?

Pino-Fan (2014) dispõe que, para além dos conhecimentos matemáticos que se colocam em ação em atividades instrucionais para ensinar e aprender Matemática, outras dimensões ou facetas condicionam a aprendizagem como aspectos cognitivos e afetivos que implicam a aprendizagem, o uso de recursos didáticos manipulativos e tecnológicos, as formas de interação, entre outros, o que é indicado no modelo CDM.

O estudo referente aos modelos que abordam a formação de professores de Matemática e suas aproximações nos ajudou a aprimorar nossa compreensão dos diferentes componentes do conhecimento que podem ser necessários ao professor, a fim de que esse ensine e crie condições para que seus estudantes construam suas aprendizagens, atribuindo sentidos e significados aos objetos matemáticos, a começar pelo processo de formação dos conceitos.

Assim, refletimos que conhecer e discutir o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos e competências de futuros professores de Matemática, ao se relacionar com uma proposta de estudo da Integral Definida em seu processo de formação inicial, têm o potencial de oportunizar o desenvolvimento dessas competências, criando situações para que eles (re)signifiquem os conhecimentos necessários a fim de, em um futuro próximo, planejar suas aulas, analisar e selecionar materiais de apoio, e ensinar os conteúdos de Matemática em qualquer nível e modalidade de ensino.

Quanto ao conhecimento do conteúdo matemático, esta investigação aborda o conteúdo

de Cálculo “Integral Definida” e, também, conteúdos presentes no currículo de Matemática da Educação Básica como, por exemplo, funções, cálculo de medidas de áreas de figuras planas.

Destacamos que a Integral Definida envolve um conjunto de conceitos importantes para o entendimento de temas avançados do Cálculo Integral, sendo aplicada em outras áreas do conhecimento como Física, Biologia e Estatística.

Referente a conhecimento pedagógico, ressaltamos os aspectos que são contemplados na proposta didática implementada nesta investigação: inserção das tecnologias digitais no ensino da Matemática; utilização das distintas representações na abordagem dos conceitos; uso de abordagens diferenciadas, como proposição de situações-problemas em contextos intra e extramatemáticos; discussão de como se dão os processos cognitivos que desencadeiam a construção do conhecimento matemático. Conjecturamos que a mobilização de tais aspectos pelos sujeitos desta pesquisa, futuros professores de Matemática, tem o potencial de trazer perspectivas para suas práticas profissionais futuras.

2.3 A problematização subjacente aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral constitui-se em um domínio de conhecimentos relevantes para a sociedade científica, sendo considerado uma importante construção humana, na busca por modelar situações e resolver problemas, em que foram desenvolvidos métodos diversificados, como, por exemplo, o método grego da exaustão (EVES, 2002). Daí sua potencialidade na resolução de problemas de distintas áreas. Lachini e Laudares (2001) reforçam que o Cálculo deixa o mundo restrito das aplicações na chamada Matemática Pura e transcende as fronteiras de conhecimento de diversas ciências, encontrando aplicabilidade nos distintos setores da atividade humana.

As noções do Cálculo também são conhecidas por causarem dificuldades de aprendizagem, tanto para estudantes quanto para o planejamento didático dos professores (VIEIRA; SILVA; NASCIMENTO, 2017). Esse foi um dos motivos que nos levou a enfatizar, nesta pesquisa, no contexto da formação inicial de professores, conceitos referentes às aplicações da Integral Definida. Primeiramente, como forma de contribuir com as pesquisas que dão ênfase à concepção de instrumentos para explorar e caracterizar aspectos do conhecimento didático-matemático dos professores em formação, sobre temas específicos. Em segundo, na busca por proporcionar experiências de ensino e de aprendizagem que mobilizem aspectos como interdisciplinaridade, na abordagem de contextos intra e extramatemáticos, e

uso de tecnologias digitais no estudo da Integral Definida.

Por conseguinte, entendemos ser pertinente fazer uma breve reflexão acerca dos entraves ocorridos nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo, que se manifestam no desenvolvimento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, no primeiro período dos cursos em seus componentes curriculares. Esse fato pôde ser evidenciado por nós, em nossa atuação como professora em cursos da área de Ciências Exatas, de instituições públicas e privadas, e é corroborado por variadas pesquisas, as quais sintetizamos a seguir.

Pesquisadores como Tall (2002), Rezende (2003), Nasser (2007), Reis (2009) e Alves (2012) evidenciaram que as dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral não fazem parte de um cenário apenas brasileiro, mas que são constatadas em âmbito internacional. Rezende (2003) ressalta um movimento internacional, organizado na década de 1980, intitulado *Calculus's Reform*, que procurou reorganizar o ensino de Cálculo, utilizando como inovação recursos tecnológicos.

Almeida e Iglioni (2013) destacam a importância dessa disciplina, uma vez que nela se trabalham noções fundamentais para a Matemática avançada. Esses autores observam os altos índices de reprovações no âmbito dos cursos universitários.

Grande parte dos estudantes de cursos de graduação da área de Ciências Exatas considera elevado o grau de dificuldade da disciplina de Cálculo, principalmente por ser essa uma disciplina abstrata, que vai requerer deles algo que não tiveram tanto contato na Educação Básica, por exemplo, demonstrações, abstrações, generalizações. Nessa perspectiva, discorrem Rosa, Alvarenga e Santos (2019, p. 10):

Em geral, os estudantes que conseguiram bons resultados em Matemática quando na educação básica acreditam que o Cálculo não representaria obstáculo ao seu aprendizado. Porém, na educação superior, têm essa expectativa frustrada, visto que os conteúdos são mais aprofundados, densos e complexos. Esses envolvem ideias mais abstratas como a de infinitésimos e de limites, e se baseiam em uma maior formalidade e sistematização conceitual.

As abordagens utilizadas no processo de ensino do Cálculo e, conseqüentemente, os entraves ocorridos no processo de aprendizagem constituem desafios para a Educação Matemática no Ensino Superior e podem ser explicitadas por vários fatores, como causas de natureza cognitiva (falta de compreensão de significados), como exposto por Tall (2002); as de natureza didática que se referem à dificuldade em encontrar estratégias metodológicas adequadas para apresentar e abordar os conteúdos nas situações de ensino; dificuldades de natureza epistemológica, na qual “as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas,

sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo” (REZENDE, 2003, p. 4); falta de conhecimentos prévios e dificuldades relacionados ao raciocínio lógico, uma vez que a Matemática do Ensino Superior exige dos estudantes a capacidade de utilizar argumentos lógicos para provar afirmativas, conforme destaca Nasser (2009).

Artigue (1991) também versa acerca das adversidades que surgem para os estudantes no curso introdutório de Cálculo, destacando que, no ensino convencional dessa disciplina, são utilizados processos que exploram uma excessiva algebrização, especialmente quanto ao predomínio da manipulação de fórmulas, em detrimento do estudo das funções; ao cálculo de derivadas, em detrimento das aproximações lineares; ao cálculo de primitivas, em oposição à busca de significados para a Integral; aos algoritmos para operar com equações diferenciais, em oposição ao interesse de solucioná-las por meio de aproximações numéricas e gráficas.

Essa autora agrupa as dificuldades da aprendizagem do Cálculo em três categorias:

- a) dificuldades associadas à complexidade dos objetos básicos do Cálculo como números reais, sequências, funções, entre outros;
- b) dificuldades associadas à conceitualização e formalização da noção de limite, que é um conceito central no Cálculo; e
- c) dificuldades vinculadas às modificações necessárias, referentes ao modo de pensar puramente algébrico, e às especificidades do trabalho técnico em Cálculo, o que foi mencionado anteriormente.

Pesquisas recentes evidenciam que essas dificuldades continuam sendo temas atuais, como mostram Masola e Allevato (2016); Vieira, Silva e Nascimento (2017) e Rosa, Alvarenga e Santos (2019). Esses autores apresentam investigações realizadas com estudantes, apontando as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e a elevada taxa de reprovação, com destaque para “a metodologia utilizada pelo professor como um dos problemas enfrentados por eles durante a formação” (VIEIRA; SILVA; NASCIMENTO, 2017, p. 13).

Masola e Allevato (2016) apresentam um estudo que contempla uma seleção de trabalhos brasileiros, realizados nos últimos anos, que tratam de dificuldades em conteúdos matemáticos de estudantes ingressantes no Ensino Superior e suas consequências, não só no Cálculo, mas também em outras disciplinas de cursos em que esses conteúdos matemáticos são pré-requisitos. Esses pesquisadores ressaltam a necessidade de propor ações educativas que possam alterar esse quadro, levando os estudantes a construir uma aprendizagem efetiva dos conteúdos abordados nessas disciplinas.

As pesquisas destacadas anteriormente e a nossa prática como professora de Cálculo nos

permitem observar que os estudantes mobilizam, insuficientemente, seus conhecimentos e apresentam dificuldades para desenvolver processos mentais de criação, raciocínio, ordenação, abstração, entre outros. É frequente que, em um curso de Cálculo, os procedimentos e algoritmos ganhem relevância, no entanto, resultados de pesquisa, como os de Almeida e Viseu (2002), recomendam a importância de práticas de ensino e de aprendizagem de conceitos de Cálculo que associem, simultaneamente, abordagens gráficas e analíticas de maneira a evidenciar significados e relações.

Com efeito, Artigue (1998) considera que as investigações didáticas evidenciam que não é fácil para os estudantes entrarem no campo da Análise, quando esse não está reduzido à sua parte algébrica, e que se procura, antes, o desenvolvimento de modos de pensamento e técnicas que são baseadas nele. Por conseguinte, alguns estudantes conseguem resolver os exercícios que lhes são propostos com a correta aplicação das regras, de derivação e integração, por exemplo, entretanto, apresentam dificuldades quando precisam lidar com o *significado do objeto* que é, comumente, apresentado no ensino por meio de sua expressão analítica, como, por exemplo, no caso específico de conceitos relacionados à Integral Definida: a interpretação geométrica de que a medida de uma área pode ser calculada mediante um processo em que se adicionam infinitas medidas de áreas de retângulos com base de medidas infinitesimais ou, em sua interpretação analítica, como o limite de um somatório.

Isso posto, há um limitado desenvolvimento de habilidades específicas, necessárias ao aprendizado do Cálculo, como criar hipóteses, mobilizar o raciocínio dedutivo, manipular ideias, fazer generalizações e utilizar os conhecimentos conquistados na resolução de situações reais que lhes são apresentadas, além de utilizar diferentes tipos de registros de representação, por exemplo, escrita em língua materna, escrita algébrica, por tabelas, gráficos cartesianos e figuras.

Diante dessas evidências, selecionamos como um dos temas do Cálculo a Integral Definida e partimos para a investigação de constructos teóricos e metodológicos que possam contribuir para a implementação de uma proposta didática, assistida por tecnologias digitais, que nos permita refletir acerca da formação inicial de professores de Matemática.

2.4 A constituição da problematização da pesquisa, seu objeto de estudo e a opção pelo uso de tecnologias digitais

Encontramos algumas pesquisas que apresentam apontamentos acerca das dificuldades e possibilidades de promoção da aprendizagem da Integral Definida, sendo esse tema útil, por

exemplo, na modelagem matemática e na resolução de problemas, uma vez que aspectos da realidade podem ser modelados pela Integral.

González-Martín (2006) destaca que um dos trabalhos pioneiros que aborda a aprendizagem de Integral Definida é o de Orton (1983), em que um dos seus objetivos se referia a investigar a compreensão dos estudantes sobre integração e diferenciação. Nesse trabalho, os resultados são evidenciados pelo domínio do modo algébrico, em detrimento do modo gráfico, e a manifestação da falta de compreensão do significado que envolve os limites e as aproximações, e domínio dos símbolos utilizados. Esse autor salienta que “parece claro que a introdução da integração é obscurecida, para muitos estudantes, pela manipulação algébrica”. (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006, p. 20, tradução nossa).

Em nossa experiência docente, verificamos que, geralmente, nas aulas que abordam o conteúdo do Cálculo Integral, também em alguns materiais bibliográficos, há certa predominância do cálculo de primitivas em detrimento da busca de significados para a Integral e da utilização de representações variadas. Tal observação é reforçada por Bezerra (2015, p. 23) que, ao analisar alguns materiais didáticos do Cálculo, expõe: “percebemos por meio dos exemplos resolvidos e dos exercícios propostos que os alunos são induzidos a recorrer apenas ao procedimento algébrico”. Essa autora, reforçando a importância da utilização das múltiplas representações, evidencia que “o apelo à visualização do comportamento de gráficos das funções, primitivas e integrandas desperta nos alunos um saber diferenciado daquele adquirido por meio, apenas, do procedimento algébrico-manipulatório.” (BEZERRA, 2015, p. 23).

Pesquisadores, como Guimarães (2002), Melo (2002) e Robles (2010), evidenciaram dificuldades no tratamento gráfico ou numérico no ensino de Cálculo, citando a ausência de equipamentos e *softwares*, à época de suas publicações, adequados a esse ensino. Ainda evidenciaram o fato de, em tempos anteriores, os cursos de Cálculo negligenciarem a importância da articulação entre as representações, priorizando o tratamento analítico.

No entanto, percebemos que, no atual cenário de pesquisas relacionadas ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, alguns desses aspectos estão sendo modificados, notadamente, pela disponibilidade e uso, com maior frequência, das novas tecnologias digitais em sala de aula e a busca do aproveitamento das reais potencialidades dessas tecnologias; divulgação de materiais didáticos produzidos nos programas de pós-graduação em Educação Matemática; atuação de grupos de pesquisa nas Universidades; planejamento de cursos de nivelamento que buscam conduzir os estudantes a produzir significados para o conteúdo necessário aos estudos de Cálculo.

Destacamos, ainda, a inovação ocorrida, nos últimos tempos, nos materiais didáticos

referentes a essa área de conhecimento, com a disponibilização de obras que abordam o conteúdo, trazendo aplicações e projetos que buscam estimular a articulação entre teoria e prática. Tais obras trazem um enfoque à compreensão de conceitos, apresentando-os de forma a abordar as representações geométrica, numérica e algébrica sem, contudo, distanciar-se da competência verbal e descritiva. Evidenciamos, também, a inserção de indicações nesses materiais do uso de *softwares*, vídeos, com o intuito de expandir a experiência de aprendizagem dos estudantes de maneira dinâmica, interativa e alinhada aos conteúdos apresentados. Nessa perspectiva, destacamos as obras de Stewart (2017) e Thomas (2012).

Observamos que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral é permeado por abstrações e, por vezes, fica restrito somente a esse aspecto, sendo realizado sem relação com problemas que se aproximam da realidade social, na qual estão inseridos os estudantes. Nas pesquisas citadas anteriormente, seus autores consideram que o uso excessivo de signos e símbolos não contribui, significativamente, para a aprendizagem e compreensão dos conteúdos inerentes a essa área da Matemática, o que gera ausência de aprendizagem, desinteresse e desmotivação ao estudar os temas relativos àquele conteúdo.

Os aspectos mencionados se tornaram um motivador para a origem desta investigação, que propõe uma experiência com múltiplas representações no estudo da Integral Definida de funções reais de uma variável real, com futuros professores de Matemática. A abordagem ontossemiótica atribui um papel central à linguagem, seja escrita, oral ou gráfica, que envolve conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos, argumentos, situações e ações, que se relacionam para que a atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos sejam integralizados (GODINO, 2002).

Uma das aplicações iniciais da Integral Definida se destina a calcular a medida da área de uma região localizada sob uma curva em um plano cartesiano. Matemáticos e não matemáticos, ao longo do tempo, debruçaram-se a estabelecer processos para o cálculo de medidas de áreas, a fim de ampliar os conhecimentos matemáticos e de outros ramos científicos do mundo contemporâneo, em que

A ênfase inicial da matemática nos impérios mais avançados na Antiguidade, do Egito e da Babilônia, ocorreu na aritmética e na mensuração. No último caso, havia interesse especial na mensuração de áreas de terras e de volumes de espaços destinados a abrigar cereais. Documentos comprovam que cerca de dois mil anos antes de Cristo, os babilônios já se preocupavam com a determinação de áreas de polígonos regulares, bem como da área do círculo. A solução definitiva do problema da determinação de áreas veio com o Cálculo, proposto quase simultaneamente por Newton e Leibniz ao final do século XVII. O Cálculo Integral, especificamente, é mais do que a solução do problema da determinação de áreas e volumes. Vai além, portanto, do seu uso na geometria plana e espacial (MARQUES, 2014, p. 357).

A Integral é um importante conteúdo da Matemática do Ensino Superior, presente nas situações de várias carreiras científicas, das quais emergem problemas que podem ser modelados e resolvidos recorrendo-se às Integrais, conforme argumentam Kouropatov e Dreyfus (2009, p. 417), para quem,

[...] certamente não é possível imaginar a cultura científica moderna sem as integrais. Juntamente com a derivada, a integral forma o núcleo de um domínio matemático que é uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos como a física, a engenharia, a economia e a estatística. Além disso, o conceito de integral representa uma ideia filosófica para a compreensão do mundo: a contemplação da totalidade das partes pequenas de um todo aporta conclusões sobre o todo em sua globalidade, assim como sobre sua estrutura interna e propriedades (tradução nossa).

As aplicações usuais da Integral Definida estão relacionadas ao cálculo de medida da área de uma região, de medida do comprimento de uma curva e de medida do volume de um sólido de revolução e se associam a contextos intra e extramatemáticos. Por esse motivo, esse conteúdo está presente nas ementas de disciplinas de vários cursos do Ensino Superior, como Matemática, Engenharias, Biologia, Economia, Administração.

Tal qual Flores e Garcia (2017), consideramos conexões intramatemáticas as estabelecidas entre conceitos, procedimentos, teoremas, argumentos e representações matemáticas; e conexões extramatemáticas, as que estabelecem uma relação de um conceito ou modelo matemático com um problema em contexto (não matemático) ou reciprocamente. Godino (2012) também disserta sobre esse aspecto, esclarecendo que um contexto intramatemático é aquele em que a tarefa específica a ser realizada se refere apenas a objetos matemáticos, como estruturas ou símbolos, enquanto um contexto extramatemático inclui elementos externos que influenciam a interpretação e a solução.

O conceito de Integral Definida é abordado em diferentes situações, o que implica a necessidade de contemplar seus distintos significados, associados aos contextos nos quais esse conteúdo é utilizado. O estudante, por si só, muitas vezes, não estabelece essas conexões, e compreende, com dificuldade, conceitos associados à Integral Definida, restringindo-se aos resultados especificamente numéricos, encontrados por meio de aplicações de técnicas, não percebendo os significados daquelas medidas nas distintas áreas das ciências.

Para isso, faz-se necessário implementar seus processos de ensino e de aprendizagem na tentativa de superar as interpretações voltadas para as técnicas e métodos no cálculo algébrico das Integrais Definidas, das várias funções matemáticas, dando ênfase aos seus significados e aplicações no contexto dos cursos universitários da área de Ciências Exatas.

Turégano (1998) aponta estudos que tratam da necessidade de mudança de foco

conceitual na abordagem da Integral Definida, com reflexões para os aspectos:

- a) dificuldades apresentadas pelos estudantes ao relacionar a medida da área ao processo de somatório, permitindo adicionar quantidades infinitamente pequenas – a área deixa de ser um objeto geométrico e passa a ser definida como resultado de um cálculo, de acordo com um determinado procedimento, bem como dificuldades inerentes à compreensão dos três elementos essenciais presentes na Integral de Riemann (retângulos, segmentos e área);
- b) compreensão dos estudantes sobre a integração;
- c) compreensão dos estudantes sobre a aproximação do cálculo da medida da área, por somas superiores e inferiores, tendo como base o teorema da existência dessas somas, sem a devida justificativa.

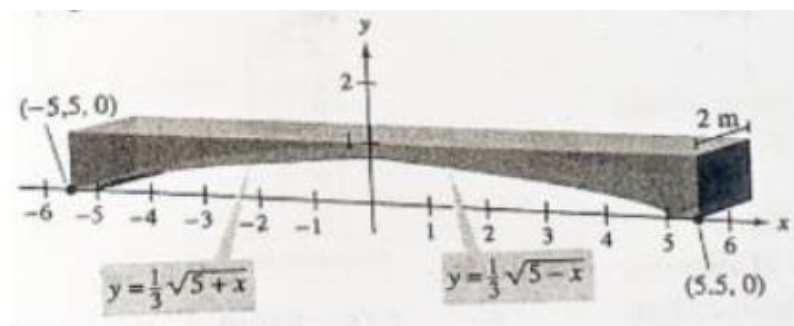
Ressaltamos, por essas pesquisas e por nossa experiência, que as potencialidades que a Integral Definida pode trazer para a construção do conhecimento são trabalhadas, muitas vezes, insuficientemente. Nesse contexto, é apresentada uma relação insatisfatória, entre o que se ensina e aprende, sobre Integrais com Limites e Derivadas. Figueiredo *et al.* (2013, p. 1581) advertem que “apesar de sua grande importância, o ensino da Integral limita-se, muitas vezes, à memorização de técnicas de integração. Muitos alunos saem de um curso de Cálculo sem entendê-las nem sequer relacioná-las com limites e derivadas”.

Para uma mudança nesse cenário, ações interativas podem ser proporcionadas pelo uso de tecnologias digitais ou ocorrer em atividades de modelagem, de resolução de problemas, abordando aspectos interdisciplinares, entre outras possibilidades, assim como propõe Melo (2002, p. 6):

[...] o uso do computador liberta o aluno da execução de algoritmos, técnicas e rotinas demoradas, oferecendo possibilidades de desenvolvimento de conceitos e de habilidades na solução de problemas através de simulações, aprendizagem por descoberta e mudanças de quadros.

Mota e Abar (2020, p. 19) apresentam um exemplo de aplicação da Integral Definida em contexto extramatemático para possibilitar o estabelecimento de conexões entre a Matemática com situações presentes em contextos da vida real, com a utilização do *software* GeoGebra. A aplicação, retirada e adaptada do livro de Cálculo com Aplicações dos autores Larson e Edwards (2010), e exemplificada no trabalho em referência, faz uma conexão entre a Matemática e a Engenharia Civil. É apresentado um projeto de construção de peças de concreto para um novo edifício, conforme explicitado na Figura 1.

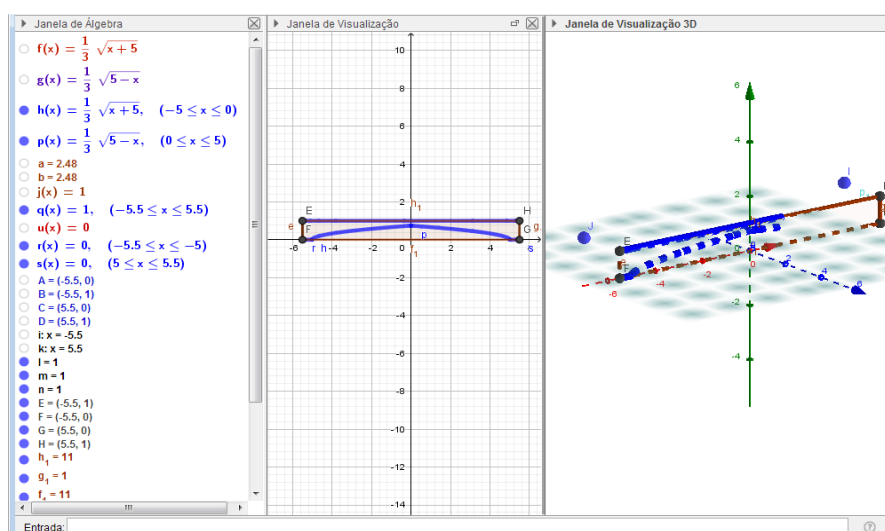
Figura 1 – Representação matemática de uma peça de concreto



Fonte: Larson e Edwards, 2010, p. 451

Esse exemplo pode ser considerado como uma atividade em um contexto extramatemático, pois, conforme Evitts (2004), o conhecimento conectado pode ser descrito como sua construção e significado. A aplicação solicita, inicialmente, determinar a medida da área da face da seção que está no sistema de eixos coordenados. Em seguida, são requeridos a medida de volume de concreto em uma das seções e o peso da peça. Mota e Abar (2020) fazem uma implementação dessa aplicação em que é proposto ao estudante fazer um esboço da representação gráfica dessa estrutura para potencializar a compreensão do contexto, usando o *software* GeoGebra, no qual é possível a representação da peça com visualização no espaço bi e no tridimensional, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Representação matemática de uma peça de concreto no GeoGebra



Fonte: Mota e Abar, 2020, p. 21

Os recursos tecnológicos se apresentam como auxiliares significativos na proposição de atividades que impulsionam processos cognitivos, tendo em vista as possibilidades de representações que demandam, e favorecem a ativação dos conhecimentos prévios dos

estudantes e possibilitando a relação dialética entre o abstrato e o concreto, seja esse material ou cognitivo (SOARES, 2015).

Esses recursos têm o potencial de possibilitar aos estudantes de Licenciatura em Matemática a “materialidade” dos objetos no campo perceptivo e o discernimento desses objetos emergentes da linguagem abstrata da Matemática, haja vista que “independente do aspecto do objeto, do tipo de conhecimento e sua materialidade ou não, a partir do momento em que este se incorpora a base cognitiva do indivíduo, ele passa a ser entendido como um objeto concreto” (SOARES, 2015, p. 129).

O campo perceptivo, na Psicologia, é o processo ou resultado de se tornar consciente de objetos, relações e eventos, por meio dos sentidos, que incluem atividades como reconhecer, observar e discriminar, conforme apresentado por Verissimo (2017, p. 381), ao considerar que:

[...] ao focalizarmos algo em nosso campo perceptivo, ou de ação, não levamos em conta apenas o objeto temático, mas, também, uma série de condições e sentidos que, embora não sejam diretamente tematizados, fazem parte do enquadramento e participam da composição do sentido temático do objeto percebido.

No contexto dos processos instrucionais envolvendo conteúdos relacionados ao Cálculo, os recursos tecnológicos apresentam diferentes perspectivas. Os *softwares* ou aplicativos, por exemplo, ampliam as possibilidades de modelagem de um determinado problema; de representações dos objetos matemáticos; de visualização e percepção de relações e propriedades; de antecipação de conclusões; de criação e testagem de estratégias de resolução; e de agilidade de cálculos complexos (ALMEIDA, 2017).

Villareal, no final dos anos 1990, ainda com o tímido desenvolvimento do uso das tecnologias digitais no ensino, enfatizava a importância do uso dos computadores como um fator que privilegiava os aspectos visuais relativos aos conceitos do Cálculo:

Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLAREAL, 1999, p. 43).

Tall (2002) também já apontava que alguns conceitos do Cálculo poderiam ser abordados com a utilização do computador, por meio de representações gráficas. Por exemplo, o cálculo de medidas das áreas aproximadas, limitadas por representações gráficas de funções, que é resolvido por uma Integral Definida, pode requerer muitos processos quando feito

manualmente. No entanto, com o auxílio de uma ferramenta digital, essa tarefa pode ser realizada com maior exploração de relações e propriedades.

Dubinsky e Tall (1991) destacaram o papel assumido por alguns *softwares* na aprendizagem de conteúdos matemáticos avançados. Também ressaltaram a importância do processo de visualização, apoiado por essa ferramenta, nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

O professor, como coordenador da prática discente, com suas intencionalidades e seus conhecimentos, é o responsável por propor atividades com o uso de recursos tecnológicos para potencializar o processo de compreensão e formação dos conceitos. Tal como propõe Crisostomo *et al.* (2012), é imprescindível a integração da tecnologia ao ensino de Matemática. Nesse sentido, é recomendável que o educador matemático se prepare para articular as estratégias de ensino, os recursos tecnológicos e os resultados de pesquisas.

Percebemos, destarte, um potencial de pesquisa que se desenvolveu para ampliar o tratamento dado ao estudo da Integral Definida, abrangendo, principalmente, relações da Matemática com outras áreas do conhecimento e a utilização de recursos tecnológicos. Isso posto, nesta pesquisa, motivamos, por meio de situações-problema, o estabelecimento de relações entre os conteúdos matemáticos (intramatemáticos) associados a situações presentes em contextos sociais (extramatemáticos), utilizando recursos do *software* GeoGebra.

A expectativa é que o estudante de Licenciatura em Matemática possa mobilizar seus processos cognitivos ao criar uma associação entre o real e suas possíveis representações matemáticas. A proposta didática, a qual apresentamos no Capítulo 6, busca fazer com que os estudantes recorram aos conceitos evocados em seus campos perceptivos e aprimorem competências que lhes serão úteis na sua atividade profissional, como professores que ensinam Matemática.

Um dos aspectos cognitivos que pode ser mobilizado na realização das tarefas é o da visualização, pois, por meio desse processo, promove-se uma fundamentação cognitiva para a formação dos conceitos em Matemática. Atualmente, vários autores destacam o papel da visualização com apoio das tecnologias digitais no ensino de Cálculo, como Almeida (2017) e Miranda (2018). Nesse sentido, o *software* GeoGebra poderá facilitar a mobilização de conhecimentos, associados a alguns processos cognitivos, entre eles, a representação, a visualização, a abstração, a intuição, entre outros, que possam ser estimulados na resolução de atividades.

Atentando-nos para a complexidade dos fenômenos educacionais, explorando ferramentas digitais, na mobilização de processos cognitivos que favoreçam a construção da

aprendizagem, pretendemos analisar os procedimentos realizados pelos participantes da pesquisa, futuros professores de Matemática, no entendimento de recursos tecnológicos como apoio para um desenvolvimento dinâmico, didático e com foco na análise do significado dos conceitos e aplicações da Integral Definida.

A tecnologia foi um aporte para o objeto de estudo desta pesquisa, como uma instrumentalização para aperfeiçoar o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos e competências dos estudantes de Licenciatura em Matemática frente ao objeto matemático investigado.

A origem desta investigação está concatenada com nossa experiência como professora que ensina esse conteúdo, em que passamos a conhecer as dificuldades que os estudantes apresentam na resolução de problemas, na compreensão dos significados e na formação dos conceitos da Integral Definida, uma vez que a maioria deles só reconhece como aplicação desse conteúdo as associações com a medida de uma área sob a curva, como destacado nas pesquisas de Berry e Nyman (2003) e Camacho, Depool e Garbín (2008).

Com base no que discutimos, a problematização, as perguntas e os objetivos desta tese emergem de uma análise reflexiva da formação dos futuros professores de Matemática, em termos didático-matemáticos, enfatizando conceitos da Integral Definida. Desse modo, constituímos a seguinte questão de investigação: *De que forma uma proposta didática sobre a Integral Definida, com suporte de tecnologias digitais, pode contribuir para a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de estudantes de Licenciatura em Matemática?*

Inerente à questão de investigação, considerando a resolução de atividades envolvendo alguns significados da Integral Definida por estudantes de Matemática, elaboramos duas perguntas:

- a) Quais conhecimentos didático-matemáticos são mobilizados ou construídos na resolução de atividades, em um contexto de relação com conceitos intra e extramatemáticos?
- b) Quais competências são mobilizadas, com apoio das tecnologias digitais, especificamente do GeoGebra, para o desenvolvimento de processos matemáticos na resolução de atividades?

A partir do que problematizamos e dos questionamentos elaborados, a presente pesquisa tem como objetivo geral: *analisar como um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática mobiliza competências e desenvolve conhecimentos didático-matemáticos, durante a implementação de uma proposta didática que aborda significados da Integral Definida,*

envolvendo tecnologias digitais.

Como objetivos específicos, destacamos:

- a) identificar aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos para a compreensão da Integral Definida, em um contexto interdisciplinar, para construção da proposta didática;
- b) identificar, no desenvolvimento de uma proposta didática, aspectos do uso do GeoGebra que possam colaborar para o aprimoramento de conhecimentos didático-matemáticos e de competências relacionados aos significados e aplicações da Integral Definida;
- c) reconhecer os conhecimentos didático-matemáticos e competências que emergem de estudantes em Matemática na resolução e discussão das situações-problema contempladas em uma proposta didática para o estudo da Integral Definida, com a utilização do GeoGebra.

Para atingir esses objetivos, elaboramos uma proposta didática sobre Integral Definida, assistida pelo *software* GeoGebra, que contempla aspectos intra e extramatemáticos. A implementação dessa proposta com estudantes de Matemática visou apresentar situações em que esses pudessem potencializar a mobilização ou desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos.

Apresentamos no capítulo seguinte os referenciais teóricos que fundamentam esta pesquisa.

CAPÍTULO 3 – ESTRUTURA TEÓRICA: O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS) E O CONHECIMENTO DIDÁTICO- MATEMÁTICO (CDM)

Neste capítulo, abordamos os constructos teóricos nos quais a pesquisa se ancora: Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), cuja principal característica é a articulação de aspectos epistemológicos e semióticos do conhecimento matemático e da Didática da Matemática (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2008); e Conhecimento Didático-Matemático (CDM) – modelo que compreende categorias de análise do conhecimento didático-matemático do professor (GODINO, 2009). Apresentamos um panorama das ferramentas e noções teóricas do EOS e do CDM que atribuem um papel central à linguagem, processos de comunicação, interpretação e variedade de objetos que entram em ação no ensino e na aprendizagem de Matemática no contexto da formação de professores.

3.1 Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS)

Adotamos a estrutura teórica do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), que tem se apresentado como uma teoria em evolução desde o ano de 1990. Juan Díaz Godino, professor da Universidade de Granada, na Espanha, líder do grupo de pesquisa *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática*⁹, é o principal pesquisador dessa teoria. Ele coordenou a investigação de modelos teóricos, propostos no âmbito da Educação Matemática, sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos específicos, nos contextos dos sistemas didáticos e a proposição de novas noções teóricas, para analisar os processos que surgiram em consequência dessas investigações (GODINO *et al.*, 2006).

Godino e seus colaboradores buscam construir um enfoque unificado da cognição e ensino da Matemática, com variedade de teorias utilizadas como suporte para os estudos acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

⁹ O conjunto de trabalhos que foi desenvolvido em torno do EOS estão disponíveis em <https://www.ugr.es/~jgodino>.

Este modelo trata de aportar ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento. Além disso, consideramos as facetas do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e avançar na direção de um modelo unificado da cognição e instrução matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

O conhecimento e a natureza dos objetos matemáticos são abordados no EOS, visando aproximações teóricas que consideram pressupostos do *Pragmatismo*, visto que propõem uma formulação dos significados dos objetos matemáticos; da *Antropologia*, pois seu principal objeto de estudo é o sujeito, aprendendo em instituições escolares, ou seja, o estudante é o foco dos processos planejados e/ou realizados; e da *Semiótica*, uma vez que atribui um papel central aos recursos expressivos utilizados na atividade matemática.

Concretamente analisamos as noções usadas para descrever os fenômenos cognitivos e epistêmicos na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1998)¹⁰, Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990)¹¹, Dialética Instrumento-Objeto e Jogos de Quadros (DIO-JQ) (DOUADY, 1986)¹², Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1992)¹³ e Teoria dos Registros de Representações Semióticas (RRS) (DUVAL, 1995)¹⁴ (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 26).

Do ponto de vista teórico do EOS, o professor deve ser capaz de analisar a atividade matemática ao resolver os problemas, identificando as práticas, objetos e processos colocados em jogo, e as variáveis envolvidas nas afirmações, a fim de formular novos problemas e adaptá-los a cada circunstância educativa (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Os componentes do quadro teórico para a Educação Matemática, nesse enfoque, incluem ferramentas que podem ser utilizadas na análise de questões relacionadas aos aspectos epistêmico (conhecimento didático-matemático do conceito), cognitivo (conhecimento de como os estudantes aprendem), afetivo (conhecimento afetivo, emocional, atitudinal, crenças sobre objetos), interacional (conhecimento sobre o ensino de matemática), mediacional (conhecimento de recursos, incluindo os recursos tecnológicos) e ecológico (conhecimento das relações entre conteúdo matemático e outras disciplinas, fatores curriculares,

¹⁰ BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, mai/août. 1986.

¹¹ VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 2-3, p. 133-170, mai/déc. 1990.

¹² DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 5-31, mai/août. 1986.

¹³ CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73-112, jan./avr. 1992.

¹⁴ DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

socioprofissionais, políticos, econômicos) (GODINO, 2017).

Sinteticamente, o EOS é configurado em torno de modelos teóricos que estão sendo progressivamente aperfeiçoados: modelo epistemológico sobre Matemática, apoiado em pressupostos antropológicos/socioculturais; modelo de cognição matemática sobre bases semióticas; modelo instrucional sobre bases socioconstrutivistas; e modelo sistêmico-ecológico que relaciona as facetas anteriores com o contexto biológico, material e sociocultural em que se desenvolve a atividade de estudo, e comunicação matemática.

Assim, o EOS visa indicar, orientar, estruturar e avaliar caminhos para qualificar os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, apresentando ferramentas teóricas para articular o pensamento (representado pelas ideias matemáticas), a linguagem matemática (signos), os objetos, as situações de ensino e de aprendizagem e demais fatores que impactam esses processos, considerando diferentes perspectivas. Discute questões que ajudam estruturar o planejamento do processo de educar matematicamente, tais como: “Que tipos de interações didáticas deveriam ser implementados nos processos de ensino que permitam aperfeiçoar as aprendizagens em Matemática?” (GODINO, 2012, p. 53, tradução nossa).

O estudo das noções teóricas do EOS pode ser classificado em quatro grupos: sistemas de práticas, configurações de objetos e processos, dimensão normativa e idoneidade didática. Cada um desses grupos possibilita a ênfase em aspectos específicos dos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, considerando as facetas epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica (Figura 3), conforme concebe Godino (2011).

Figura 3 – Facetas e Níveis de Análise Didática sob a perspectiva do EOS



Fonte: Godino, 2011, p. 5

Passamos a analisar, nas seções seguintes, os grupos de estudo das noções teóricas destacados na Figura 3.

3.1.1 *Sistemas de Práticas*

A noção de sistema de práticas desempenha um papel central, tanto do ponto de vista epistemológico quanto didático. No EOS, uma prática matemática é considerada como toda ação, performance, manifestação ou expressão – verbal, gráfica, gestual, entre outras, realizada por um sujeito para resolver problemas matemáticos, bem como comunicar as soluções obtidas e, ainda, validar ou generalizar para outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO, 1994). É enfatizado nessa teoria que não podemos interpretar os comportamentos observáveis dos estudantes se não lhes atribuirmos um objetivo.

Na centralidade da definição de prática matemática, destacam-se três tipos dessas:

- a) operacionais – qualquer ação ou manifestação (linguística ou não) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos;
- b) discursivas – que comunica a solução a outras pessoas e valida a solução; e
- c) normativas – generaliza para outros contextos e problemas; visam basicamente estabelecer propriedades/proposições, conceitos/definições. Assim, as práticas matemáticas podem ser interpretadas como uma combinação de uma prática operativa, em que textos matemáticos são lidos e produzidos, com uma prática discursiva, usada para informar e legitimar o que foi feito, podendo-se mobilizar uma prática normativa na generalização do que foi proposto.

Esses aspectos estão relacionados às facetas epistêmica, mediacional, interacional, cognitiva, afetiva e ecológica dos sistemas de práticas.

Godino e Batanero (1994, p. 335, tradução nossa) apresentam as noções primitivas de objeto e significado – um objeto matemático, em sua versão institucional, é concebido como um "emergente do sistema de práticas sociais associadas a um campo de problemas"; o significado de um objeto indica que ele é o "sistema de práticas institucionais associadas ao campo de problemas do qual o objeto emerge em um dado momento".

É assumido no EOS que as práticas matemáticas podem ser relacionadas a uma pessoa ou podem ser compartilhadas no âmbito de uma instituição (constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problemáticas), sendo realizadas ecologicamente (material, biológico e social), abordando aspectos epistêmicos das linguagens, conceitos, proposições e argumentações.

A seguir, discorreremos acerca da relação existente entre os sistemas de práticas, os objetos matemáticos emergentes desses sistemas e as relações estabelecidas entre tais objetos, que devem ser considerados na análise dos significados das noções matemáticas.

3.1.2 *Configurações de objetos e processos*

A noção de configuração ontossemiótica advém da necessidade de identificar os objetos e processos que intervêm e emergem nas práticas matemáticas que são realizadas na resolução das situações-problema. Assim, passamos a destacar características teóricas dos objetos, processos e configurações que serão úteis para o desenvolvimento desta tese.

a) Objeto matemático

Na estrutura do EOS, um objeto matemático, corresponde a qualquer entidade referida no discurso matemático, sendo permitido considerar acontecimentos e atividades – um conceito, uma propriedade, uma representação, um procedimento, entre outros (GODINO *et al.*, 2006).

A abordagem dos objetos matemáticos, na sala de aula, depende das diferentes instituições – comunidades de práticas, incluindo culturas, grupos étnicos, contextos socioculturais, entre outros; dos livros utilizados; da prática matemática utilizada pelos professores para o processo de ensino, nas diferentes circunstâncias educacionais. Os objetos matemáticos primários são entendidos, consoante detalhamento de Godino, Batanero e Font (2008), como:

- elementos linguísticos: termos, expressões, notações, gráficos, que podem ser apresentados de formas variadas (escrita, gráfica, oral, gestual);
- situações-problema: aplicações intra ou extramatemáticas e demais tarefas que induzem à atividade matemática;
- conceitos/definições: apresentados por meio de descrição, formalização, explicação, conteúdo em contexto;
- proposições: enunciados sobre conceitos, teoremas, corolários, lemas;
- procedimentos: algoritmos, operações, técnicas de cálculo;
- argumentos: declarações utilizadas para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutíveis ou de outro tipo.

Cada um desses objetos matemáticos, com exceção da situação-problema¹⁵, pode ser entendido como emergente do sistema de práticas. Os elementos linguísticos, conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos e argumentos emergem e evoluem de situações-problema ou de um construto matemático teórico. A atividade de resolução de problemas, prática matemática realizada pelo sujeito, é adotada como elemento central na construção do conhecimento matemático.

Os componentes do conhecimento que o sujeito necessita para realizar e avaliar uma prática matemática, permitindo-lhe solucionar uma determinada situação-problema, farão uso de certa linguagem verbal ou simbólica. Essa linguagem é a parte ostensiva – percebida por alguns dos sentidos – de conceitos, proposições e procedimentos que intervêm na elaboração de argumentos para decidir se as ações que compõem a prática são satisfatórias.

Os seis objetos matemáticos principais, citados anteriormente, podem constituir conhecimento prévio a ser acionado nas práticas matemáticas ou emergir delas como novos objetos; daí a classificação de objetos intervenientes e objetos emergentes dos sistemas de práticas, respectivamente.

Os objetos matemáticos primários que compõem a configuração manifestam-se de várias maneiras durante a atividade matemática: a linguagem com a qual nos referimos a eles é utilizada para evocar conceitos ou definições, que são operados com procedimentos e propriedades associadas, que se manifestam durante a solução de tarefas matemáticas.

Os objetos didáticos são abordados como sistema articulado de ações docentes, cujo objetivo é promover a aprendizagem e contextualizar o conteúdo com as ações discentes. Uma configuração de objetos e processos matemáticos ligados a uma situação-problema constitui uma importante ferramenta para a análise do ensino da Matemática.

Um objeto institucional é considerado uma entidade que emerge progressivamente ao longo do tempo, com base no sistema de práticas socialmente compartilhadas em uma instituição, em relação à resolução de um determinado campo de problemas matemáticos. Os objetos pessoais são considerados um sistema emergente de práticas pessoais significativas associadas a um campo de problemas.

Destacamos, a seguir, as relações existentes entre significado, compreensão e representação na Matemática.

¹⁵ O termo *situação-problema* é utilizado no EOS como uma abordagem consistente com aspectos de outras teorias, como no sentido utilizado por Guy Brousseau na Teoria das Situações Didáticas, ou como problema-matemático utilizado por Régine Douady com a Teoria Dialética (Instrumento-Objeto) e Jogo de Quadros, ou ainda, análogo à noção de tarefa/problemática definida por Yves Chevallard na Teoria Antropológica do Didático (GODINO *et al.*, 2014).

- **Significado de objetos matemáticos e didáticos**

O EOS assume uma concepção pragmática (operacional) do significado, que envolve conceber objetos matemáticos como ferramentas conceituais que se desenvolvem por meio de seu uso. As noções de significado institucional e pessoal de um objeto matemático, entendido como sistemas de práticas, em que o objeto é determinante para sua realização e sua relação com a noção de compreensão (GODINO; BATANERO; FONT, 2008), foram sendo refinadas à medida que novas concepções teóricas foram sendo incluídas no EOS.

Nesse enfoque, a compreensão é vista como uma competência desenvolvida pelo estudante, aliada a um processo mental, conforme dispõe Pino-Fan (2014, p. 55):

A competência está relacionada à ativação da configuração cognitiva adequada e, idealmente, acoplado à configuração epistêmica ou configuração de referência, ao contexto em que se desenvolve a prática. A compreensão tem a ver com as relações a serem estabelecidas entre todos os elementos envolvidos na implementação de uma configuração epistêmica (ou cognitiva) adequada para um determinado contexto (tradução nossa).

Assume-se como indicador de competência "uma ação efetiva realizada em determinado contexto com um determinado propósito" (FONT, 2011, p. 18, tradução nossa). O estudante entende um determinado objeto matemático quando o utiliza com competência em várias práticas. O EOS expressa que o significado tem relação com o conteúdo de qualquer função semiótica – o significado do objeto é dependente do contexto, sendo uma entidade composta pelo conjunto de práticas operatórias e discursivas e relacionadas com um campo de problemas.

As representações exercem também um importante papel no entendimento de um objeto matemático, como ressaltam Contreras, Luque e Ordóñez (2004), e no EOS, a representação se relaciona com a noção de significado. As funções semióticas incluem os ostensivos matemáticos e o pensamento, permitindo um refinamento da análise do significado das práticas.

No EOS, o triângulo epistemológico de Steinbring (2006) – signo/símbolo, objeto/contexto de referência, conceito – é ampliado, especialmente ao problematizar a noção de conceito e interpretar o “objeto/contexto de referência” em situações-problema. Essas são a origem ou razão de ser da atividade; a linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a ação; os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si.

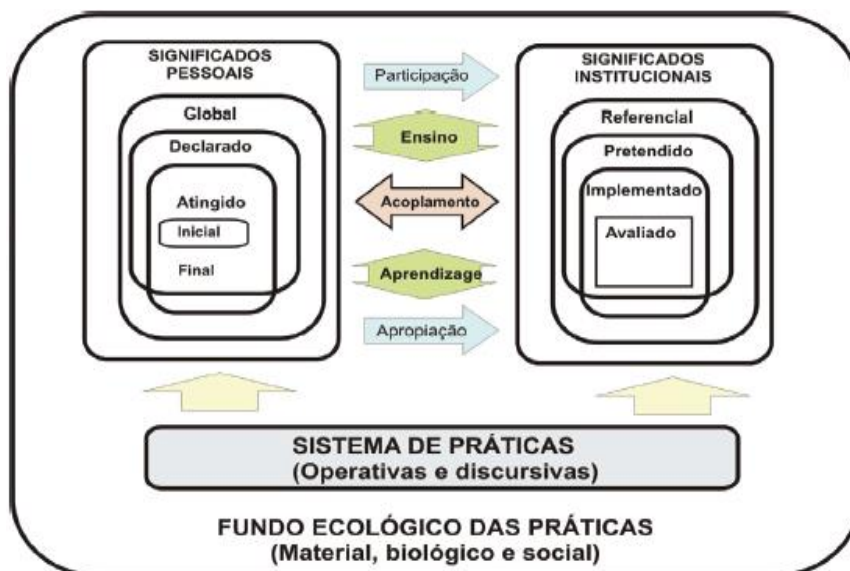
Os significados institucionais dos objetos matemáticos são distinguidos em quatro tipos: o significado de referência, o pretendido, o implementado e o avaliado.

O significado institucional de *referência* está relacionado aos sistemas de práticas dos especialistas que determinam qual é o objeto em evidência para as instituições matemáticas e didáticas. Tomando esse significado de referência, o docente seleciona, ordena e delimita a parte específica que será proposta ou apresentada a seus estudantes durante um processo instrucional, que considera os recursos disponíveis (tempo, conhecimento prévio dos estudantes, recursos tecnológicos, entre outros), constituindo-o como significado institucional *pretendido*. O significado institucional *implementado* é o que, de fato, ocorre na sala de aula. O significado institucional *avaliado* é aquele constituído pelas tarefas ou perguntas selecionadas pelo docente e que podem ser incluídas nas avaliações.

Quanto aos significados pessoais, podem ser discriminados em três tipos: o *global*, que corresponde a todo o sistema de práticas pessoais que o estudante pode, potencialmente, manifestar; o *declarado*, que corresponde às práticas realmente expressas, sendo corretas e incorretas; e o *alcançado*, relativo às práticas manifestadas que são consistentes com as diretrizes institucionais estabelecidas. A parte do significado declarado que não concorda com o institucional é considerado como erros de aprendizagem (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

É importante destacar que, na análise da variação dos significados, são considerados os significados manifestados previamente pelos sujeitos, também aqueles os quais alcançam no final do processo. Esses significados se relacionam dialeticamente, conforme Godino, Batanero e Font (2008) destacam na Figura 4.

Figura 4 – Tipos de significados institucionais e pessoais e a relação entre eles



Godino e Batanero (1994) apontam que os significados alcançados pelos estudantes dependem, essencialmente, dos significados institucionais; especificamente, dos significados pretendidos, associados aos sistemas de práticas planejados para um determinado processo educativo; assim como de seus significados efetivamente implementados e daqueles avaliados.

Além disso, o professor, como parte da instituição escolar, deve recorrer para a escolha dos significados pretendidos aos significados de referência. Em uma instituição de ensino, esse significado de referência comporá o significado global ou holístico do objeto matemático. Para a determinação de tal significado global é necessário um estudo histórico-epistemológico da origem e evolução do objeto em estudo, e considerar a diversidade de contextos (sistemas de práticas) em que o objeto é utilizado.

O significado global de referência é definido por: *significado global*, também chamado de significado holístico, que compreende os diferentes significados parciais de um objeto matemático; e *significado de referência*, entendido como os sistemas de práticas utilizados como referência para elaborar os significados que se pretende incluir em um processo de estudo (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011). Para uma determinada instituição de ensino, o significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto matemático.

Os sistemas de práticas e, conseqüentemente, as configurações de objetos emergentes podem ser estruturados no EOS em subsistemas (e subconfigurações) e cada um desses constitui um significado parcial do objeto em estudo. Esses significados parciais são gerados à medida que os problemas são abordados, reformulados e quando novas práticas operacionais e discursivas são desenvolvidas.

A realização plena dos processos de estudo requer a realização de seqüências de práticas de planejamento, controle e avaliação, que conduzirão a processos metacognitivos que, por sua vez, poderão aduzir o desenvolvimento dos significados, como se destacará na seção seguinte.

b) Processos matemáticos

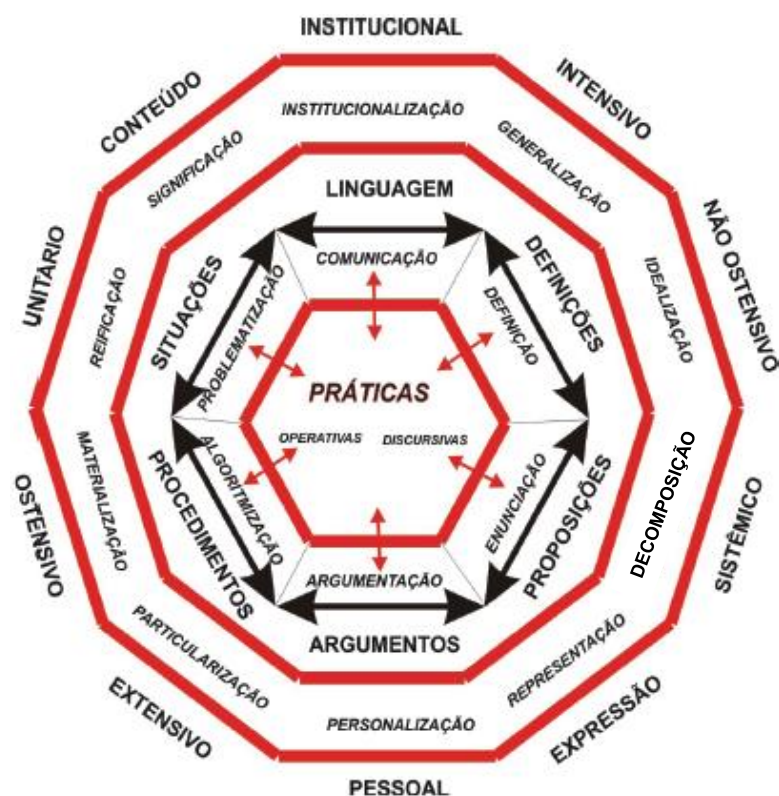
Os processos matemáticos são interpretados no EOS como seqüências de práticas que motivam o surgimento dos objetos primários, ou seja, uma seqüência de ações que é ativada ou desenvolvida, durante um determinado tempo, para alcançar um objetivo – geralmente uma resposta à proposta de uma tarefa matemática.

Existe, no EOS, uma distinção entre os termos *prática* e *processo* no detalhamento da descrição da atividade matemática: *prática* tem maior evidência no discurso sobre a Matemática, enquanto *processo* tem um foco mais próximo do aspecto cognitivo.

Sem pretender incluir todos os processos envolvidos na atividade matemática, Godino, Batanero e Font (2008) apresentam uma lista de dezesseis processos matemáticos, os quais são: generalização-particularização, institucionalização-personalização, representação-significação, decomposição-reificação, idealização-materialização, comunicação, definição, enunciação, argumentação, algoritmização e problematização; e estão relacionados à realização das práticas matemáticas.

Esses processos matemáticos estão associados às configurações dos objetos e às facetas propostas pelo EOS, conforme síntese na Figura 5.

Figura 5 – Representação ontossemiótica dos conhecimentos matemáticos



Fonte: Adaptado de Godino, Batanero e Font, 2008, p. 18

Das práticas emergem os diferentes tipos de objetos matemáticos primários que estão relacionados entre si, formando configurações. Os objetos primários envolvidos nas práticas matemáticas e os que delas emergem, segundo o jogo de linguagem do qual participam, podem ser considerados baseando-se nas diferentes formas de envolvimento que se agrupam em facetas ou dimensões duplas (decágono).

É importante destacar, como foi observado em Font *et al.* (2009), que tem ocorrido uma "mudança processual" na estrutura dos currículos matemáticos em nível internacional. O que promoveu a ruptura da concepção de currículos matemáticos que privilegiavam o objetivo de

aprender, essencialmente, conceitos, para pensar em currículos cujos objetivos se refletem em aprender, precipuamente, processos. Font e Rubio (2017) refletem que essa mudança ocorreu, entre outras razões, porque a Matemática tem sido vista como uma ciência em que o método domina claramente o conteúdo.

Assim, há uma tendência para currículos baseados em processos e competências e, por essa razão, nas últimas décadas, tem-se dado grande importância ao estudo dos processos matemáticos, particularmente os processos de resolução de problemas e modelagem.

A resolução de problemas e, de maneira mais geral, a modelização, devem ser consideradas como “hiper-processos” matemáticos ao implicar configurações complexas dos processos matemáticos primários (estabelecimento de conexões entre os objetos e generalização de técnicas, regras e justificações). Além disso, a realização efetiva dos processos de estudo requer a realização de sequências de práticas de planejamento, controle e avaliação (supervisão) que conduzem a processos meta-cognitivos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 16).

c) Configuração didática

Uma configuração didática, segundo Godino (2014), é uma parte de uma atividade didática, isto é, atividade de ensino e/ou de aprendizagem. Tal atividade está associada a uma configuração epistêmica que corresponde a tarefas com procedimentos requeridos para sua solução que abordam conceitos, proposições e argumentações, as quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles, com a utilização de uma linguagem própria.

Associadas a essa configuração estão as interações professor-recursos-estudantes a respeito de um objeto ou conteúdo matemático, que se apresentam na resolução ou realização de uma situação-problema ou uma tarefa matemática.

A descrição das aprendizagens, que vão sendo construídas ao longo do processo, realiza-se mediante as configurações cognitivas – rede de objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas pessoais, associadas a uma configuração epistêmica.

Uma sequência de configurações didáticas, orientadas à aprendizagem de um tipo de situação-problema ou mesmo de um conteúdo específico, constitui trajetórias didáticas, as quais descrevem a aprendizagem alcançada pelos estudantes, sendo sua otimização um dos seus principais objetivos do processo educativo.

Como exposto, as configurações de objetos e processos abordam características relacionadas às facetas epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica.

3.1.3 Dimensão normativa

Trata-se de um sistema de regras, hábitos, diretrizes curriculares e convenções que regulam e tornam possível os processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que a atividade matemática ocorrida em sala de aula tem uma dimensão social, já que a classe pode ser concebida como uma microssociedade na qual o conhecimento matemático é construído e disseminado por meio da interação entre os estudantes e o professor.

Identificamos que Godino *et al.* (2009) classificam essa dimensão como:

- a) o cronograma das normas (desenho do currículo, planejamento, implementação e avaliação);
- b) a origem (disciplina, escola, sala de aula, sociedade);
- c) o tipo e o grau de coerção (social e disciplinar);
- d) de acordo com aspecto do processo instrucional ao qual se refere (epistêmica, cognitiva, afetiva, ecológica, instrucional).

A identificação das diferentes facetas da dimensão normativa – epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica–, permite avaliar a conveniência das intervenções docentes e discentes, sugerindo adequações nos tipos de normas que ajudam e potencializam o desempenho e controle dos sistemas didáticos, com vistas a uma evolução dos significados pessoais relacionados aos significados institucionais pretendidos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

3.1.4 Idoneidade didática

A noção de idoneidade ou adequação didática, descrita no EOS, trata-se de critérios objetivos que servem para orientar a avaliação dos processos instrucionais da Matemática, a fim de aprimorá-los, sendo o principal indicador empírico o grau de adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos estudantes e os significados institucionais pretendidos.

A adequação didática de um processo instrucional é definida como a articulação coerente e sistêmica de seis facetas, conforme Godino, Batanero e Font (2008):

- a) epistêmica – refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), com relação ao significado de referência. Em nosso contexto, ressaltamos que o ensino das Integrais pode ser limitado à manipulação algébrica, com técnicas de integração algorítmicas (baixa adequação), ou considerar diferentes situações complementares, de modo a incluir aplicações da Integral Definida

- em contextos extramatemáticos (alta adequação);
- b) cognitiva – está relacionada com o grau em que os significados pretendidos/implementados estejam na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes, assim como a proximidade desses significados pessoais alcançados aos significados pretendidos/implementados. Um alto grau de adequação cognitiva pode ser alcançado na realização da proposta didática, apresentada nesta investigação, se os estudantes, após a implementação dessa, mobilizarem significados pessoais sobre a Integral Definida de maneira mais ampla e consistente com os significados pretendidos/implementados na proposta didática;
 - c) interacional – refere-se à verificação (*a priori* ou *a posteriori*) da identificação dos conflitos semióticos¹⁶ presentes nas configurações e trajetórias didáticas e, assim, resolver os conflitos produzidos durante o processo educativo. A proposta didática envolve ação, formulação, validação e institucionalização de ideias pelos estudantes e, nessa perspectiva, pretende potencializar maior adequação semiótica do que em uma aula expositiva, em que, talvez, o estudante não apresente oralmente suas dificuldades, que podem passar despercebidas pelo professor e não serem elucidadas no processo;
 - d) mediacional – refere-se ao grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais (livros, textos, recursos computacionais) e temporais, necessários para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem. A proposta didática prevê o uso do *software* GeoGebra. Um processo de estudo que utiliza tecnologias digitais tem, potencialmente, maior adequação mediacional que outro tradicional, baseado exclusivamente na utilização de quadro, lápis e papel;
 - e) afetiva – refere-se ao grau de interesse, motivação dos estudantes no processo de estudo e de seus componentes emocionais (atitudes, emoções e crenças). A proposta didática leva em consideração aspectos que têm o potencial de orientar e avaliar os interesses, motivação e emoções dos estudantes, como, por exemplo, o uso de situações-problemas relacionadas à vida cotidiana e profissional que pode estimular a aprendizagem dos tópicos matemáticos envolvidos na resolução das situações propostas;
 - f) ecológica – refere-se ao grau com que o processo de estudo se ajusta ao currículo

¹⁶ Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão de dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade ocorre entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos de um tipo epistêmico, enquanto, se a disparidade ocorre entre práticas que formam o significado pessoal do mesmo sujeito, as designamos como conflitos semióticos de um tipo cognitivo. Quando a disparidade ocorre entre as práticas (discursivas e operacionais) de dois assuntos diferentes na interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor), falaremos sobre conflitos interacionais (semióticos). (GODINO *et al.*, 2006, p. 15).

proposto pela instituição, à sociedade e aos condicionamentos do entorno no qual se desenvolve. Nesse ponto, consideramos o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática, da instituição em que foi implementada a proposta didática. Esse documento nos trouxe informações acerca do ambiente social, político, econômico em que a instituição está localizada, bem como o perfil do estudante. Ainda foi possível analisar a ementa do curso de Cálculo Diferencial e Integral em que o tópico Integral Definida está contemplado. Essas informações influenciaram no tipo de práticas matemáticas planejadas para a proposta didática. Também foram consideradas as observações realizadas na fase do Estudo Preliminar, que será detalhado no Capítulo 5.

Sendo o contexto desta investigação a formação de futuros professores de Matemática, buscamos em Godino (2009) o constructo referente ao modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM), que foi ancorado nas noções teóricas do EOS. Na seção seguinte, expomos as ferramentas teóricas propostas pelo CDM.

3.2 Modelo de Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM)

O ensino de um conteúdo específico de Matemática requer do professor a apropriação de uma rede de conhecimentos que envolve conhecimentos didáticos e matemáticos. A literatura que trata dos conhecimentos dos professores de Matemática considera a relevância do conhecimento do conteúdo matemático para o professor dessa disciplina. Godino (2009) assegura que o professor deva ser capaz de organizar o ensino, desenvolver tarefas de aprendizagem, utilizar adequadamente os recursos didáticos, além de compreender as condições necessárias que possibilitem o ensino e a aprendizagem.

Nessa perspectiva, foi desenvolvido, no âmbito do EOS, um modelo teórico de conhecimento didático-matemático do professor de matemática (CDM) que vem evoluindo em diferentes investigações (GODINO, 2009; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2013, 2015; GODINO *et al.*, 2017).

Ressaltamos que o termo *conhecimento* é usado como uma construção, que inclui compreensão e disposição aliadas à competência.

A disposição, ou capacidade, está relacionada à noção de objeto matemático e didático pessoal, ou seja, o que torna a prática possível. (...) A compreensão tem a ver com as relações a serem estabelecidas entre todos os elementos envolvidos na implementação de uma configuração epistêmica (ou cognitiva) adequada para um determinado contexto (PINO-FAN, 2014, p. 55, tradução nossa).

O CDM está organizado em três dimensões principais que interpretam e caracterizam o conhecimento do professor: dimensão matemática, dimensão didática e dimensão metadidático-matemática, em que são propostas ferramentas específicas, conforme apresentamos a seguir.

- a) A *dimensão matemática* do conhecimento didático-matemático inclui duas subcategorias – *Conhecimento comum do conteúdo* (CCC) e *Conhecimento ampliado do conteúdo* (CAC). A primeira (CCC) refere-se ao conhecimento sobre um objeto matemático específico, necessário para resolver os problemas ou uma determinada tarefa proposta pelo próprio currículo de Matemática, pelo plano de estudos, pelos livros didáticos ou materiais curriculares para um nível específico de ensino. A segunda (CAC) é aquela que vincula um objeto de estudo com um nível superior; o professor deve ter um bom domínio dos conceitos relativos àquele objeto matemático e uma compreensão profunda deles, para fazer a organização do processo instrucional e colocá-lo em prática.
- b) A dimensão didática do CDM inclui as seis facetas contempladas no EOS e aqui recuperadas com especificações voltadas ao conhecimento didático-matemático:
- epistêmica – conhecimento especializado de Matemática, de acordo com os objetos e significados institucionais em um contexto particular. O professor deve ser capaz de mobilizar diversas representações de um objeto matemático; resolver uma atividade ou situação, a partir de diferentes estratégias de resolução; identificar os conhecimentos, postos em ação durante a resolução de tarefas matemáticas, mediante distintos procedimentos; proporcionar diferentes justificativas e argumentos; vincular o objeto matemático a outros objetos matemáticos do nível educativo que se ensina, de níveis anteriores ou posteriores; compreender e mobilizar o conhecimento de significados parciais, para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto) (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015);
 - cognitiva – conhecimento do desenvolvimento dos significados pessoais alcançados pelos estudantes; o grau de dificuldades que esses tiveram para aproximação aos significados pretendidos; o alcance aos significados pretendidos ou implementados, relacionados às características cognitivas que esses apresentaram; compreensão das formas de raciocínio;
 - afetiva – conhecimento do grau de interesse e motivação dos estudantes no processo de estudo;
 - mediacional – conhecimento dos recursos didáticos utilizados no processo de estudo

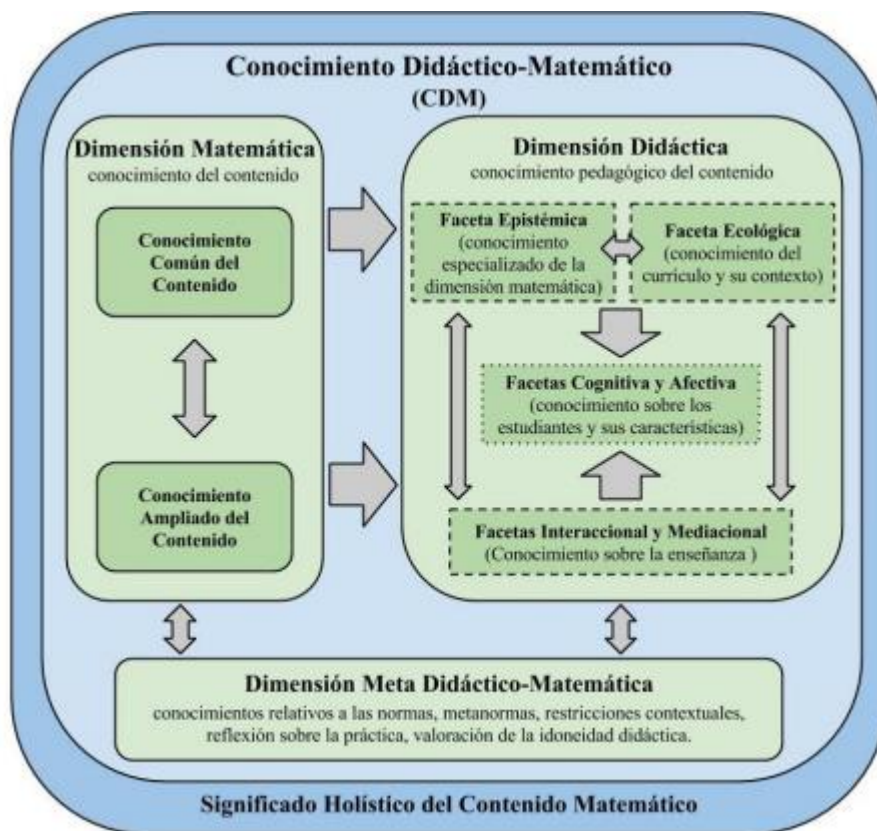
(livros, textos, recursos digitais, dentre outros), apropriados para cada tópico de estudo e tempo adequado para o desenvolvimento desse, segundo o nível ao qual se destina o ensino;

- interacional – conhecimento de formas de interação entre professores e estudantes, orientadas para o reconhecimento de conflitos semióticos potenciais, resolução desses conflitos, para promover a aprendizagem e negociação de significados;
- ecológica – entendimento de como o processo de estudo se ajusta às questões curriculares, sociais, políticas, econômicas, entre outras, como também ao ambiente em que se desenvolve.

Todas essas facetas fazem parte do conhecimento especializado do professor de Matemática, visto que os processos ativam algum conteúdo matemático, seja ele comum ou ampliado.

Essas facetas e componentes podem ser vislumbrados na Figura 6.

Figura 6 – Dimensões e componentes do Conhecimento Didático-Matemático (Modelo CDM) e suas relações com outros modelos



Fonte: Pino-Fan, Godino, 2015, p. 98

Para cada uma dessas facetas, estão previstos critérios empíricos e indicadores de adequação didática, assim como são contemplados os quatro níveis de análise do EOS já

expostos anteriormente, mas aqui relacionados à análise do CDM do professor, de acordo com o tipo de informação necessária para a tomada de decisão instrucional, a saber:

- sistemas de práticas – descrição das ações realizadas para solucionar as tarefas matemáticas propostas para contextualizar o conteúdo e promover a aprendizagem. As ações dos estudantes e do professor também são descritas;
 - configurações de objetos e processos (Matemática e Didática) – descrição de objetos e processos matemáticos envolvidos na realização das práticas, e como delas emergem. O objetivo deste nível é descrever a complexidade dos objetos e significados das práticas;
 - padrões e metanormas – identificação das regras, hábitos, normas que condicionam e possibilitam o processo de estudo e que influenciam em cada faceta e suas interações;
 - idoneidade ou adequação didática – identificação de possíveis melhorias no processo de estudo que aumentam a adequação didática.
- c) A dimensão metadidático-matemática é composta pelos conhecimentos sobre os critérios da adequação didática (avalia um processo de ensino e aprendizagem) e os conhecimentos sobre as normas e metanormas (a promoção da reflexão, da avaliação e da detecção das potencialidades da prática).

Para o desenvolvimento desta tese, levamos em conta o modelo CDM, sua concepção de competências e as ferramentas teórico-metodológicas que permitem as análises. A faceta epistêmica do modelo de CDM deve incluir e refinar o conhecimento de conteúdo matemático (conhecimento comum, especializado e ampliado), como proposto no Quadro 1.

Quadro 1 – Conhecimento do conteúdo (comum, especializado e ampliado)

Faceta Epistêmica	Item de Avaliação
Conhecimento Comum	Resolve a tarefa.
Conhecimento Especializado	Desenvolve a configuração de objetos e processos e coloca em ação soluções plausíveis da tarefa e outras relacionadas.
Tipos de problemas	Identifica as variáveis da tarefa; generaliza (particulariza) a declaração.
Linguagens (representações)	Resolve a tarefa usando diferentes representações.
Procedimentos	Resolve a tarefa usando diferentes procedimentos (intuitivo, formal).
Conceitos/propriedades	Identifica os conceitos e propriedades postos em ação nas soluções.
Argumentos (Conhecimento Ampliado: Conexões)	Identifica possíveis generalizações da tarefa e ligações a outros tópicos mais avançados.

Fonte: Godino 2009, p. 25 (tradução nossa)

A junção das facetas cognitiva e afetiva refina o conhecimento do conteúdo em relação aos estudantes, assim como a união das facetas interacional e mediacional refina a noção de conhecimento de conteúdo em relação ao ensino, conforme exposto nos Quadros 2 e 3.

Quadro 2 – Conhecimento de conteúdo em relação aos estudantes (aprendizagem)

Faceta cognitiva + afetiva	Item de Avaliação
Configurações cognitivas (estratégias, representações, afirmações, argumentos...)	Descreve os tipos de configurações cognitivas que os estudantes desenvolveram para resolver a tarefa (ou tarefas) propostas.
Erros, dificuldades, conflitos de aprendizagem, concepções	Descreve os principais tipos de conflitos de aprendizagem na resolução deste tipo de tarefas pelos estudantes.
Avaliação das aprendizagens	Questões de formulação que permitem explicitar significados pessoais dos estudantes para resolver este tipo de tarefas (ou conteúdos).
Atitudes, emoções, crenças e valores	Descreve estratégias que podem ser implementadas para encorajar os estudantes a se envolverem na resolução dessas tarefas (ou no estudo da matéria).

Fonte: Godino, 2009, p. 26 (tradução nossa)

Quadro 3 – Conhecimento do conteúdo em relação ao ensino

Faceta Instrucional (interacional + mediacional)	Item de Avaliação
Configuração didática: <ul style="list-style-type: none"> • papel do professor e dos estudantes em relação à tarefa ou ao conteúdo; • modos de interação professor-estudante; estudantes-estudantes; • recursos materiais; • tempo atribuído. 	Descreve a configuração didática a ser implementada usando a tarefa matemática dada.
Trajectoria didática (sequência de configurações didáticas)	Descreve outras tarefas relacionadas ao dado e à forma de gerir o caminho educacional correspondente.

Fonte: Godino, 2009, p. 27 (tradução nossa)

Os conhecimentos curriculares, contextos educacionais, fins, propósitos e valores da educação podem ser pensados com itens de avaliação similares aos do Quadro 4.

Quadro 4 – Conhecimento do currículo e das conexões intra e interdisciplinares

Faceta Ecológica	Item de Avaliação
Orientações curriculares	Identifica os elementos dos currículos que são abordados por meio da realização das tarefas propostas (metas, objetivos).
Conexões intradisciplinares	Explica as conexões que podem ser feitas com outros sujeitos do programa de estudo, realizando a tarefa ou variantes dela.
Conexões interdisciplinares	Explica as conexões que podem ser feitas com outros sujeitos do

	programa de estudo, realizando a tarefa ou variantes dela.
Outros fatores condicionantes	Identifica fatores de ordem social, material ou outro tipo, que condicionam o cumprimento da tarefa ou o desenvolvimento do projeto educativo pretendido ou implementado.

Fonte: Godino, 2009, p. 27 (tradução nossa)

3.3 Aspectos do EOS e CDM considerados na pesquisa

Propostas para aprimorar o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral indicam maneiras de lidar com problemas didáticos, discutidos na problematização subjacente a esses processos (ressaltada no Capítulo 2), por meio de abordagens diferentes da proposta mecanicista, entre outras propostas.

Na perspectiva teórica do EOS, a sugestão é realizar uma análise ontossemiótica *a priori* que dê destaque às diferentes configurações epistêmicas e didáticas, formando o significado de referência do objeto matemático, que deve ser ativado para relacionar os elementos das configurações ontossemióticas desse objeto e considere as configurações didáticas implementadas.

O modelo teórico proposto pelo EOS utilizado na investigação pode apoiar o futuro professor de Matemática no desenvolvimento do seu conhecimento didático, fazendo-o refletir enquanto realiza as atividades da proposta didática apresentada, quanto a estes aspectos: fornecimento de um ponto de vista complementar para identificação da diversidade de competências e conhecimentos didático-matemáticos que entram em ação na realização de tarefas; a potencialização da aprendizagem com o uso de situações-problema, atreladas a um contexto; o controle do tempo na realização das atividades é importante na implementação dos distintos componentes e facetas do conteúdo a ser ensinado/estudado; diversidade de experiências de processo de estudo adequados a cada circunstância; identificação de fatores que condicionam os processos de ensino e de aprendizagem.

A relação estreita entre a Matemática e a Didática da Matemática nos levou a assumir, nesta pesquisa, o modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM), apresentado na seção anterior, integrando essa relação. Designadamente, consideramos alguns aspectos do EOS e do CDM que destacamos a seguir:

- a) elementos desse referencial teórico sobre a natureza dos objetos matemáticos e sua emergência com base nas práticas e configurações de objetos matemáticos, tanto institucionais como pessoais;
- b) o entendimento acerca da compreensão, vista como uma competência desenvolvida pelo estudante (FONT, 2011);

- c) a aproximação dos elementos teóricos desse modelo às ideias de Raymond Duval (DUVAL, 1993, 2009) – o aporte, no EOS, dá-se no entendimento de que o estudo de representações semióticas permite identificar, em um conteúdo específico, os significados institucionais e pessoais postos em ação, além de identificar a compreensão dos estudantes e os possíveis conflitos semióticos na interação envolvendo os processos instrucionais, observados nas fases: de objeto matemático a ser ensinado em uma atividade específica; e de objeto a ser aprendido, considerando a perspectiva teórica, pelo estudante. Para Godino (2002, p. 239, tradução nossa), “é necessário elaborar modelos teóricos que tratem de articular as dimensões semiótica (em seus aspectos sintáticos, semânticos e pragmáticos), epistemológica, psicológica e sociocultural em educação matemática”. O aporte das teorias de Godino (EOS) e de Duval (TRRS) serve como lentes teóricas e práticas, pois juntas podem enriquecer o ensino e a aprendizagem de Matemática. O EOS fornece um nível de análise da atividade cognitiva do sujeito, apresentando os objetos matemáticos que estão envolvidos nos processos de tratamento e conversão de representações semióticas entre registros. Esse nível de análise complementa a análise realizada utilizando as ferramentas do TRRS, uma vez que, com as ferramentas, “configuração de objetos e processos” e “função semiótica”, o conteúdo das representações torna-se explícito e é utilizado como parte de tal atividade cognitiva;
- d) a importância dada à resolução de situações-problema – a partir da resolução de situações-problema é possível o aprimoramento ou desenvolvimento de conhecimentos, considerando a ação do sujeito na situação e a organização de seu comportamento, quando coloca em ação práticas operacionais e discursivas e quando mobiliza crenças, atitudes, aspectos afetivos que condicionam as diferentes maneiras de dar a resposta cognitiva necessária (GODINO, 2011);
- e) a identificação e análise dos processos envolvidos na atividade matemática – as sequências de práticas, sejam elas cognitivas ou epistêmicas, envolvem: “institucionalização/personalização; análise/decomposição; síntese/reificação; expressão/concreção; generalização/particularização; idealização/abstração; expressão/representação; significação”, entre outros processos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 8);
- f) a implementação dos processos instrucionais por meio da noção de configurações e trajetórias didáticas (GODINO, 2014);
- g) a categorização e análise do conhecimento didático-matemático mobilizado em um processo instrucional (GODINO, 2009).

Um dos aspectos diferenciadores do EOS encontra-se na análise minuciosa que se propõe para os conhecimentos pessoais e institucionais, junto aos procedimentais e conceituais, considerados necessários para distinguir os conhecimentos que emergem de situações ou fenômenos – situações-problema, tarefas, atividades –, conhecimentos linguísticos e de notações e conhecimentos argumentativos que possam ser validados.

Na proposta didática implementada para o estudo da Integral Definida, estão contemplados os seis tipos ou entidades primárias postuladas (elementos linguísticos; situações-problema; conceitos/definições; proposições/propriedades; procedimentos; argumentos), estando as situações-problema dispostas no início de cada atividade proposta, em que são evocados os objetos matemáticos.

Corroborando a ideia de Godino (2009), identificamos que o EOS forneceu elementos originais e significativos ao desenvolvimento do desenho instrucional para a compreensão da Integral Definida.

Para o desenvolvimento da proposta didática, também utilizamos como referência as características das configurações epistêmicas da Integral sintetizadas por Crisostomo (2012): *configuração epistêmica intuitiva* (com ênfase no conceito de área de figuras planas); *geométrica* (com enfoque para áreas de regiões planas, Somas de Riemann e áreas de retângulos); *somatória* (com destaque para a formalização do conceito de Integral, a partir do conceito de limite de Somas de Riemann); *aproximada* (com enfoque para a ideia de integração numérica, por meio do uso de métodos numéricos aproximados); *extramatemática* (com destaque para conceitos relacionados às áreas de aplicação da Integral); acumulada (abordando a dedução da Integral Definida, caracterizando-a como uma variação acumulada) e *tecnológica* (com destaque para o uso das tecnologias na resolução de problemas matemáticos por meio da Integral). Essas configurações estão detalhadas no capítulo que trata do desenho da proposta didática (Capítulo 6).

Godino, Batanero e Font (2008) argumentam ser por meio das práticas operatório-discursivas que relacionamos problematização, comunicação, definição, enunciação, argumentação, algoritmização, que interagem umas com as outras por meio de situações, linguagem, definições, proposições, argumentos e procedimentos, envolvendo os componentes e faces da cognição matemática.

As configurações didáticas, apoiadas em critérios de adequação dos processos de estudo de um conteúdo matemático ou objeto, fazem parte das ferramentas teóricas que permitem a identificação e estruturação do conhecimento didático sobre o ensino e aprendizagem do objeto. Procuramos atender esses aspectos na apresentação da proposta didática presente nesta tese.

No próximo capítulo, apresentamos a estrutura metodológica desta pesquisa que considera as facetas desenvolvidas no EOS com características metodológicas próprias (GODINO, 2002; GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006; GODINO; BATANERO; FONT, 2008; GODINO *et al.*, 2013; GODINO, 2017).

CAPÍTULO 4 – ESTRUTURA METODOLÓGICA: ELEMENTOS DO EOS COM APORTES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Descrevemos, neste capítulo, considerações da metodologia de pesquisa empregada na investigação, assim como o percurso metodológico adotado que busca investigar a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores de Matemática, ao serem submetidos a uma proposta didática, envolvendo tecnologias digitais, que aborda o objeto matemático Integral Definida.

Apresentamos os procedimentos referentes à investigação didática, utilizando elementos metodológicos do EOS, com aportes da Engenharia Didática – sugerimos o desenvolvimento da proposta didática em quatro fases: estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação.

A análise didática da pesquisa é feita com base nas contribuições do EOS que nos fornece uma série de ferramentas, descritas neste capítulo, e que permitem analisar os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto de estudo quando mediados por tecnologias digitais.

Também expomos, neste capítulo, o contexto das atividades, declarando os meios, materiais, formas de trabalho e os participantes deste estudo.

4.1 Pesquisa Qualitativa

Investigamos como um grupo de dez estudantes do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros mobiliza competências ou desenvolve conhecimentos didático-matemáticos ao resolver atividades, envolvendo tecnologias digitais, que abordam alguns significados da Integral Definida, em contextos intra e extramatemáticos. A opção metodológica é a de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e exploratória (KÖCHE, 2002), com abordagem de categorias do EOS.

Bogdan e Biklen (1994, p. 11) tratam a abordagem qualitativa como “uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”. A pesquisa qualitativa, segundo esses autores, envolve a obtenção de dados descritivos, nos quais se retrata a perspectiva dos participantes – esses aspectos são considerados neste estudo.

A investigação qualitativa, segundo esses pesquisadores, tem em sua natureza cinco

características: a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na coleta desses dados; os dados coletados são essencialmente de caráter descritivo; o investigador tem como foco o processo, com maior preocupação para esse aspecto do que que, propriamente, com os resultados; a análise dos dados é feita por indução; e o investigador interessa-se, fundamentalmente, em compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

A abordagem qualitativa se justifica porque: a pesquisadora possui um contato direto com o ambiente e os participantes da pesquisa; os dados recolhidos são descritivos – compreendem transcrições de diálogos, protocolos de atividades desenvolvidas pelos participantes, vídeos, notas de campos, documentos; a análise dos dados foi realizada respeitando-se a forma com que esses foram registrados, transcritos e textualizados; houve a preocupação de como o objeto de pesquisa poderia ser evidenciado na proposta didática elaborada – o interesse maior se relacionou com o processo, uma vez que importantes questões foram explicitadas na elaboração e implementação da proposta didática para o estudo da Integral Definida, o que foi evidenciado como fundamental para a identificação dos conhecimentos didático-matemáticos e competências mobilizados ou desenvolvidos neste estudo; a análise e interpretação dos dados da pesquisa foi realizada indutivamente, utilizando-se as dimensões e facetas do enfoque teórico utilizado – EOS; os significados (institucionais e pessoais) relacionados à compreensão da Integral Definida foram importantes para a pesquisa, já que os dados foram analisados em uma perspectiva cognitiva fundamentada nos preceitos dos constructos teóricos do EOS.

Posto isso, as estratégias escolhidas, o desenvolvimento da proposta didática, a participação e o comprometimento dos estudantes, os registros, procedimentos, conhecimentos e competências que esses mobilizaram ao interagir com o objeto matemático de investigação didática foram considerados como objetos de análise.

Os elementos metodológicos do EOS, articulados com os aspectos da Engenharia Didática que foram utilizados na metodologia de pesquisa, são abordados na próxima seção.

4.2 Enfoque Ontossemiótico com aportes da Engenharia Didática

O EOS apresenta características metodológicas próprias (GODINO, 2002; GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006; GODINO; BATANERO; FONT, 2008; GODINO *et al.*, 2013; GODINO, 2017) e fornece uma série de ferramentas, descritas neste capítulo, que permitem analisar os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto de estudo, quando mediados

por tecnologias digitais.

Essas ferramentas possibilitam revelar fatos didáticos significativos que definem, por um lado, orientações para a determinação de um percurso didático adequado ao estudo da Integral Definida e, por outro lado, fundamentos para a avaliação da Engenharia Didática como metodologia de investigação.

A escolha dessa metodologia que contemplou as demandas da pesquisa deve-se, sobretudo, à intenção de desenvolvermos um estudo experimental, baseado em realizações didáticas, ou seja, na concepção, na efetivação, na observação e na análise de um sistema de práticas, envolvendo uma proposta didática para investigar a mobilização ou o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos e competências, no contexto da formação inicial de professores de Matemática.

O termo ou conceito de Engenharia Didática, elaborado inicialmente por Guy Brousseau, apresenta-se como suporte metodológico para as pesquisas em Didática de Matemática. Posteriormente, na década de 1980, foi desenvolvido por Michèle Artigue, que considera a Engenharia Didática como um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas, tendo se constituído como uma metodologia de investigação científica (ARTIGUE, 1991).

A Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa, é caracterizada como suporte à criação de um produto didático, que pode envolver plano de ensino, produção de materiais didáticos, esquema experimental, entre outros instrumentos, conforme explicitado por Douady (1993, p. 2):

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

Nessa perspectiva, Artigue (1996) dispõe que a Engenharia Didática compreende quatro fases, que podem ocorrer de maneira não linear, necessitando, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos fundantes:

- a) análises preliminares – compreende a análise do funcionamento do ensino habitual do conteúdo, buscando esclarecer as implicações e consequências do ensino tradicional, também as dificuldades e obstáculos que se relacionam com a compreensão dos estudantes, indicando condições de aprimoramentos potenciais de intervenções que aperfeiçoem os processos de ensino e de aprendizagem;

- b) concepção e análise *a priori* – essa fase é evidenciada pela descrição das escolhas que podem ser feitas pelo pesquisador, como definição de variáveis de comando, de âmbito global ou local. Artigue (1996) indica as variáveis microdidáticas (ou locais) e macrodidáticas (ou globais) que podem ser consideradas pelo pesquisador/professor na abordagem das várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática. A análise *a priori* busca determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar e explicar os comportamentos dos estudantes, possibilitando a previsão desses, que resultem no desenvolvimento do conhecimento;
- c) experimentação – essa fase é composta, segundo Artigue (1996), pela aplicação do dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais identificam essa necessidade. Visa-se que os estudantes coloquem em prática seus conhecimentos, a fim de resolver as situações-problema e possam aprimorar seus conhecimentos. As ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático, dentre outras) são utilizadas nesta fase, com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa;
- d) análise *a posteriori* e validação – essa fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e o confronto com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. É possível que se analisem as ocorrências e quais as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local, que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa. Segundo Artigue (1996), o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* consiste em investigar aquilo que foi considerado nas hipóteses e que, na prática, sofreu distorções, deixando de ser válido.

As investigações alusivas à Engenharia Didática de Artigue (2011) são interpretadas por Godino *et al.* (2013, 2014) como um tipo de *design* gráfico, cuja base teórica reside na Teoria das Situações Didáticas (TSD), e segue a seguinte associação:

O desenho corresponde à análise *a priori* e à concepção global da engenharia; à implementação com a experimentação; e, finalmente, à avaliação ou análise retrospectiva com a análise *a posteriori*. Do mesmo modo, está previsto um estudo preliminar nas diferentes dimensões envolvidas. A utilização de uma denominação diferenciada deve-se à orientação, fundação e desenvolvimento das fases de acordo com os pressupostos ontológicos, semióticos, pragmáticos e antropológicos do EOS. (GODINO *et al.*, 2014, p. 171, tradução nossa).

Dessa forma, Godino *et al.* (2014) propõem uma visão ampliada da Engenharia Didática e sugerem o desenvolvimento de suas fases baseando na abordagem ontológica-semiótica do

conhecimento e do ensino de Matemática. Assim, esse pesquisador e seus colaboradores descrevem as quatro fases distintas (estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação), que são caracterizadas a seguir:

- a) estudo preliminar – estudo de textos, levantamento bibliográfico, constituição dos significados de referência dos objetos matemáticos em estudo (significados pessoais e significados institucionais);
- b) desenho – seleção e produção das situações-problema; elaboração de atividades; realização da análise *a priori* das atividades; organização de apresentação dessas, indicação dos comportamentos esperados dos estudantes e das intervenções controladas pelo docente;
- c) implementação da trajetória didática – observações das interações entre os estudantes, entre professor e estudantes; entre estudantes e o uso de recursos instrucionais; descrição das aprendizagens alcançadas;
- d) avaliação ou análise retrospectiva – realizada mediante uma comparação entre os significados institucionais – *pretendidos* (sistema de práticas planejado), *implementados* (sistema de práticas implementado pelo docente) e os significados pessoais – *declarados* (atinentes às práticas expressas por meio de ações e registros), *alcançados* (que se relaciona às práticas manifestadas, que são coerentes com a pauta institucional). Esses significados são previstos no desenho e observados na implementação. Também é possível a reflexão sobre as normas que condicionam o processo instrucional. A análise sobre a respectiva adequação didática também acontece nesta fase.

As facetas que condicionam a aprendizagem propostas pelo EOS, quais sejam, epistêmica, mediacional, interacional, cognitiva, afetiva e ecológica, conduzem a ferramentas teóricas e metodológicas que possibilitam uma análise detalhada do objeto de estudo e são consideradas em cada uma das fases estabelecidas na Engenharia Didática – estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação. Inclusive, o que caracteriza a articulação do EOS com a Engenharia Didática é o uso das referidas facetas.

A seguir, explicitamos como as facetas do EOS são articuladas em cada uma das fases da Engenharia Didática, segundo Godino *et al.* (2014), e como essa articulação se faz presente na pesquisa:

- a) epistêmica – os significados institucionais (sistema de práticas compartilhado no âmbito de uma instituição) postos em ação em cada uma das fases do processo de estudo são determinados e identificados em termos das práticas, configurações de objetos e processos matemáticos. As relações e restrições institucionais que condicionam o

processo de estudo é observado. Nesta pesquisa, abordamos as características e evolução do objeto matemático de investigação didática (Integral Definida) e utilizamos as configurações epistêmicas da Integral, conforme Crisostomo (2012), que contempla a diversidade de significados que esse conceito pode ter, de acordo com suas diferentes estruturas institucionais e contexto de uso;

- b) cognitiva – os significados pessoais (sistema de práticas realizados por uma pessoa) em diferentes momentos do processo de estudo são descritos, em termos das práticas pessoais, configurações cognitivas dos objetos e processos matemáticos. Na pesquisa, essa faceta está relacionada às dificuldades que os estudantes enfrentam ao resolver problemas relacionados com o conceito de Integral Definida; como esses estudantes aprendem, fundamentam e entendem esse conceito, progredindo em suas aprendizagens;
- c) afetiva – a sensibilidade do processo aos aspectos afetivo, emocional, atitudinal e nas crenças acerca dos objetos matemáticos e no processo de estudo em desenvolvimento é analisada. Procuramos, na implementação da proposta didática sobre Integral Definida, a identificação desses aspectos;
- d) interacional – está relacionada ao ensino do tema em estudo, organização e gestão das tarefas que contemplam as características operacionais do sistema de práticas, em que são propostas situações-problema que buscam enriquecer o campo de práticas abordadas acerca dos conceitos. No planejamento e implementação da proposta didática sobre Integral Definida, foram analisados os padrões de interação (professor, estudante, sequência de atividades) orientados para a compreensão dos significados da Integral Definida em estudo;
- e) mediacional – são descritos os recursos técnicos (previstos ou utilizados), assim como a utilização do tempo destinado às ações e processos realizados, como também a identificação dos agentes participantes e o seu papel. Nesta pesquisa, atentamo-nos para o conhecimento dos recursos (tecnológico, material e temporário) para potencializar a aprendizagem de conceitos inerentes à Integral Definida;
- f) ecológica – as relações entre conteúdo matemático e outras disciplinas, além das restrições institucionais que condicionam o processo de estudo é observado. No contexto desta pesquisa, destacamos a relação existente entre o Cálculo Integral e outras áreas do conhecimento, como Física e Biologia.

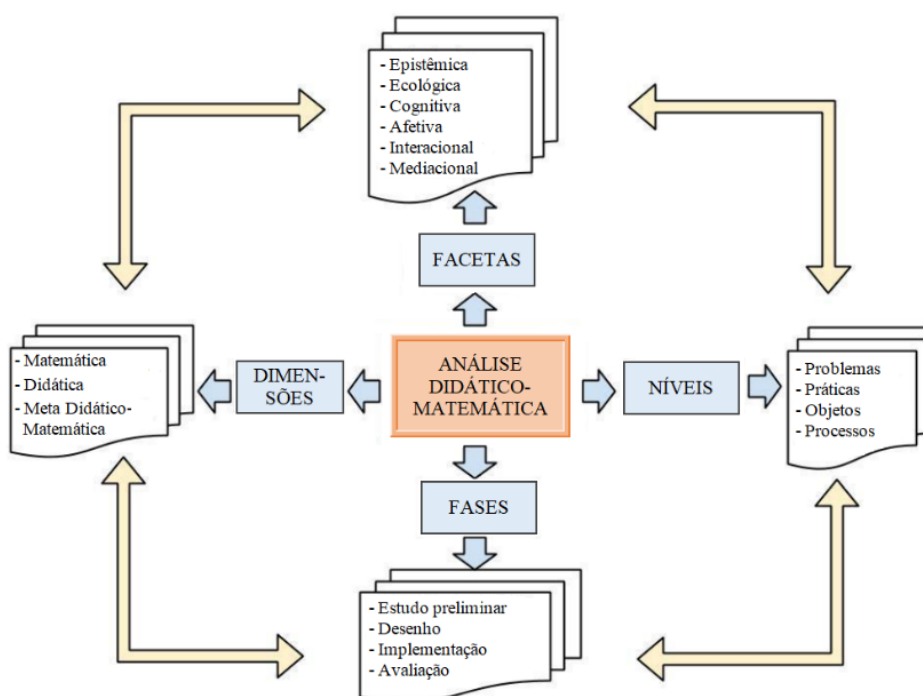
Os aspectos da Engenharia Didática articulada às ferramentas do EOS nos forneceram uma estrutura lógica de ações que nos permitiu articular elementos ontossemióticos, na

orientação consistente do desenvolvimento de uma proposta didática que compõe situações, por meio das quais seja possível a interação entre estudantes, professor e mídia, destacando o papel de cada um desses na construção do conhecimento da Integral Definida.

Optamos por abordar em cada uma das fases (estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação) as facetas do EOS aglutinadas, conforme sugere Godino *et al.* (2014): epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional (interacional e mediacional); sendo que, na faceta epistêmica-ecológica, são assumidos os pressupostos antropológicos e socioculturais da atividade matemática; na faceta cognitiva-afetiva, são adotados os pressupostos semióticos e, na faceta instrucional, assume-se uma perspectiva socioconstrutivista (GODINO, 2011). Essas facetas são consideradas em vários níveis: as práticas ou ações dos agentes envolvidos, as configurações dos objetos intervenientes, as regras que condicionam e apoiam o desempenho das práticas e a avaliação da adequação da proposta didática.

Em Godino (2014), é apresentada a Figura 7, que retrata os focos de atenção da análise didático-matemática proposta no modelo teórico CDM, em que as fases (estudo preliminar, desenho, implementação, avaliação), as dimensões (Matemática, Didática e Meta Didático-Matemático), as facetas (epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, interacional e mediacional) e os níveis (problemas, práticas, objetos e processos) propostos no EOS se articulam.

Figura 7 – Focos de atenção para análise didático-matemático



Fonte: Adaptado de Godino, 2014, p. 7 (tradução nossa)

Nessa imagem, é destacada como foco central do EOS a análise didático-matemática, sendo relacionada com as três dimensões do modelo CDM: 1) matemática (inclui as categorias de conhecimento de conteúdo comum e *conhecimento ampliado do conteúdo*); 2) didática (inclui as facetas do conhecimento – epistêmica, cognitiva, afetivo, mediacional, interacional e ecológica; 3) metadidático-matemática (referente aos conhecimentos necessários para refletir sobre a própria prática e avaliar a adequação didática dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática).

Na seção seguinte, apresentamos detalhes da metodologia de pesquisa utilizada, incluindo uma descrição de seu contexto.

4.3 Metodologia, participantes e contexto da pesquisa

A investigação desenvolveu-se no âmbito da formação inicial de professores de Matemática na Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES, no *campus* Montes Claros (MG), com o estudo de Integral Definida.

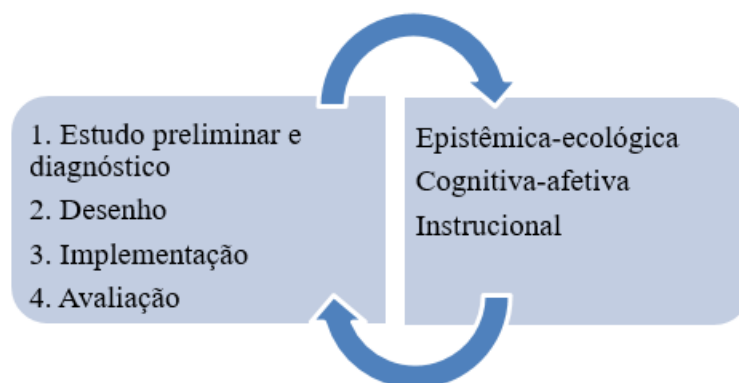
Os participantes são estudantes de uma turma do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática. Essa turma era composta por trinta e três estudantes, que foram convidados a participar do experimento de ensino. A escolha dessa turma se deu pelo fato de esses estudantes já terem estudado, no período anterior, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, na qual são abordados, conforme ementa curricular, os conceitos de funções, limites, derivadas, integral indefinida (técnicas de integração) e definida, integrais impróprias.

Dos estudantes convidados, dez aceitaram participar do experimento. Todos concordaram e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)¹⁷. Os participantes da pesquisa foram aprovados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, exceto um deles que cursou essa disciplina duas vezes, tendo sido reprovado na primeira tentativa; os demais não obtiveram reprovação.

A metodologia desenvolvida para esta pesquisa compreende as quatro fases da Engenharia Didática articuladas às dimensões e facetas do EOS (Figura 8).

¹⁷ Número do Processo: 29200720.8.0000.5482; Número do Parecer: 3.943.407.

Figura 8 – Fases de desenvolvimento da proposta didática



Fonte: A autora, 2021

Nas seções seguintes, mostramos como essas fases foram utilizadas na edificação metodológica desta investigação.

4.4 Procedimentos metodológicos para estudo preliminar diagnóstico (Fase 1)

Na Fase 1, realizamos o Estudo Preliminar e Diagnóstico, que foi marcado por reflexões de nossa vivência profissional nos campos da docência e da pesquisa em Cálculo Diferencial e Integral. Incluímos um estudo exploratório acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, organizando a apresentação da revisão de literatura, considerando três categorias: epistêmica-ecológica (estudos e investigações que consideram o conhecimento didático-matemático de acordo com os significados institucionais no currículo da Licenciatura em Matemática), cognitiva-afetiva (estudos e investigações que consideram as possibilidades e dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem, buscando compreender como se desenvolvem os significados pessoais alcançados pelos estudantes) e instrucional (que reflete acerca dos padrões de interação entre professor, estudantes e sequência de ensino, destinada à construção e negociação de significados).

Dessa forma, procuramos sintetizar pesquisas que abordavam conceitos da Integral Definida e seu ensino e que nos ajudassem na caracterização de aspectos dos conhecimentos e competências envolvidos em cada uma das facetas ou dimensões propostas no modelo CDM, para desenvolvimento de uma proposta didática que possibilitasse a mobilização desses aspectos.

Ressaltamos que a descrição e reflexões advindas desse Estudo Preliminar, particularmente questões relacionadas à natureza cognitiva (concepções de estudantes, esquemas cognitivos, tipos de erros, entre outros aspectos) e instrucional (estratégias e

alternativas para o ensino da Integral Definida) estão destacadas no Capítulo 5.

4.5 Procedimentos metodológicos para o desenho da proposta didática (Fase 2)

A Fase 2 propõe que o professor defina o tema, determine o público-alvo, adapte o processo educativo ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes, proponha e desenvolva os objetivos, estratégias de avaliação e processo de revisão. O processo instrucional deve ser apropriado, ou seja, deve satisfazer várias condições para que atenda tanto os objetivos curriculares quanto o desenvolvimento das competências matemáticas pelos estudantes.

Na pesquisa, essa fase consistiu na concepção de uma proposta didática, composta por um sistema de práticas sobre o objeto matemático da investigação didática (Integral Definida). Realizamos a seleção e adaptação das situações-problema e o sequenciamento das atividades, construindo uma configuração para aplicação durante os encontros formativos.

O desenho da proposta didática, como também a coleta e análise dos dados para essa investigação foram fundamentados nas facetas epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional (mediacional e interacional) do EOS.

Concernente à faceta epistêmica-ecológica, consideramos, na construção da proposta didática, alguns significados institucionais da Integral Definida, definidos a partir das configurações epistêmicas da Integral, propostas por Crisostomo (2012), considerando as observações referentes à gênese e desenvolvimento desse tópico matemático, sua diversidade e contextos de aplicação e utilização. Também consideramos a abordagem que está prevista para esse tópico matemático na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática em que a proposta didática foi implementada. Para esse aspecto, realizamos uma leitura minuciosa do Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática a fim de conhecer o perfil esperado do estudante ao final da graduação e, nomeadamente, do programa, da ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em que o tópico de Integral Definida é estudado; dos livros que compõem a bibliografia básica e complementar, observando o enfoque, a profundidade, as aplicações e a notação dos conteúdos matemáticos requeridos.

A faceta cognitiva-afetiva esteve relacionada à reflexão acerca das características e dificuldades dos indivíduos, consideradas a partir de nossa experiência como professora de Cálculo e partindo das reflexões realizadas no Estudo Preliminar, realizado na Fase 1. As diversas estratégias de ensino e teorias educacionais utilizadas pelos pesquisadores, aludidos neste estudo, auxiliaram-nos na elaboração da estrutura do desenho (faceta interacional). Os

detalhes referentes a essa abordagem estão descritos no Capítulo 6.

A proposta didática foi articulada para desenvolver as categorias de conhecimento didático-matemático do professor: *conhecimento comum do conteúdo* (CCC) – elementos básicos da Integral Definida (conceito, definição e procedimentos); conhecimento avançado do conteúdo (CAC) – aplicações em contextos intra e extramatemáticos (na interdisciplinaridade) e *conhecimento especializado do conteúdo* (CEC) – conhecimento que os professores podem ter para ensinar os conteúdos matemáticos, como conhecimentos tecnológicos voltados para a informática educativa, ou seja, uso do computador e suas ferramentas (*softwares, applets, sites*, objetos de aprendizagem), como recurso pedagógico a ser utilizado pelo professor.

Godino, Batanero e Font (2008) ressaltam que o ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática: (a) como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, (b) como linguagem simbólica e (c) como sistema conceitual, logicamente organizado. Nessa perspectiva, contemplando esses aspectos, apresentamos as características do desenho da proposta didática:

- a) tem como objetivo levar o estudante à assimilação gradativa de conceitos e sua abstração – cada situação-problema é apresentada como uma situação de ação, formulação, validação ou institucionalização, potencializando a mobilização de processos matemáticos duais, previstos no EOS, relacionados à realização das práticas matemáticas, como: generalização-particularização, institucionalização-personalização, representação-significação, decomposição-reificação, idealização-materialização, comunicação, definição, enunciação, argumentação, algoritmização e problematização; observando as características inerentes às facetas abordadas no EOS.
- b) parte de situações-problema, convenientemente selecionadas – cada uma das atividades busca mobilizar o conhecimento acerca de alguns significados de referência (relacionado aos sistemas de práticas dos especialistas) da Integral Definida, apresentados como configurações epistêmicas (intuitiva, geométrica, soma, aproximada, extramatemática, acumulada e tecnológica), conforme Crisostomo (2012), especificadas adiante;
- c) considera a inserção das tecnologias digitais, com o GeoGebra – essa escolha se deu pelo fato de esse *software* ser gratuito, apresentando versões para computador e *smartphone* e se constituir em uma ferramenta com potencial para a compreensão de conceitos matemáticos, haja vista sua forma prática de acesso e de dinâmica na exploração das várias representações dos objetos matemáticos. Além disso, existe um

*site*¹⁸ oficial com materiais de apoio, inclusive com materiais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral;

- d) permite a coleta de dados, considerando a organização das tarefas em configurações didáticas e a análise com base nas facetas do EOS (epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional) que nos permitiu identificar as competências e os conhecimentos didático-matemáticos dos participantes da pesquisa quando submetidos à análise, resolução e discussão das atividades.

As noções de sistemas de práticas e configuração de objetos e processos (GODINO; BATANERO, FONT, 2008; FONT; GODINO; GALLARDO, 2013) nos propuseram suporte teórico para a seleção das situações-problema, em que procuramos refletir acerca das seguintes questões:

- a) Que tipos de situações-problema poderiam mobilizar o conhecimento didático-matemático, a partir dos processos cognitivos previstos no EOS?
- b) Quais características e meios poderiam ser usados para motivar a autonomia do estudante na compreensão do conhecimento específico referente ao objeto matemático de investigação didática?
- c) Quais as configurações e processos matemáticos deveriam ser, potencialmente, ativados nas práticas matemáticas, necessárias para resoluções das situações-problema propostas?
- d) Que tipos de situações-problema poderiam ter seus processos de resolução diversificados, alicerçados no uso das tecnologias digitais, em especial, do *software* GeoGebra?

Tal proposta está apresentada no Capítulo 6, no qual está detalhada a Fase 2, que também inclui uma análise ontossemiótica de cada uma das atividades que compõem a proposta didática, explicitando os objetos primários que compõem uma configuração de objetos no EOS (problemas, linguagens, conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos) contemplados nas atividades.

Apresentamos, na seção seguinte, as escolhas macro e microdidáticas consideradas no desenho da proposta didática.

¹⁸ Disponível em: <https://www.geogebra.org>.

4.51. Escolhas Macro e Microdidáticas

As ferramentas do EOS nos ancoraram na elaboração das situações-problema, nas quais os estudantes pudessem mobilizar ou desenvolver conhecimentos e competências didático-matemáticos, na efetivação de processos cognitivos auxiliados pelo uso do ambiente computacional. Para cada atividade produzida, buscamos abordar os objetos primários propostos no EOS (problemas, linguagens, conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos).

As investigações empreendidas acerca das dimensões epistemológicas, didáticas e cognitivas da Integral Definida, contempladas no Estudo Preliminar, conduziram-nos às escolhas macro e microdidáticas, segundo Artigue (1996), que guiaram a construção da proposta didática.

As variáveis microdidáticas englobam a elaboração da proposta didática, afetando sua organização. Destacam-se, por exemplo, o uso de situações-problema como detonadora de cada uma das atividades, o uso das tecnologias digitais, a organização dos estudantes na implementação da proposta didática, como também a organização temporal de implementação dessa, entre outros aspectos, que detalhamos a seguir:

- a) articulação das representações nos registros gráfico, algébrico, numérico, abordando as limitações cognitivas e didáticas relacionadas ao registro gráfico;
- b) utilização de situações-problema, colocadas no início de cada atividade, abordando aplicações da Integral Definida em contextos intra e extramatemáticos;
- c) apresentação da Integral Definida, facilitando a compreensão dos conceitos e o estabelecimento de relações explícitas com conhecimentos prévios;
- d) familiarização com os símbolos utilizados na institucionalização dos conceitos;
- e) organização da aplicação das atividades em duplas de estudantes e condução do processo de experimentação, sendo observado o tempo disponibilizado para a implementação de cada sequência de atividades;
- f) estímulo ao desenvolvimento da autonomia do estudante quanto à compreensão da definição formal da Integral de Riemann para funções de uma variável real;
- g) uso das ferramentas do GeoGebra, nas perspectivas bidimensional e tridimensional;
- h) desenvolvimento de competências, quanto à utilização do GeoGebra, como ferramenta auxiliar para a resolução de problemas que envolvem Integral Definida.

Quanto às variáveis microdidáticas da pesquisa, essas fazem referência à organização de uma seção ou de uma fase e perpassa a construção das atividades que compõem a proposta

didática. Estão relacionadas ao planejamento específico de cada uma das atividades e seus componentes: situações-problema, linguagens, regras (definições, proposições e procedimentos), argumentos e relações. Assim, consideramos aspectos ligados diretamente a cada uma das atividades:

- a) a contextualização utilizada se refere às aplicações da Integral Definida em algumas áreas do conhecimento: a própria Matemática, a Física (movimento e termodinâmica), a Biologia;
- b) o domínio de conceitos abordados em cada uma das atividades – a noção de infinito, de somatório, o cálculo de medida de área de figuras planas, entre outros;
- c) o domínio de proposições/propriedades e teoremas (Soma de Riemann, Teorema Fundamental do Cálculo, entre outros), mobilizado em cada uma das atividades;
- d) familiaridade dos estudantes com a representação (em língua natural, em linguagem matemática, em linguagem informatizada);
- e) conversão de representações entre registros com apoio do *software* GeoGebra, como forma de minimizar os procedimentos algébricos, bem como operações aritmetizadas e facilitar a análise do conhecimento obtido na transição das representações.

Apresentamos, na próxima seção, os procedimentos metodológicos que utilizamos para a implementação da proposta didática.

4.6 Procedimentos metodológicos para implementação da proposta didática (Fase 3)

O processo educativo de um conteúdo ou tema matemático se desenvolve em um tempo dado, mediante uma sequência de configurações didáticas. Na formação de professores, na perspectiva do EOS, esse processo pode ser descrito por meio da noção de configurações e trajetórias didáticas. O período entre o início e a finalização de uma atividade ou resolução de uma situação-problema compreende, nesse enfoque, uma configuração didática; a sequência das configurações didáticas constitui uma trajetória didática. As configurações didáticas e cognitivas, relacionadas às trajetórias didáticas e ao sistema de práticas consideradas na fase do desenho, manifestam-se na fase de implementação.

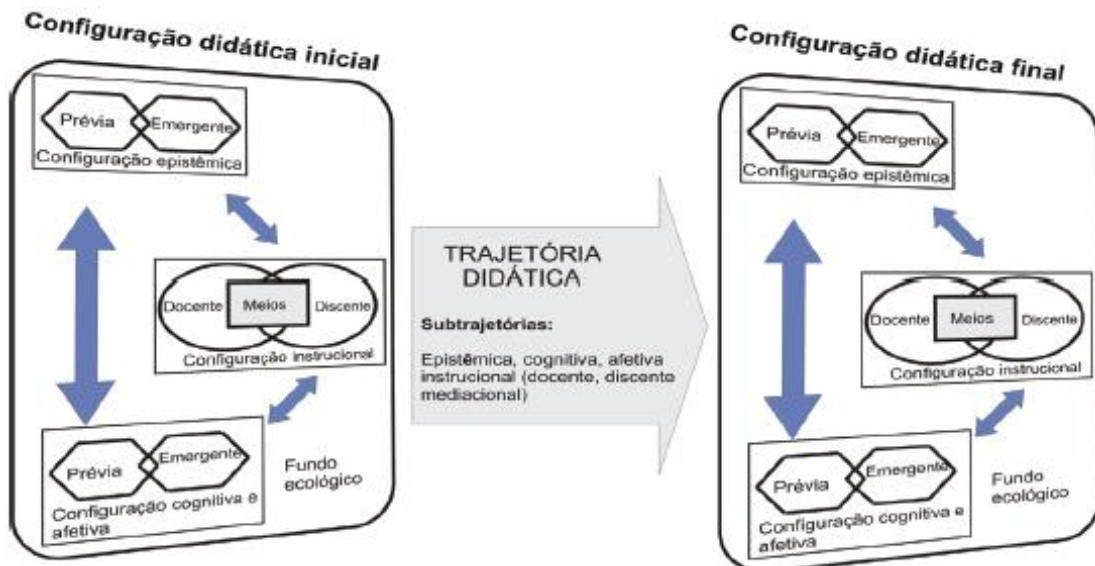
Para implementação da proposta didática, realizamos uma pesquisa de campo com dez estudantes do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, no período de 11 de março a 01 de junho do ano de 2020. Como já mencionado, a opção pelos estudantes dessa turma foi motivada por esses já terem estudado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, o que possibilita a mobilização de conhecimentos

prévios relevantes para o estudo da Integral Definida.

Em cada uma das atividades dispostas, os objetos estão relacionados entre si. Dessa forma, na implementação da proposta também são consideradas as configurações didáticas e sua sequência (trajetórias didáticas) que abordam as facetas epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional (interacional e mediacional).

Os sistemas de práticas e as configurações são propostas como ferramentas teóricas, cujo objetivo é descrever os conhecimentos matemáticos na sua versão dupla: pessoal e institucional. As interações entre estudantes, entre professora-pesquisadora e estudantes, e entre estudantes e recursos didáticos, previstas na Fase 2 (desenho), são destacadas na Figura 9, elaborada por Godino, Batanero e Font (2008). Tal figura evidencia que a trajetória didática que se realiza em um fundo ecológico influencia, mediante configurações epistêmicas, instrucionais, cognitivas e afetivas, nas aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo.

Figura 9 – Interações didáticas



Fonte: Godino, Batanero e Font, 2008, p. 21

Godino, Contreras e Font (2006), valendo-se das interações que podem ser estabelecidas, descrevem quatro tipos de configurações didático-teóricas de referência: magistral, a-didática, dialógica e pessoal, conforme especificado no Quadro 5.

Esses pesquisadores consideram que à medida que as tarefas ou problemas vão sendo abordados, a configuração didática em ação pode ser alterada. Ainda afirmam que uma mesma configuração didática, que está em prática em um determinado momento, pode apresentar traços ou características de mais de um tipo de configuração didático-teórica, ou seja, uma mesma

configuração didática pode apresentar mais de uma classificação ao ser comparada com as configurações teóricas de referência.

Com efeito, durante a realização das atividades da proposta didática, foi possível verificar alguns padrões de interação em ação, tendo características das distintas configurações didáticas e, com evidência, da configuração dialógica – trabalho autônomo dos estudantes na busca das distintas formas de resolução das situações-problema propostas; intervenções magistrais, com pouca ênfase, apenas quando eles apresentavam alguma dúvida na interpretação das tarefas; cooperação entre estudantes e professora. Cada subintervalo de atividade em que acontece um desses padrões é denominado de *subconfiguração didática* – noção que permite uma análise pormenorizada das configurações e trajetórias didáticas, tornando possível revelar a associação entre os distintos padrões de interação.

Ressaltamos que a configuração dialógica ficou notória na implementação da proposta didática, uma vez que os estudantes expuseram sua relação com os objetos matemáticos, o que permitiu a obtenção de indicadores explícitos dessas relações.

Quadro 5 – Configurações didáticas

Configuração Didática	Características
magistral	Refere-se à apresentação do conteúdo pelo professor, seguida de exercícios de aplicação dos conhecimentos e saberes apresentados.
a-didática	Quando o estudante, ou grupo de trabalho, assume a responsabilidade do trabalho matemático – em concordância com o professor – explorando as possíveis técnicas de solução, formulação, comunicação e validação, ou seja, se encontram em um processo de busca autônoma.
dialógica	Fundamentada no diálogo entre o professor e estudantes, esses têm a oportunidade de assumir a tarefa, familiarizar-se com ela e esboçar alguma estratégia de solução.
peçoal	Quando a resolução do problema, ou conclusão de uma tarefa, é feita pelo estudante, sem a intervenção direta do professor – na prática, quando os estudantes resolvem exercícios, propostos pelo professor ou pelo livro didático, e são preparados para resolvê-los.

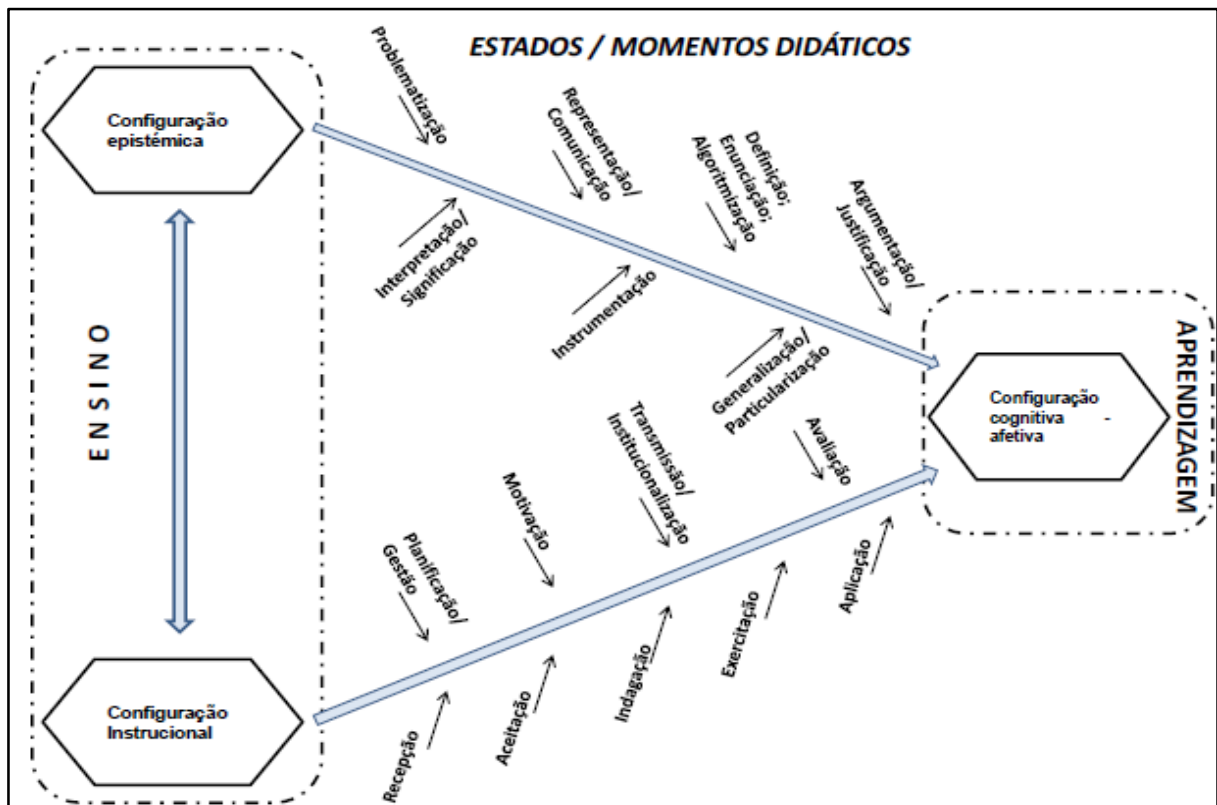
Fonte: Adaptado de Godino, Contreras e Font, 2006

A Figura 10 resume os componentes e a dinâmica das configurações que relacionam ensino e aprendizagem com os processos matemáticos, ligados à modelagem ontossemiótica do conhecimento matemático. Está evidenciado, nessa figura, que as interações entre as configurações são cíclicas, permeando os momentos didáticos, as práticas matemáticas e didáticas.

As interações apresentadas condicionam as intervenções didáticas. Há processos relacionados às configurações epistêmicas e instrucionais que são condicionados pela trajetória

cognitiva, que produz exemplos, significados, argumentos que condicionam o processo de estudo. Essas interações serão explicitadas no Capítulo 7.

Figura 10 – Componentes e dinâmica interna de uma configuração didática



Fonte: Godino, 2014, p. 31 apud Carvalho, 2017, p. 3819

A implementação (Fase 3, da Figura 8) deste estudo constou de dois encontros presenciais e três encontros remotos com os estudantes da Licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa.

a) Encontros presenciais

Foram aplicadas, presencialmente, as duas atividades da Unidade 1 da proposta didática – Atividade 1: Introdução à Definição de Integral de Riemann; Atividade 2: Aprimorando a compreensão do conceito de Integral Definida. Estando matriculados no curso de Licenciatura em Matemática no período noturno, os estudantes desenvolveram as atividades presenciais no turno vespertino, em um laboratório de informática da Universidade Estadual de Montes Claros,

¹⁹ GODINO, J. D. *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Granada: Universidad de Granada, 2014, p. 31 apud Carvalho, 2017, p. 38

onde atuamos como professora. Foi utilizado o *software* GeoGebra Classic 5.0, instalado nos computadores do laboratório.

A fase de experimentação inicial ocorreu em um encontro realizado no dia 11 de março de 2020, em que dez estudantes, organizados em cinco duplas, realizaram a Atividade 1. O encontro durou 3 horas/aula. As duplas foram formadas pelos próprios estudantes, conforme suas afinidades de relacionamento.

A Atividade 2 foi realizada no segundo encontro presencial, no dia 13 de março de 2020. Fizeram essa atividade nove dos dez estudantes que participaram da primeira atividade. Um deles justificou a ausência por não ter disponibilidade para participação no dia e horário agendados.

A realização das atividades pelos estudantes foi observada por nós e por um acadêmico de Iniciação Científica Voluntária, que auxiliou os estudantes na operacionalização do *software* e contribuiu para com as anotações das observações ocorridas durante a aplicação da atividade, como as dúvidas indicadas pelos estudantes e impressões acerca das ações desses para posterior análise.

b) Encontros remotos

Em razão da suspensão das aulas presenciais, ocasionada pela prevenção ao contágio da COVID-19, a aplicação das demais atividades ocorreu remotamente.

Assim, contatamos os dez estudantes que fizeram as primeiras atividades, por meio do aplicativo de mensagem *WhatsApp*. Ressaltamos que o grupo, nesse aplicativo, foi criado no início da implementação da proposta didática para facilitar a comunicação entre os participantes da pesquisa.

Utilizamos um recurso digital para a realização de reuniões virtuais, assim, os estudantes foram convidados a realizar remotamente as atividades seguintes. Seis dos dez estudantes manifestaram a disponibilidade em realizar essas atividades, os demais justificaram não poder participar pelo fato de não terem os recursos digitais necessários, quais sejam, computador e conexão à internet. Solicitamos aos estudantes, que responderam positivamente, a instalação em seus computadores do aplicativo GeoGebra *Classic*, versão 5.0.

Em 1º de junho de 2020, aconteceu um encontro remoto com os participantes da

pesquisa, por meio do aplicativo *Google Meet*²⁰. Nesse encontro, foi realizada a Atividade 3: Aplicações da Integral Definida na Física (Problemas de Movimento). Esse encontro teve duração de 4 horas/aula, com a participação de seis estudantes que realizaram a atividade.

Para os encontros remotos, similar aos encontros presenciais, tivemos a participação do acadêmico de Iniciação Científica que prestou suporte técnico e auxiliou nos registros das interações ocorridas durante a implementação das atividades. Os dados da pesquisa se constituíram de todos os protocolos audiovisuais, escritos e digitais dos encontros realizados.

Esclarecemos que os diálogos foram basilares para análise das respostas apresentadas, sendo transcritos e textualizados, possibilitando a reflexão das interações entre estudantes, professora-pesquisadora e acadêmico de Iniciação Científica.

No entendimento de Garnica (2007, p. 55), a transcrição é a passagem dos dados do magnético ou digital para o papel; a explicitação dos diálogos por meio dos caracteres gráficos; é o registro escrito do momento da entrevista que, posteriormente, passará por outros tratamentos. A próxima fase é a textualização, quando ocorre a atribuição de significado, em que o pesquisador analisa os dados coletados, já no papel, menos tecnicamente do que na transcrição, e pode optar por níveis de textualização: eliminação de repetições desnecessárias e vícios de linguagem; preenchimento de lacunas latentes, com o intuito de melhorar a fluência da leitura do depoimento; junção de perguntas e respostas para construção de um texto de leitura fluida e reorganização da sequência do texto cronológica ou tematicamente; podendo optar por criar uma situação (que pode, inclusive, ser fictícia), com base nas informações disponíveis na transcrição.

Para realização do tratamento das informações obtidas nos diálogos presentes na implementação das práticas, primeiramente, elaboramos um texto escrito correspondente à transcrição, aproximando o tanto quanto possível do material gravado, com o intuito de registrar, fielmente, os detalhes das comunicações ocorridas na realização das práticas. Após a transcrição, optamos por apenas excluir do depoimento transcrito os vícios de linguagem e preencher algumas lacunas, visando tornar a leitura mais fluente.

Esclarecemos, ainda, que os dados presentes no arquivo digital da construção de cada atividade no GeoGebra e as gravações das reuniões virtuais, realizadas por meio do aplicativo *Google Meet*, também foram basilares para análise dos resultados desta investigação.

Os seguintes elementos estiveram disponíveis como instrumentos de coleta de

²⁰ *Hangouts Meet* é um aplicativo do *Google* para Android, iOS e Web que oferece chamadas de vídeo pelo celular ou computador. Com uma interface simples, o app permite conversar com até trinta pessoas ao mesmo tempo e oferece integração com agenda de compromissos para sincronizar reuniões programadas.

informações, tanto nas reuniões presenciais quanto nas reuniões realizadas remotamente:

- registro das observações da professora-pesquisadora e do acadêmico de Iniciação Científica sobre as diferentes instâncias do trabalho em sala de aula (presencial ou remota): ação em dupla e coletiva, ação individual, diálogos e compartilhamentos;
- gravação em áudio ou em vídeo de todas as sessões de realização da proposta didática, favorecendo a interpretação das observações gravadas e o desenvolvimento da proposta na fase da análise *a posteriori* – os dados coletados foram transcritos e comparados com as anotações realizadas, com o intuito de registrar fielmente todos os detalhes dos diálogos ocorridos nos encontros presencial ou remoto. Após a transcrição, optamos por apenas excluir do depoimento transcrito os vícios de linguagem e preencher algumas lacunas, visando melhorar a fluência da leitura do texto;
- respostas registradas (manual ou digitalmente) das atividades dos estudantes realizadas nos encontros;
- registros do arquivo do *software* GeoGebra, usado para análise dos encontros realizados presencial e remotamente.

Sobre as atividades resolvidas, foram realizadas análises *a priori* em que relatamos os objetivos, ações, comportamentos, dificuldades e aprendizados esperados dos estudantes; as habilidades e conhecimentos prévios manifestados na realização das atividades; conhecimentos matemáticos e extramatemáticos envolvidos; processos cognitivos mobilizados e identificação dos objetos matemáticos primários abordados (conceitos, proposições, procedimentos e argumentos).

Nossa atuação como professora-pesquisadora durante a realização dos experimentos foi a de agente no processo de formação do conhecimento o qual deve auxiliar o estudante na mobilização dos processos cognitivos, por meio de atos que promovam reflexões, e identificar conflitos semióticos potenciais – que podem ser identificados *a priori* – e, por outra parte, resolver os conflitos produzidos durante o processo educativo.

Ressaltamos que o detalhamento das configurações e trajetórias didáticas, segundo Godino (2014), observadas em cada uma das atividades, como também as análises *a priori* e *a posteriori* das práticas realizadas são apresentadas no Capítulo 7.

4.7 Procedimentos metodológicos para avaliação da proposta didática (Fase 4)

Um olhar cauteloso e pormenorizado sobre os objetos compreendidos na sequência de atividades foi realizado na utilização da técnica de análise ontossemiótica proposta pelo EOS, que possibilitou avaliarmos os resultados da proposta didática presente nesta tese, permitindo-nos descrever o que aconteceu, por que aconteceu e avaliar o que poderia ser aprimorado no processo de formação realizado.

Para a fase de avaliação das atividades, verificamos a relevância da proposta didática e indicações de aperfeiçoamento do desenho e implementação dessa. O EOS dispõe da ferramenta adequação (ou idoneidade) didática, cujo objetivo é identificar possíveis contribuições para um processo educativo da Matemática, avaliando o grau de adequação didática para cada uma das seis facetas propostas (GODINO *et al.*, 2006). O principal resultado é uma avaliação fundamentada da adequação didática, do processo instrucional implementado, e uma explicação das dificuldades de aprendizagem dos estudantes, que será apresentada adiante. Também, nesta fase, foi avaliado o papel desempenhado pelo *software* GeoGebra na realização das atividades, dos estudantes, e seu impacto no processo de aprendizagem.

O contraste entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, tomados como aspectos de uma Engenharia Didática, proporcionou elementos de avaliação não só da própria Engenharia, mas também, do nível de aprendizagem. Assim, foi possível apontar a adequação geral do conjunto das configurações didáticas que compõem toda a proposta didática, visando responder à questão de investigação proposta.

A concepção, implementação e avaliação dos processos de formação de professores podem ser orientados pelas seis dimensões da Adequação Didática proposta por Godino (2009), articuladas coerente e sistemicamente. Compreendendo que, muitas vezes, torna-se difícil avaliar a adequação didática em um processo de ensino da Matemática, haja vista que em alguns casos as dimensões e componentes não podem ser observáveis diretamente; Godino e colaboradores apresentam uma descrição de indicadores empíricos (GODINO *et al.*, 2013), que, inclusive, guiou-nos na fase avaliativa do experimento implementado nesta pesquisa, e que destacamos a seguir.

a) Adequação Epistêmica

A adequação epistêmica se refere ao conteúdo didático-matemático a ser ensinado do ponto de vista institucional. A adequação dessa faceta é alcançada, na formação de professores,

quando o processo formativo inclui, além de uma discussão da prática educativa da Matemática, previsão, organização da compreensão e domínio do *conhecimento especializado do conteúdo matemático*, que possibilitem a implementação de processos educativos da Matemática.

É necessário que o futuro professor assuma uma forma de entendimento plural da Matemática, que articula o funcional e o linguístico, o estrutural e o argumentativo, destacando a importância da mobilização de diversos tipos de problemas (contextualizados, com diferentes níveis de dificuldade e de situações geradoras); uso de diferentes modos de expressão (verbal, gráfico, simbólico, entre outros) e de traduções e conversões, entre eles; garantia de que o nível da linguagem matemática esteja adequado; e que as definições e procedimentos sejam claros e corretamente declarados e adaptados ao nível educacional a que são direcionados; garantia de que os enunciados e procedimentos do tema em estudo sejam apresentados e que as explicações, verificações e demonstrações matemáticas estejam adaptadas ao nível educacional a que são direcionados; estabelecimento de relações e conexões significativas entre as definições, propriedades, problemas do tema estudado, para o nível educacional em que o professor realiza seu trabalho (conhecimento comum) e o tratado no "horizonte matemático" correspondente, ou seja, a articulação com o nível educacional subsequente.

b) Adequação Cognitiva

Na formação docente, é essencial considerar o nível de conhecimentos prévios dos futuros professores. A adequação cognitiva, nesse contexto, deve incluir tal conhecimento, como também a compreensão das competências previamente explicitadas como expectativas de aprendizagem do conteúdo didático-matemático, por exemplo, compreensão das formas de raciocínio, das dificuldades apresentadas pelos estudantes e da análise dos significados pessoais que os estudantes podem apresentar, em face do trabalho com um tema específico da Matemática. Outro componente que também deve ser contemplado são as adaptações curriculares às capacidades individuais dos professores em formação.

c) Adequação Afetiva

A adequação afetiva na formação docente compreende o conhecimento e a compreensão do futuro professor sobre o papel dos interesses, necessidades, atitudes e emoções no aprendizado matemático, o que contribuirá para uma competência na criação de ambientes e de condições que motivam o aprendizado.

A motivação na formação inicial docente poderá ser potencializada diante da seleção de casos para análise e implementação em atividades relacionadas à futura ou atual prática profissional do professor. Desse modo, os processos instrucionais procuram contemplar a possibilidade de desenvolver habilidades de pesquisa, seleção e adaptação de tarefas e situações que sejam de interesse dos professores em formação, o que poderá motivá-los a uma adequada conexão entre teoria e prática em suas práticas profissionais futuras, despertando compromisso, autoestima e participação em seus estudantes. Importante também ressaltar a discussão acerca do componente das crenças e valores dos professores em formação sobre a disciplina Matemática e seu ensino, que deve permear o programa formativo, objetivando progressos.

d) Adequação Interacional

A formação docente deve contemplar o desenvolvimento de competências comunicativas nos futuros professores, reconhecendo a importância do diálogo e da comunicação no aprendizado da Matemática, na observação da comunicação adequada do conteúdo matemático, no conhecimento dos diferentes tipos de interação (dialética entre autonomia estudantil e institucionalização), na avaliação formativa da aprendizagem. Essas competências devem ser consideradas no desenho e na implementação do plano formativo a fim de possibilitar a identificação de dificuldades e resolução de conflitos de significados que estejam relacionados à interação na sala de aula.

e) Adequação Mediacional

Para que haja uma adequação mediacional satisfatória na formação de professores, essa busca fazer com que o futuro professor mobilize recursos manipulativos e tecnológicos (informáticos, audiovisuais, fóruns e plataformas virtuais) de maneira apropriada nos processos instrucionais, destacando suas possibilidades e limitações, como também o desenvolvimento da competência relacionada à gestão do tempo de ensino. Essas competências se relacionam com *conhecimento especializado do conteúdo* e das expectativas de aprendizagem.

f) Adequação Ecológica

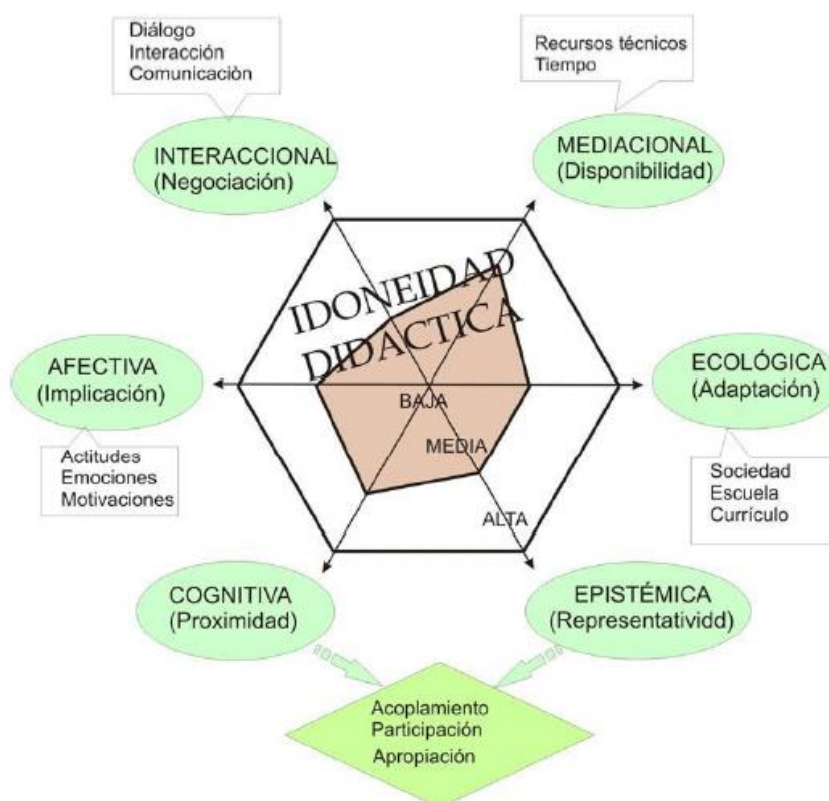
Para uma adequação ecológica satisfatória, é procedente observar que o conteúdo, sua implementação e avaliação correspondam ao currículo previamente estabelecido; o *design* e

implementação das ações formativas procuram considerar os resultados de pesquisas sobre formação docente, em particular o uso de tecnologias digitais. Os conteúdos e atividades formativas contribuem para a formação e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática, dispendo de relações com outras áreas do conhecimento de maneira interdisciplinar; a formação em valores democráticos e o pensamento crítico.

Também realizamos, nesta fase, uma comparação entre os significados institucionais *pretendidos* (sistema de práticas planejado), *implementados* (sistema de práticas implementado pelo docente) e os significados pessoais *declarados* (atinentes às práticas expressas, por meio de ações e anotações), *alcançados* (que se relacionam às práticas manifestadas, que são coerentes com a pauta institucional). Esses significados foram previstos no desenho e foram observados na implementação. Também foi possível a reflexão sobre as normas que condicionam o processo instrucional. A análise dos conhecimentos e competências didático-matemáticos mobilizados ou desenvolvidos pelos estudantes ao serem submetidos às atividades e a respectiva adequação didática dessa também aconteceu nessa fase.

Como exemplo de apresentação dos critérios de adequação didática, expomos, na Figura 11, o hexágono regular proposto por Godino (2011).

Figura 11 – Adequação Didática



Fonte: Godino, 2011, p. 6

No hexágono regular, há a representação de um processo de estudo pretendido ou planejado, em que um grau máximo de adequação parcial é assumido, inicialmente. No centro, percebe-se um hexágono interno que representa a adequação que o estudante consegue no desenvolvimento de seu estudo. As facetas epistêmicas e cognitivas foram colocadas na base, considerando que o processo de estudo acontece no desenvolvimento de conhecimentos específicos. Os resultados que envolvem a pesquisa e o hexágono representativo de seus resultados estão descritos no Capítulo 7.

No capítulo seguinte, apresentamos a fase do Estudo Preliminar que nos permitiu demarcar os caminhos da investigação e auxiliou no desenvolvimento da proposta didática. Ressaltamos que, conforme Artigue (1988), cada uma das fases da Engenharia Didática pode ser apresentada, retomada e aprofundada ao longo da investigação, em função das necessidades emergentes. Isso revela que a expressão “preliminar” não implica que, após o início da fase seguinte, não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, referindo-se apenas a um primeiro nível de organização que definimos na estrutura metodológica da pesquisa.

CAPÍTULO 5 – ESTUDO PRELIMINAR

Apresentamos a fase do Estudo Preliminar e Diagnóstico prevista como uma das categorias analíticas do EOS, articulada com a Engenharia Didática. Tal estudo expressa a fase inicial da estrutura metodológica, apresentada no capítulo anterior.

O primeiro passo para desenvolvimento de um programa de estudo no EOS é determinar o que é, epistêmica e cognitivamente, adequado a ser trabalhado no processo educativo da Matemática – esse é o foco nesta fase.

Pretendemos, nesta fase, acentuar a dimensão epistemológica do objeto matemático da investigação didática – Integral Definida– associada às características do saber em jogo; a dimensão cognitiva, com reflexões acerca dos conhecimentos didáticos mobilizados em associação às características cognitivas relativas aos processos de ensino e de aprendizagem quanto às concepções e dificuldades dos estudantes da Licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa.

Identificamos diferentes tipos de pesquisa, dentre as quais destacamos aquelas que se relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, analisando os resultados apresentados pelos pesquisadores, suas contribuições para a didática desse objeto matemático e as indicações para pesquisas futuras.

Ler esses trabalhos possibilitou-nos refletir sobre a constituição dos significados da Integral Definida (institucionais e pessoais) e delimitar caminhos em busca de categorias analíticas.

5.1 Seleção das referências

Selecionamos e analisamos, no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a produção científica que tem por temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. Também realizamos buscas em outras bases de dados de trabalhos científicos, como Google Acadêmico, *sites* dos programas de pós-graduação em Educação Matemática e artigos em periódicos de Educação Matemática.

Verificamos que a literatura, no contexto da Educação Matemática, que aborda os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral é ampla, o que é justificado por Dreyfus e Eisenberg (1990), já na década de 1990, quando afirmam que essa

variedade se deve não só ao fato de o Cálculo ser o ramo da Matemática Avançada ao qual é dedicado o maior tempo em estudos técnico-científicos mas também ao número de problemas não triviais que, normalmente, surgem em seu processo de aprendizagem.

Primeiramente, selecionamos pesquisas, em nível de doutorado, no período de 2014 a 2018, usando a expressão “Ensino de Cálculo Integral”. O filtro foi realizado também pela grande área de conhecimento “Multidisciplinar”, seguido da área de conhecimento “Ensino de Ciências e Matemática”. Obtivemos, no Banco de Teses da CAPES, 839 registros. Desses, selecionamos 176 (cento e setenta e seis) trabalhos pelo título – fizemos a leitura dos títulos desses trabalhos e descartamos aqueles que não tinham relação com a pesquisa, pois mesmo refinando essa busca no Banco de Teses, foram apresentados trabalhos que não tratavam do Cálculo Integral.

Em seguida, fizemos a leitura dos resumos desses 176 trabalhos e então selecionamos as investigações com algum direcionamento, de acordo com seu título e com o seu resumo, para o ensino e a aprendizagem da Integral Definida. Ampliamos a busca, utilizando outras bases de dados, como o *Google Acadêmico*, estendendo o recorte temporal, usando basicamente os mesmos critérios para refinamento da pesquisa. Assim, foram selecionadas quinze pesquisas, conforme Quadro 6.

Quadro 6 – Lista de trabalhos utilizados na revisão bibliográfica

Ano	Autor	Título	Tipo
2006	GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro Santiago	La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.	Tese
2010	RIBEIRO, Marcos Vinícius	O ensino do conceito de Integral, em Sala de Aula, com Recursos da História da Matemática e da resolução de problemas	Dissertação
2011	ANDERSEN, Érika	As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em Matemática	Dissertação
2012	CRISOSTOMO, Edson	Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral em la Formación de Profesores de Matemáticas: una aproximación desde la investigación em Didáctica del Cálculo y el Conocimiento Profesional.	Tese
2013	CARGNIN, Claudete	Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas	Tese
2014	VOGADO, Gilberto Emanuel Reis	O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral por meio da resolução de problemas	Tese

2014	APOLINAR, Efraín Soto	Significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en una institución educativa de Nivel Superior	Tese
2015	REIS, Thiago Linhares Brant	Integral Definida: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem	Dissertação
2015	BRANDÃO, Ana Karine Dias Caires	Integral Definida: um signo a compreender	Dissertação
2016	OLIVEIRA, Joao Lucas de	A utilização de <i>softwares</i> dinâmicos no ensino de Análise Real: um estudo sobre a construção do conceito de Integral de Riemann	Dissertação
2016	ROCHA, Irã Assis.	Evolução do conceito de Função Integrável	Tese
2017	ALMEIDA, Marcio Vieira de	Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	Tese
2018	MIRANDA, Gina Magal Horvat	Esculturas matemáticas: atividades para o estudo da Integral Dupla	Tese
2018	COMETTI, Márcio Antônio	Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem.	Dissertação
2018	MENONCINI, Lucia	O Jogo das Operações Semióticas na aprendizagem da Integral Definida no cálculo de área	Tese

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

À vista disso, passamos à descrição de aspectos alusivos às questões de pesquisa, aos objetivos, aos referenciais teóricos, às metodologias, aos resultados e às considerações produzidas por esses pesquisadores, fundamentados nos resultados obtidos, observando as perspectivas e contribuições para este trabalho.

Esses estudos identificam e analisam ações dos estudantes e as dificuldades de aprendizagens apresentadas, por meio de sequências ou engenharias didáticas desenvolvidas; investigam processos pelos quais os estudantes aprendem conceitos particulares; sugerem metodologias a serem usadas em sala de aula, buscando apresentar inovações didáticas, como o uso de tecnologias digitais, na aprendizagem dos estudantes e, ainda, investigam a atuação dos professores nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Consideramos, nesse Estudo Preliminar, as facetas abordadas no EOS (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica). Para otimizar a categorização dos trabalhos, fizemos uma opção de junção entre as facetas, definindo, dessa forma, três categorias: epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional. Salientamos que tal categorização tem caráter didático e organizacional, conforme os pressupostos da estrutura teórica desta pesquisa.

A categoria instrucional engloba as características da mediacional (apresenta relação com os recursos instrucionais). As três categorias apresentam características da faceta interacional (apresenta relação entre estudante e professor, e entre os estudantes). Ressaltamos que uma determinada análise pode ter relação com mais de uma categoria, como, por exemplo,

pode estar vinculada à faceta cognitiva, mas que envolve a faceta instrucional.

Discorreremos, nas seções seguintes, acerca da pesquisa selecionada, organizada por meio das três categorias definidas.

5.2 Categoria Epistêmica-ecológica

Por meio desta categoria, refletimos acerca de estudos e investigações que consideram o conhecimento didático-matemático, relacionados aos conceitos da Integral Definida, de acordo com os significados institucionais no currículo da Licenciatura em Matemática, evidenciando os conhecimentos e competências a serem desenvolvidos na formação inicial docente.

Incluímos nessa categoria os trabalhos de Rocha (2016), Ribeiro (2010), Crisostomo (2012) e Apolinar (2014) que abordam contextos referentes a tarefas, ações, linguagens, regras (definições, propriedades, procedimentos) ou argumentos, que podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles.

Rocha (2016) traz, em sua investigação, uma abordagem acerca da evolução do conceito de integral e de função integrável com a seguinte hipótese geral: “o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade” (p. 16). Para tanto, apontou três referências: histórica, filosófica e matemática.

A abordagem histórica e matemática da investigação de Rocha (2016) trata da evolução do conceito de função, de continuidade e de integrabilidade, com destaque para o fato de que o conceito de função contínua possibilitou a evolução do cálculo de medidas de áreas de figuras planas, usando o conceito de Integral. O referencial teórico da Filosofia foi apoiado na Semiótica de Charles Peirce²¹ e no Princípio da Complementaridade aplicado à Educação Matemática, proposto por Michael Otte²². É ressaltado que a Semiótica trouxe avanços ao associar as representações geométricas e algébricas.

Como retratado por esse pesquisador, a integração se origina na Grécia Antiga, com a quadratura de superfícies planas, no século XVII, com o método dos indivisíveis criado por Cavalieri, e chega aos tempos de Newton e Leibniz. Para ele, “enquanto Cauchy e Riemann se

²¹ SANTAELLA, L. *A teoria geral dos signos: semiose e autogeração*. São Paulo: Ática, 1995.

²² OTTE, M. *O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. São Paulo: Editora da Unesp, 1993.

OTTE, M. *A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EDUFMT, 2012.

apoiam na Geometria para desenvolverem o conceito de Integral e Integrabilidade, Newton e Leibniz atacam o problema, via abordagem algébrica, por meio das antiderivadas” (ROCHA, 2016, p. 44). Nesse ponto, é ressaltada a integração existente na Matemática entre a Geometria e a Álgebra na resolução do problema por Eudoxo, quando obteve as quadraturas de figuras geométricas que não eram polígonos, cujas bordas eram curvilíneas (método da exaustão).

A evolução conceitual de função integrável é descrita por Rocha (2016), iniciando-se em Cauchy, passando por Riemann e terminando em Lebesgue, sendo que “a Integral Definida de Cauchy, constituiu-se num método inovador e analítico para operar com a Integral Definida, de funções contínuas e seccionalmente contínua, no intervalo fechado $[a, b]$ ” (ROCHA, 2016, p. 82).

Na sequência, esse pesquisador detalhou a Integral de Riemann, enfatizando que a técnica usada ampliou o proposto por Cauchy, uma vez que contempla uma classe maior de funções que são integráveis, com um grau de descontinuidade em seu domínio. Assim, destaca que “a integração, segundo Cauchy se apoia na noção de antiderivada e tem um propósito algébrico, enquanto a integração, segundo Riemann, baseia-se em aspectos geométricos da integração” (ROCHA, 2016, p. 82).

A Integral de Lebesgue, como mencionado por Rocha (2016), amplia os conceitos de Riemann, quando incorpora limites de sequências de funções integráveis, no contexto da medida de conjuntos e das funções mensuráveis. Esse pesquisador destaca características entre as integrais de Riemann e de Lebesgue, evidenciando que essas são coincidentes quando as funções são integráveis, no sentido de Riemann, e que a Integral de Lebesgue utiliza-se de métodos diferenciados para o desenvolvimento desse conceito, conforme descrito:

Percebe-se então que Lebesgue pretendia generalizar a integral de Riemann pelo conceito de funções simples, e com isto criou também uma teoria axiomática para o operador integral, que se baseia a Teoria de medida e Integração que se pratica em cursos de Matemática Pura (ROCHA, 2016, p. 105).

A hipótese inicial de que o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo ponto, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade foi confirmada por Rocha (2016) ao final de sua investigação, ratificando que os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral foram sendo construídos ao longo da história. Nesse caminho, foi possível chegar à definição, conceitos e propriedades da Integral Definida que hoje fazem parte dos currículos de cursos das Ciências Exatas.

Didaticamente, baseando nesses pressupostos históricos conceituais, a origem

epistemológica do conceito da Integral tem um potencial para a aprendizagem dos estudantes. Almouloud (2007) enfatiza que, analisando epistemologicamente o desenvolvimento histórico do conceito, é possível fazer a identificação de concepções sobre um objeto, assim como realizar agrupamentos em classes pertinentes para uma análise didática.

Ribeiro (2010) traz uma proposta de ensino que aborda essa perspectiva. Em sua pesquisa, investigou a possibilidade de se construir um projeto de ensino destinado a trabalhar conceitos referentes às Integrais com estudantes de um curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos da História da Matemática e com os estudantes, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo construtores de um conhecimento autogerado.

A resolução de problemas de Romberg foi a metodologia de pesquisa destacada nesse trabalho, em que foi selecionada uma lista com 30 trinta problemas como geradores do conceito de Integral. Esses problemas foram obtidos por meio de um levantamento bibliográfico de problemas sobre fatos históricos relativos à construção do avanço da Matemática quanto à Integral – medida da área do círculo, quadrar a área do círculo, lema de Eudoxo ou de Arquimedes, Método da Exaustão, problema de Eudoxo, entre outros temas.

Foram desenvolvidas por Ribeiro (2010) nove atividades, com o objetivo de alcançar os conceitos de Integral Simples e Integral Dupla em coordenadas retangulares. Atentamos, neste Estudo Preliminar, para a análise de algumas dessas atividades realizadas em forma de perguntas:

Como se define uma integral?
 Como podemos definir a área de uma região por meio de uma integral simples?
 Qual é a expressão que envolve a integral analiticamente? (...)
 Qual a diferença entre uma integral definida e uma integral indefinida? (...)
 O que significa para você a palavra Integrar?
 O que significa para você a palavra Integração?
 O que significa para você a palavra Integral?
 O que representa a expressão dx no cálculo de uma Integral? (RIBEIRO, 2010, p. 187)

Destacamos alguns resultados relatados na investigação de Ribeiro (2010):

- a) a importância do uso da História da Matemática, que oportuniza aos estudantes vislumbrar como o conhecimento é produzido historicamente e como se dá a evolução dos conceitos, que, do ponto de vista docente, traz segurança para o trabalho do professor que vê relevância nesse saber, com o propósito de diversificar sua prática com proposições de aplicações que consideram o contexto histórico;
- b) a resolução de problemas mostrou-se um caminho eficiente para o trabalho em sala de

aula, conferindo aos estudantes prazer na busca por respostas, promovendo aumento da autoestima;

- c) a metodologia favoreceu a aprendizagem com compreensão e significado, fazendo com que a sala de aula se apresentasse como um local de trabalho colaborativo e dinâmico, em que houve socialização de conhecimentos e espírito de investigação, podendo o estudante vivenciar o que é fazer ciência.

O relato da transformação do professor em pesquisador avultou-se quando o autor destaca que, no transcorrer do desenvolvimento de sua pesquisa, aconteceu uma mudança em sua *práxis*.

Crisostomo (2012) traz em seu trabalho ferramentas do EOS aliadas aos processos cognitivos do Pensamento Matemático Avançado, utilizadas numa reflexão acerca da evolução do conceito de Integral e suas implicações para os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo, articulando os resultados de sua investigação em Didática do Cálculo com os conhecimentos de especialistas profissionais, na formação de professores de Matemática do Ensino Secundário, atual Ensino Médio.

Em sua pesquisa, esse autor traz contribuições para formação de professores, considerando as facetas epistêmicas, ecológicas, cognitivas, afetivas e instrutivas dos processos de estudo do Cálculo, amparado, teoricamente, pelo EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2008), apresentando informações acerca do conhecimento sobre como elaborar projetos instrucionais de qualidade para a formação de professores de Matemática sobre o tema Integral, em uma estrutura socioprofissional do curso de Matemática no Brasil.

A pesquisa de Crisostomo (2012) assume três abordagens:

- a) *pesquisa sobre o Pensamento Matemático Avançado*, em particular sobre os processos de ensino e aprendizagem da Integral;
- b) *estudo histórico-epistemológico* orientado para a compreensão dos significados parciais da Integral;
- c) *análise dos livros didáticos* utilizados no contexto do curso de Matemática no Brasil.

Dessas três abordagens, destacamos a segunda como interesse para esta investigação, uma vez que nos auxiliou no desenvolvimento dos significados de referência das Integrais Definidas – sistemas de práticas dos especialistas que determinam qual é o objeto em evidência para as instituições matemáticas e didáticas.

Na abordagem relativa aos aspectos histórico-epistemológicos da Integral, esse pesquisador teve como objetivo conhecer a origem da noção matemática da Integral, seu desenvolvimento histórico e suas implicações no processo de estudo do Cálculo. Também,

nessa abordagem, realizou a sistematização dos significados de referência da Integral com base nas ferramentas teóricas desenvolvidas na Abordagem Ontossemiótica.

Crisostomo (2012) alerta que os significados parciais da Integral foram poderosos e progressivamente gerados à medida que os tipos de problemas foram abordados, constituindo significados mais consistentes. Assim, na reconstrução do significado global do objeto – que corresponde a todo o sistema de práticas pessoais que o estudante pode, potencialmente, manifestar – é importante identificar as mudanças que são acrescentadas em cada categoria de objetos emergentes e que permitirão caracterizar os obstáculos, rupturas e progressos na evolução das configurações epistêmicas.

Esse pesquisador, nessa abordagem, sintetizou oito tipos diferentes de configurações epistêmicas da Integral (intuitiva, primitiva, geométrica, somatória, aproximada, extramatemática, acumulada e tecnológica) com destaque para o uso das tecnologias na resolução de problemas matemáticos por meio da Integral. Parte dessas configurações foram utilizadas no planejamento da proposta didática e estão detalhadas na estrutura metodológica da pesquisa desta tese.

Apresentamos algumas conclusões da pesquisa de Crisostomo (2012) que abordam aspectos acerca da aprendizagem das noções do Cálculo: a complexidade das noções do Cálculo e a linguagem utilizada se relacionam com as dificuldades de aprendizagem dos estudantes, que devem ser motivados para o estudo, com a finalidade de desenvolverem atitudes que geram reflexões, flexíveis, autônomas, potencializadas por estratégias didáticas que lhes atribuam maiores responsabilidades; problemas do cotidiano devem ser mobilizados no processo de ensino que tem a necessidade de mais tempo para aprofundamento dos conceitos e propriedades do Cálculo; a transição entre as representações, a articulação entre teoria e prática, o uso de recursos tecnológicos são considerados aspectos importantes no desenvolvimento do processo de estudo da Integral; e é preciso conhecer os estilos de aprendizagem dos estudantes.

Por conta da natureza multifacetada dos significados da Integral Definida, evidenciamos outros estudos que discutem as relações, limitações e avanços da constituição epistemológica do conhecimento acerca desse tópico matemático.

Apolinar (2014) também utiliza o EOS para o desenvolvimento de um trabalho qualitativo, no qual propôs o uso de uma plataforma *on-line* para a disponibilização de materiais e tarefas extracurriculares, utilizadas no desenvolvimento de um processo instrucional que trata dos significados institucionais e pessoais do conceito de Integral Definida, de funções de uma variável, com estudantes de cursos de Engenharia.

Para esse pesquisador, há necessidade de uma abordagem que permita aos estudantes,

que serão utilizadores de Cálculo em sua formação, construir o conceito de Integral de funções de uma variável com base em contextos e de acordo com os seus interesses. Essa característica foi observada na proposta de utilização de estratégias diferenciadas no ensino do Cálculo contemplada em seu trabalho, em que foram consideradas as dimensões epistemológica, psicopedagógica e social do currículo, no levantamento de conteúdos do curso de Cálculo, apontados como necessários para o estudante utilizar como ferramenta para resolver problemas de interesse em Engenharia.

Assim, esse pesquisador desenvolveu uma investigação aprofundada nas facetas: epistêmica, referente à abordagem ao conceito de Integral, proposto em Salinas *et al.* (2012); cognitiva, referente à compreensão que os estudantes têm do conceito; e interativa, referente à implementação, na sala de aula, da abordagem ao conceito de Integral Definida.

Apolinar (2014) se propôs a responder as seguintes questões: Qual é o significado institucional de referência do conceito de Integral de funções de uma variável, proposto em Salinas *et al.* (2012)? Qual é o significado institucional deste conceito matemático? Qual é o significado pessoal que os alunos conseguem construir? Quais são os conflitos semióticos encontrados? E como podem ser ultrapassados?

Em resposta a essas perguntas, esse pesquisador caracterizou: os significados institucionais de referência e implementados da Integral Definida, promovido pelo professor durante o ensino do conceito matemático; os significados pessoais alcançados pelos estudantes em relação ao conceito de Integral Definida, revelando as dificuldades na construção desse conceito pela identificação de conflitos semióticos, após relacionar, dialogicamente, os significados pessoais com os institucionais de referência e de implementação.

Como resultados de sua investigação, Apolinar (2014) recomendou inserir, precocemente no processo educativo, a discussão de situações-problema em que se possa verificar o procedimento para determinar a maneira de particionar adequadamente o todo – esse pesquisador aborda aproximações que são melhoradas, uma de cada vez, depois são utilizadas as quantidades infinitesimais e, com isso, obtém-se o valor exato, a ser calculado, da medida da grandeza – isso provoca a emergência do conceito de Integral Definida, como a adição de quantidades infinitamente pequenas.

Assim, é enfatizada a variação na forma como um todo pode ser dividido para a quantificação da medida da grandeza relacionada, ressaltado que a diferença entre uma quantidade real e uma quantidade infinitesimal deve ser explicada durante o ensino e que, ao considerar uma quantidade maior de casos e em diferentes contextos, espera-se tirar o elemento diferencial de modo diferente, fazendo com que mais estudantes possam ter sucesso na

realização desta etapa. Apolinar (2014) argumenta que os conceitos de infinito e quantidade infinitamente pequena são abstratos e, portanto, é conveniente desenvolver um estudo que possa enfatizar os fenômenos que ocorreram durante o uso desses conceitos no estabelecimento de uma Integral Definida.

Para esse pesquisador, é relevante a concepção de estratégias que potencializem o desenvolvimento de competências dos estudantes na representação e visualização de objetos geométricos em três dimensões, na expectativa de que isso resulte na aprendizagem e compreensão do conteúdo, tanto nos cursos de Matemática como em cursos de Engenharia.

Destacamos algumas observações de Apolinar (2014) que, segundo ele, podem auxiliar na compreensão da Integral Definida:

- a) a abordagem baseada em conceitos como infinito e infinitesimais pode ser vista pelos estudantes como muito abstrata;
- b) a forma de particionar o todo é importante e difícil no estabelecimento do Integrante – isso pode ser amenizado com foco ao processo denominado “pegar o elemento diferencial” e discussão de problemas envolvendo distintas formas de dividir o todo;
- c) o contexto do problema pode fazer com que os estudantes não consigam calcular a medida de uma grandeza – é conveniente selecionar os problemas de tal maneira que a relação entre as quantidades envolvidas deva ser explicada para o cálculo da medida da grandeza em estudo, de uma parte genérica, infinitamente pequena, que permita o estabelecimento da Integral Definida;
- d) o uso de sólidos tridimensionais pode ser de difícil compreensão para alguns estudantes, o que interfere na compreensão do problema que deve ser resolvido;
- e) há uma relação entre os conceitos matemáticos básicos para entendimento conceitual da Integral Definida, sendo necessária uma avaliação diagnóstica que assegure um nível aceitável de compreensão deles;
- f) a forma como a aprendizagem é avaliada tem uma forte tendência tradicional – a avaliação analítica pode permitir aos estudantes identificar o procedimento utilizado para o estabelecimento de uma Integral Definida, com o propósito de fazer com que esse compreenda os conceitos relacionados.

Nosso propósito nesta seção foi de apresentar estudos e pesquisas selecionadas que trazem fundamentos acerca da evolução da compreensão do conceito da Integral Definida, em uma abordagem epistêmica-ecológica, para que possamos refletir acerca do aperfeiçoamento de práticas integradas aos processos de ensino desse tema matemático.

5.3 Categoria Cognitiva-afetiva

Procuramos apontar, na categoria que aborda as facetas cognitiva-afetiva, elementos que caracterizam as possibilidades e dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, visando compreender como se desenvolvem os significados pessoais alcançados pelos estudantes, o grau de interesse, raciocínio ou motivação nos processos instrucionais, envolvendo estados afetivos – atitudes, emoções, crenças, valores, dentre outros – e o grau de dificuldade na aproximação dos significados pretendidos, em relação aos significados institucionais, propostos em investigações que abordam esse conteúdo.

Alguns processos cognitivos são elencados na abordagem do EOS, como generalização, particularização, institucionalização, personalização, representação, significação, entre outros, que estão relacionados à realização das práticas matemáticas, em que se avaliam ações e atitudes individuais e coletivas.

Incluímos na categoria cognitiva-afetiva deste Estudo Preliminar as observações das investigações de Andersen (2011), González-Martín (2006), Vogado (2014) e Brandão (2015), que nos auxiliaram na compreensão de que, no processo de ensino da Integral Definida, é esperado que os estudantes desenvolvam processos cognitivos que corroborem com a compreensão dos objetos que compõem a definição dos conceitos: infinitesimais, convergência, somatório, limites, dentre outros. Todavia, esse processo não é instantâneo e passa por várias etapas, por isso a preocupação no ensino estruturado desse conteúdo.

A pesquisa de Andersen (2011), por exemplo, trata das ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) mobilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática e teve como objetivo investigar quais processos mentais podem intervir e serem combinados, por estudantes, no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^b f(t)dt$, verificando se essas atividades podem favorecer a compreensão dos conceitos relativos ao TFC.

Os aspectos relacionados às limitações nos processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes em relação ao TFC foram abordados por essa pesquisadora, ancorados no Pensamento Matemático Avançado (PMA), com estudos de Dreyfus (1991), tendo destaque para a falta de abordagem gráfica para o TFC durante as aulas e a conseqüente dificuldade dos estudantes em interpretar, geometricamente, esse teorema; desconhecimento dos estudantes sobre a relação entre o TFC e os conceitos de derivada e integral, entre outros aspectos.

Andersen (2011) utilizou algumas fases da Engenharia Didática em sua metodologia, em que foram elaboradas, aplicadas e analisadas atividades com o suporte tecnológico do

software Winplot. Tais atividades, segundo essa pesquisadora, oportunizaram os estudantes a mobilizarem os processos do PMA.

Visando à compreensão do conceito de Integral, para o cálculo de medida de área de figuras, cujas fórmulas da Geometria Elementar não eram suficientes, foi introduzido, nesta investigação, o cálculo de medida da área pela adição das medidas de áreas infinitesimais de retângulos (uma Soma de Riemann). Também foram abordadas atividades que motivaram o reconhecimento da relação entre Derivada e Integral, além da formalização do conceito de Integral Definida, entre outras.

Essa pesquisadora percebeu que os estudantes mobilizaram, na resolução das atividades, de maneira mais ou menos evidente, processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, definição, síntese, generalização e validação, o que possibilitou a muitos participantes conjecturar que a derivação e a integração são operações inversas uma da outra. Foi destacado que o uso do *software* Winplot trouxe motivação aos estudantes para a realização das tarefas.

Algumas dificuldades foram evidenciadas, como dificuldades na associação do significado da função com sua representação gráfica; processo de visualização inexistente ou dificultoso; dificuldades na conversão das representações de objetos entre os registros gráficos e algébricos; dificuldades na discriminação da função primitiva e sua derivada, sendo essa dificuldade de natureza intrínseca aos conceitos envolvidos e que não seriam superadas apenas com as atividades realizadas. Os resultados indicam a contribuição desse tipo de atividade na apropriação das interrelações entre conceitos envolvidos no TFC.

González-Martín (2006) aborda em sua investigação as dimensões epistemológica, didática e cognitiva das Integrais Impróprias e as possíveis formas de melhoria da aprendizagem dos estudantes, indicando-nos caminhos para este estudo com as Integrais Definidas.

Na dimensão epistemológica desta pesquisa é destacada a evolução da representação da Integral nos diferentes registros: longo domínio do registro algébrico, na perspectiva do ensino; mudanças epistemológicas da Integral (discreto *versus* contínuo, infinito *versus* finito); redução ao registro algébrico.

Concernente à dimensão didática, esse pesquisador destaca algumas práticas de ensino: utilização de algoritmos no ensino das Integrais Impróprias; evidência do registro de representação gráfica; insuficiência de carga horária no curso; existência de mitos na cultura Matemática Universitária.

Quanto à dimensão cognitiva, são apresentados fatores que dificultam a aprendizagem significativa dos conceitos relativos à Integral Imprópria, como dificuldades na mobilização

das representações em diferentes registros e nos conhecimentos que fazem relação da Integral Imprópria com outros temas (conteúdos).

González-Martín (2006) traz uma proposta de ensino que abrange os sistemas de representação gráfica e algébrica, complementada por sessões em ambiente computacional (*software* Maple V); identifica obstáculos, dificuldades e erros; estuda em que medida as modificações no contrato didático mudam a atitude dos estudantes na aprendizagem de Integrais Impróprias; analisa o uso de exemplos, contraexemplos, registro de representação gráfica; analisa a adaptação e viabilidade das condições ecológicas para a socialização da gênese instrumental e da generalização de obstáculos em ambientes de calculadoras gráficas, em um contexto de aprendizagem com computadores.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), como também os Registros de Representação Semiótica são os embasamentos teóricos dessa pesquisa, cuja metodologia utilizada foi a Engenharia Didática.

A generalização de um conceito foi considerada por González-Martín (2006) como o problema geral de sua engenharia didática e, assim, um de seus objetivos se referiu à construção de um cenário de ensino em que os estudantes tivessem uma responsabilidade real de construir essa generalização, articulando diferentes representações. A resolução de problemas se destaca, e o papel dos erros é refletido na teoria das representações.

Como resultados da pesquisa de González-Martín (2006), destacamos: os estudantes preferem declarações no registro algébrico e realização de cálculos algébricos em detrimento de interpretação dos resultados; questões de raciocínio e pedidos de interpretação dos resultados não foram abordados satisfatoriamente; e dificuldade no entendimento do significado da Integral.

González-Martín (2006) tece algumas conclusões e aconselhamentos: manifesta ênfase no entendimento dos conceitos; considera possível exercitar o pensamento matemático complexo com o uso de pelo menos duas representações; o uso ativo de exemplos e contraexemplos enriquece as experiências dos estudantes; possibilidade de trabalhar com a Matemática pela observação, experimentação e descoberta; e o uso responsável de computadores pode contribuir para melhorar a aprendizagem.

Também percebendo as dificuldades trazidas pelos estudantes da graduação no entendimento de conceitos relacionados à disciplina Cálculo Diferencial e Integral, e na resolução de problemas de áreas como Física, Biologia, entre outras, Vogado (2014) elenca alguns questionamentos em sua investigação: As ações metodológicas são inapropriadas para o processo de ensino de Integral? Os estudantes não alcançam os níveis de rigor e intuição

necessários para a aprendizagem do Cálculo? A ausência de conhecimentos básicos e essenciais para a aprendizagem de Integral impedem os estudantes de aprender?

Partindo dessas reflexões, esse pesquisador utilizou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2004), para tentar fazer de um problema um ponto de partida para a aprendizagem dos conceitos introdutórios da Integral. Assim, indicou a hipótese de que a introdução ao conceito de Integral, por meio da resolução de problemas, poderia apresentar aos estudantes que não haviam estudado o conceito de Integral aspectos sobre noções desse conceito, moldando sua questão de investigação: *Como se dá o processo de introdução ao conceito de Integral para estudantes de Licenciatura em Matemática, utilizando-se a metodologia da resolução de problemas, na perspectiva dos aspectos básicos presentes na atividade matemática, segundo Fischbein?* (VOGADO, 2014, p. 42).

Foram identificadas, nesse trabalho, estratégias aplicadas por estudantes em atividades matemáticas que ativam aspectos relacionados à intuição, o algoritmo e o formal, na perspectiva de Fischbein (1993).

Vogado (2014) ressalta que a compreensão de axiomas, teoremas, provas e definições, como são apresentados nos livros didáticos, não é suficiente para aplicar esses conhecimentos à resolução de um problema matemático ou a uma situação não usual, pois são necessários outros aspectos para que o processo cognitivo da Matemática seja entendido pelo indivíduo e possa ser usado em diferentes situações.

O aspecto algorítmico recebe destaque, considerando o quanto esse está ligado às técnicas de resolução e estratégias do tipo padrão. O aspecto intuitivo é caracterizado por uma cognição intuitiva, por ser auto evidente – intuições são aceitas, sem que o indivíduo manifeste a necessidade de uma verificação ou prova *a posteriori*. Nesse contexto, a intuição também pode evocar dificuldades na aprendizagem, uma vez que fazer uma interpretação intuitiva pode anular a realização de um processo formal ou de pressupostos de resolução algorítmica, distorcendo ou bloqueando a reação matemática correta.

Assim, esse autor investiga a possibilidade de os estudantes interrelacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos na apropriação do conceito de Integral e destaca a importância do trabalho do professor com os teoremas e definições (aspecto formal), como também com os aspectos algorítmicos e os intuitivos.

Vogado (2014) apresenta uma sequência de ensino com vistas a possibilitar aos estudantes a experimentação, observação, análise e compreensão do conceito de Integral. Um dos objetivos contemplados foi o de formalizar a definição de Integral, como limite da adição

das medidas das áreas de n retângulos, quando n tende ao infinito; e avaliar uma Integral após a institucionalização de uma Soma de Riemann, aplicando os conceitos mobilizados em algumas áreas de conhecimentos, como Física e Biologia.

Nas conclusões, esse pesquisador destaca: a contar do desenvolvimento das atividades, os aspectos de Fischbein (1993) foram observados (o algorítmico, frequentemente; e com menor incidência, o intuitivo); a maioria dos estudantes superou obstáculos na aprendizagem das ideias preliminares do conceito de Integral por meio da resolução de problemas; o uso do *software* GeoGebra foi importante na resolução de atividades; foram apresentadas dificuldades no registro dos argumentos utilizando a linguagem matemática. Assim, esse pesquisador afirma: “saber a definição de um conteúdo matemático, não é suficiente para resolver, espontaneamente a questão, pois, não foi desenvolvida no sujeito uma habilidade para resolver o problema” (VOGADO, 2014, p. 140).

Vogado (2014) declara que, para o estudante alcançar processos cognitivos elaborados, como generalização e abstração, esse deve iniciar gradualmente sua compreensão, partindo de conceitos iniciais que o levem ao conhecimento da definição. No caso das Integrais Definidas, uma construção do conceito poderia ser iniciada pelas Somas de Riemann, por exemplo, para, assim, desencadear a definição formal com todos os seus elementos. Do mesmo modo, apontamos para as relações que podem existir entre as representações gráficas das Integrais, propriedades e aplicações e, ainda, a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral estabelecida pelo TFC, além de outros.

Brandão (2015) trouxe como tema de investigação as contribuições do uso das linguagens para a aprendizagem do conceito de Integral Definida na perspectiva semiótica. A metodologia usada se constituiu no desenvolvimento, aplicação e análise de uma sequência de ensino que aborda conceitos da Integral Definida: introdução ao conceito de Soma de Riemann, intuitivamente; demonstração e aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC); e aplicação de situações-problema envolvendo o TFC.

A representação é tomada, nesse trabalho, sob dois pontos de vista filosóficos: o da subjetividade e o da objetividade. Em relação à subjetividade, a representação é um processo cognitivo, que se relaciona com a percepção pela imaginação ou pelo julgamento. Sob o ponto de vista da objetividade, a representação está relacionada à capacidade mental de tornar presente um objeto do pensamento por intermédio de símbolos (BRANDÃO, 2015).

Na pesquisa em tela, a relação existente entre signo, objeto e significado pode acontecer de modo geral, ou partindo de premissas que o sujeito utiliza para contestar ou afirmar a veracidade da conclusão. Nessa perspectiva, a pesquisadora evoca que o primeiro passo para as

conclusões é a observação de um fenômeno, sendo que, ao obter conclusões, desenvolvemos hábitos vindos das experiências vividas que tomam sentido e significado. Ainda é destacado que a interação entre os estudantes no desenvolvimento de atividades pode fazer com que esses aprimorem seus conhecimentos, a fim de que novos significados possam ser construídos. É ressaltado que sentido é toda forma de percepção das sensações e “decorre do uso que fazemos dos repertórios interpretativos (termos, lugares-comuns, figuras de linguagem) de que dispomos” (SPINK; MEDRADO, 1999, p. 47).

Dessa forma, essa autora afirma que a representação, a significação e o sentido são importantes na interpretação de um signo, e que o modo como nós, professores, relacionamos esses conceitos em nossa prática didática direcionará a comunicação pelo professor; e pelo estudante, a compreensão do conhecimento e da cognição envolvidos nos processos de representar, significar e dar sentido a uma ideia.

Os resultados dessa investigação apontaram que os estudantes dão importância à linguagem oral para a compreensão do conhecimento matemático, sendo que, para eles, a escrita é a linguagem natural para expressar tal conhecimento e que a Matemática comporta tanto a linguagem escrita como a oral. Também é salientado que o uso da linguagem oral pelos estudantes, no processo de relacionar os signos matemáticos com os significados para a compreensão e resolução de situações-problema, contribuiu para a aprendizagem do conceito da Integral Definida de funções de uma variável.

Destacamos que os resultados das pesquisas, levantados na categoria cognitiva-afetiva deste Estudo Preliminar, fortalecem a importância de novos estudos e pesquisas com futuros professores de Matemática, com a finalidade de aprimorar os conhecimentos didático-matemáticos e as competências desses, o que, certamente, contribuirá para a sua futura prática profissional.

5.4 Categoria Instrucional

Esta categoria relaciona as facetas interacional e mediacional, em que se reflete acerca dos padrões de interação entre professor, estudantes e sequência de ensino destinada à construção e negociação de significados. Estão presentes nas reflexões que abordam essas facetas os recursos técnicos, dentre eles os relacionados às tecnologias digitais, previstos e/ou utilizados, e a avaliação da validação do uso do tempo destinado a distintas ações e processos, assim como os agentes participantes e seu papel. Incluímos, nessa categoria, as investigações de Almeida (2017), Cargnin (2013), Oliveira (2016), Menoncini (2018), Cometti (2018) e Reis

(2015) que nos possibilitaram uma discussão acerca das mediações docentes, dos recursos instrucionais e tecnológicos que intentam contribuir para a aprendizagem referente ao conceito da Integral Definida. Consideramos que os recursos e estratégias que possibilitam práticas docentes eficazes são diversos, dentre esses, citamos os recursos tecnológicos.

Almeida (2017), por exemplo, apresenta um estudo em que se debruça sobre os conceitos relacionados à Integral e a preparação de materiais utilizando *software*, com o intuito de preencher a lacuna da necessidade de produção e disponibilização de materiais. Esse pesquisador traz uma abordagem norteadada por constructos teóricos dos pesquisadores David Tall; Ghislaine Gueudet e Luc Trouche, aplicados à produção de materiais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, abordando os conteúdos: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências.

Esse pesquisador apresentou atividades que compõem um repertório de recursos que pode ser utilizado pelo professor no seu processo de documentação para a preparação de aulas no ensino de Cálculo, trazendo o uso do computador e a manipulação de ferramentas no *software* GeoGebra na produção de materiais, incluindo aplicações disponibilizadas, de modo *on-line*, para o estudante.

Nas atividades relacionadas por Almeida (2017), especificamente a Integral Definida, é destacado que “para o conceito de Integral, Tall toma como raiz cognitiva a área da região do plano abaixo do gráfico da função (isto é, região compreendida entre o eixo x , o gráfico da função e as retas $x = a$ e $x = b$, $[a, b]$ sendo o intervalo de integração” (ALMEIDA, 2017, p. 68). O termo raiz cognitiva é um conceito âncora, atrelado ao conceito de organizador genérico, que, segundo Tall (2000, p. 11, tradução nossa), “é definido como uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento”. O *software*, que permite a interação entre o usuário e a máquina, é retratado por Tall (2000) como organizador genérico, sendo que “um organizador genérico bem delineado deve conter o potencial para a compreensão sobre a teoria posterior.” (TALL, 1986, p. 85 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 72²³).

Almeida (2017) conclui que as aplicações desenvolvidas com o GeoGebra coadunam com as características de um *software* para aprendizagem matemática e, segundo Tall (2000), favorecendo o desenvolvimento cognitivo do estudante, a fim de promover a exploração e investigação de conceitos matemáticos. Ressalta que o material produzido amplia o conjunto de recursos do professor na organização das aulas e que isso auxilia na exposição e incorporação

²³ TALL, D. **Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive computer graphics**. 1986. 504f. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) - Institute of Education, University of Warwick. Warwick, 1986., p. 85 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 72.

de resultados de pesquisas na produção de materiais para o ensino, contribuindo na relação teoria e prática. É evidenciada a importância de se utilizar um constructo teórico de natureza cognitiva no desenvolvimento de material para o ensino de Cálculo, pois assim se dará a aproximação da teoria ao repertório de recursos utilizados pelo professor, implementando os resultados das pesquisas em Educação Matemática em sala de aula.

Cargnin (2013) propôs, em sua pesquisa, a utilização de mapas conceituais como instrumentos didáticos para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral Definida, com o suporte da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), aliada à Teoria das Situações Didáticas (TSD); e o suporte técnico dos *softwares* Cmap Tools, GeoGebra e wxMaxima.

A elaboração dos mapas, segundo essa pesquisadora, exige do estudante melhor reflexão e relacionamento entre conceitos estudados, incita interpretações e pode potencializar a compreensão de conceitos, propiciando a atribuição de significado ao conteúdo ensinado. Segundo essa pesquisadora, muitas vezes é necessário que se elabore o conteúdo do Ensino Superior de uma maneira que se assemelhe à forma utilizada na Educação Básica e, gradativamente, formalizar conceitos, para evitar que se pulem etapas e que o estudante tenha um “choque” ao ter contato com as definições.

Nessa investigação, foi proposta uma engenharia didática que conduziu o estudante à discussão de aspectos matemáticos associados ao conceito de Integral de Riemann para funções de uma variável real. Isso foi proporcionado de modo diferente em relação às aulas convencionais de Cálculo, mobilizando uma atitude ativa e autônoma na compreensão dos conceitos pelos estudantes.

As atividades propostas abordaram uma revisão do conceito de convergência e sequência numérica, o que é imprescindível para o entendimento da Integral Definida, assim como um limite de uma soma finita; contemplou a significação dos registros utilizados na notação de somatório envolvida na definição da Integral de Riemann, também o trabalho com somas parciais, na promoção de situações nas quais os estudantes pudessem construir o conceito de Integral de Riemann como uma soma de medidas de áreas. Semelhantemente, foram abordados conceitos necessários à compreensão do conceito de Integral Definida segundo Riemann, com tarefas que envolveram o cálculo de medidas de áreas.

Evidenciamos atividades que visavam à contribuição para o enfrentamento da incompreensão pelo estudante de que a medida de uma área, ou seja, um número finito pode ser determinado por uma adição de medidas de áreas de infinitos retângulos e a relação desse procedimento com o conceito de Integral Definida.

Apesar de essa pesquisadora fazer referência ao cálculo da medida da área de uma região sob uma curva, para mostrar os tratamentos e as conversões possíveis de serem realizadas, essa não adentra, profundamente, nos problemas que abordam a relação da Integral com medida de área por não ser objetivo da pesquisa.

Ressaltamos alguns resultados e conclusões do trabalho de Cargnin (2013): as dificuldades de associação do conceito de limite ao de Integral, de compreensão de um processo infinito que gera um número finito, e de compreensão do conceito de Integral Definida foram minimizadas a contar do desenvolvimento de processos cognitivos mobilizados pelos estudantes; a produção do mapa conceitual pelos estudantes possibilitou a esses o reconhecimento de conceitos-chave associados à Integral de Riemann; a análise dos mapas conceituais elaborados pelos estudantes permitiu ao professor conhecer os aspectos que podem ser reforçados para que a compreensão da Integral Definida seja amplificada, identificando possíveis obstáculos didáticos e confronto dos conceitos-chave de docentes e discentes.

Destacamos, ainda, observações de Cargnin (2013) que objetivam orientar os processos formativos para a compreensão dos conceitos da Integral Definida:

1. Diferenciar os termos sequência, função, série, e destacar as semelhanças e diferenças entre os dois primeiros e situando o terceiro em relação a estes.
2. Esclarecer a relação entre o limite ser finito, isto é, ser um número real, e a sequência ser finita.
3. Cuidar para que os alunos tenham conhecimento do significado dos termos que estão sendo usados nas definições, bem como, o seu significado no contexto em que está inserido.
4. Proporcionar momentos de discussão coletiva, mesmo que em pequenos grupos, seja em sala de aula, seja em atividades extraclasse, em que os alunos exponham suas observações e apresentem suas argumentações.
5. Propor a elaboração de Mapas Conceituais e discuti-los, coletivamente, oportunizando a chance de refazê-los após esse momento (CARGNIN, 2013, p. 283).

Oliveira (2016) se preocupou, em sua investigação, em identificar contribuições da utilização de *softwares* dinâmicos para a construção do conceito de Integral de Riemann. Assim, propôs uma abordagem desse tema matemático na disciplina Análise Real, à luz dos processos do PMA e da relação entre rigor e intuição, com o uso de recursos tecnológicos. A metodologia utilizada constituiu-se de um estudo de caso, cujos colaboradores eram professores de universidades federais e responderam a entrevistas semiestruturadas.

Foram elaboradas, implementadas e avaliadas atividades de exploração visual e numérica, com o suporte do GeoGebra, relacionadas ao conceito de Integral de Riemann. Essas atividades versaram sobre conceitos relativos à construção do conceito de Integral, possibilitando a construção de intuições visuais, mobilizadas pelo uso de mídias em conjunto,

visando a uma abstração do conceito e a discussão entre estudantes e professores.

Nessa pesquisa, os significados da Integral de Riemann foram abordados em consonância com os aportes teóricos do EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2008), sendo os seis tipos de objetos matemáticos (linguagens, situações, conceitos/definições, proposições/propriedades ou atributos, procedimentos ou argumentos) introduzidos na investigação, obtendo um aprofundamento das atividades matemáticas. Em cada situação proposta, os objetos se relacionaram, formando configurações – redes de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas.

Os resultados dessa pesquisa apontaram para a possibilidade de se fazer uma relação entre os significados intuitivos, vindos do Cálculo, e a formalização desses na disciplina de Análise. Foi relatado que a utilização do *software* GeoGebra contribui para a compreensão e ressignificação do conceito de Integral de Riemann na Análise e/ou na transição entre o Cálculo e a Análise, na relação estudante-professor, de conceitos subjacentes ao de Integral, também nas discussões de conteúdos da Integral de Lebesgue. Foram destacadas algumas limitações do *software* em uso, dando destaque para o que Tall (1986) ressalta acerca da utilização errônea de um organizador genérico, que pode levar a representações desfavoráveis a construções de conceitos, nos quais propriedades de exemplos específicos podem ser generalizadas, equivocadamente, a contextos não equivalentes.

Menoncini (2018) investiga, em sua pesquisa, de que forma os estudantes utilizam operações semióticas na aprendizagem da Integral no cálculo de medidas de áreas. Em sua abordagem, traz aspectos relacionados a um recurso instrucional bastante utilizado em sala de aula, qual seja, o livro didático. Essa pesquisadora desenvolveu uma sequência didática que explorou a diversidade de registros de representação e operações semióticas, principalmente tratamentos e conversões. Ainda, utilizou o *software* GeoGebra para o esboço de curvas e para conversões de representações produzidas nos registros gráfico-geométrico e algébrico, proporcionando aos alunos um ambiente de experimentação.

São apresentados, por essa pesquisadora, aspectos relevantes acerca das aplicações da Integral e como essas são apresentadas em livros textos de Cálculo²⁴, como o registro discursivo e o procedimento algoritmizado que são privilegiados na resolução dos exemplos; os exercícios são reproduções dos exemplos e são raros os que partem do registro gráfico para o geométrico,

²⁴ Na investigação de Menoncini (2018) foram analisados os livros: (i) FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limites, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007. (ii) LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. (iii) STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009

sendo que nenhum deles parte do registro algébrico nem considera o registro discursivo como registro de chegada; o esboço de curvas é apenas utilizado para encontrar regiões que são usadas na determinação de dados para resolução das integrais, sendo que o esboço da representação gráfica da função, cujo integrando é $h(x) = f(x) - g(x)$, e a região abaixo dessa representação, não são explorados algébrica nem graficamente (MENONCINI, 2018).

As observações realizadas por essa pesquisadora permitiram reconhecer o enfoque metodológico dado por alguns autores, ressaltando que esse tratamento também é utilizado por professores em sala de aula, uma vez que o livro texto muitas vezes é o principal ou o único material usado no ensino. A pesquisadora conclui que decorre daí a importância da produção de materiais didáticos que possam fazer a inserção de novos elementos a serem discutidos no processo instrucional.

A análise das atividades propostas nessa investigação teve o suporte teórico de Duval (2015)²⁵ e mostra que os estudantes desenvolveram, com autonomia, a sequência didática proposta e, por conseguinte, alcançaram o objetivo de subsidiar a compreensão da Integral no cálculo de medida de área.

Como resultados, Menoncini (2018, p. 111) aponta: “as atividades de construção de somas de Riemann propiciaram aos alunos o desenvolvimento da operação cognitiva de formação, pela qual uma marca ou um conjunto de marcas são reconhecidas como representação de algo em determinado sistema semiótico”, destacando que a expressão da soma $S = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$ é a marca que evoca o objeto Soma de Riemann.

Cometti (2018), sob a forma de atividades exploratórias, elaborou, aplicou e analisou sequências de atividades relacionadas à construção de superfícies e sólidos para o ensino de Integrais para estudantes de um curso de Engenharia. Em sua investigação, buscou responder “Quais são as possíveis contribuições de sequências didáticas com a utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis?” (COMETTI, 2018, p. 26).

Esse pesquisador destaca que o uso de representações geométricas se faz necessário ao se abordar o estudo nas Integrais Múltiplas, no que se refere às chamadas regiões de integração. Assim, afirma que o uso de recursos computacionais favorece a visualização e a interpretação dessas regiões, já que são o ponto principal relativo a esse tema do Cálculo. Com as atividades, o pesquisador buscou promover a compreensão da representação das interseções entre as

²⁵ DUVAL, D. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 1-23, jan./jun. 2015.

superfícies quádricas e os planos, do ponto de vista geométrico.

A implementação das atividades produzidas possibilitou ao pesquisador: a identificação do papel da visualização, com o auxílio do GeoGebra, na aprendizagem de Integrais Múltiplas; a análise do uso do GeoGebra e sua articulação com os Registros de Representações Semióticas; a reflexão acerca da potencialização da operação de tratamento, necessidade da operação de conversão para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de Integrais Múltiplas.

Como resultados, Cometti (2018) concluiu que as sequências didáticas propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado, em que ficou evidenciado que o processo de visualização proporcionado pelo uso do *software* se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades das Integrais Múltiplas e que as atividades ligadas à exploração de características visuais, quando são realizadas sob a orientação de um professor ou em um processo instrucional, podem levar a resultados com maiores potenciais de aprendizagens.

Reis (2015), apoiado nos constructos teóricos da Prática Educativa de Zabala (1998) e nos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), apresenta conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem relacionados à Integral Definida.

A questão de pesquisa desse trabalho – *Como podemos trabalhar com o conteúdo Integral Definida, relacionando conceitos, significados e procedimentos de cálculo em um grupo de estudantes de uma escola particular de engenharia?* – levou esse autor a estabelecer os objetivos: implementar um ambiente para o estudo de Integral Definida, com textos de atividades didáticas e acesso a *softwares* matemáticos (GeoGebra e VCN) e uso de calculadora que permitissem o acompanhamento e a observação da ação de um grupo de estudantes do curso de Engenharia Civil; utilizar a teoria dos conteúdos de aprendizagem no desenvolvimento das atividades, possibilitando o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, na construção do próprio conhecimento; produzir um material que contribuísse para o ensino e aprendizagem de Integral Definida.

Foi construída uma proposta metodológica que abordou os conteúdos de aprendizagem factuais, conceituais, procedimentais, atitudinais, com o propósito de que as atividades envolvessem aspectos algébricos, numéricos, gráficos e geométricos.

O termo conteúdo, utilizado nesta investigação, transcende o simples caráter cognitivo, ampliando para, conforme Zabala (1998, p. 30), conteúdo de aprendizagem, entendido como “tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades”.

A análise qualitativa dos resultados dessa investigação evidenciou a superação de dificuldades, a evolução do conhecimento e de habilidades dos estudantes no desenvolvimento das atividades, mostrando maior independência e confiança na resolução das tarefas. Segundo Zabala (1998), o professor, ao elaborar as atividades escolares, deve se propor a explorar esses conteúdos para levar o estudante a alcançar uma formação global.

Miranda (2018) desenvolveu, em sua investigação, um cenário para aprendizagem por meio da impressão 3D, com atividades que envolveram a representação figural de sólidos, cuja representação algébrica é referenciada por funções de duas variáveis. Assim, buscou levantar e analisar as concepções dos estudantes de um curso de Engenharia para o conceito de Integral Dupla.

A elaboração das tarefas, propostas nessa investigação, se apoiou na Teoria da Cognição Corporificada; a metodologia usada foi o *Design Experiment* e a análise de dados foi realizada com base no Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA). Essa pesquisadora, assim como Cargnin (2013), trabalhou com mapas conceituais, elaborando para cada atividade as possíveis montagens, esquematizando as reencenações que poderiam emergir em cada uma das tarefas.

Foram elaborados, para o desenvolvimento das atividades, *applets*, organizados em um *e-book*²⁶. Nas atividades, foi solicitado o cálculo de Integrais Definidas de funções contínuas, sendo que a interpretação gráfica e os sólidos gerados materializaram os conceitos trabalhados e buscavam levar o estudante à compreensão dos significados dos conceitos mobilizados.

São apresentadas, neste trabalho, esculturas matemáticas (sólidos utilizados nos experimentos, que foram gerados no *software* OpenScad e impressos em uma impressora 3D), que transcendem a representação gráfica das funções, como possibilidade de calcular medidas de áreas limitadas por representações gráficas de funções e fazer comparações com as Integrais de Riemann.

Os resultados alcançados sugerem que o trabalho dinâmico com a representação gráfica das funções associadas à representação das esculturas, pode estimular concepções valiosas para a compreensão do significado da Integral Dupla, identificando os significados da primeira integral, que está relacionada à concepção de área e da segunda integral, como volume de um sólido.

Miranda (2018) procurou contribuir para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial Integral, oportunizando trabalhar Integral Dupla com uma dinamicidade maior e com o auxílio das tecnologias atuais.

²⁶ O *e-book* está disponível em <https://tube.geogebra.org/material/shown/id/pwpDheTL>.

As investigações contempladas, que foram remetidas à categoria instrucional, revelam, por um lado, processos de mediação que possibilitam o aprimoramento do trabalho docente, e por outro, uma reflexão sobre recursos que podem ser levados em consideração nos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida.

5.5 Considerações sobre o Estudo Preliminar e Diagnóstico

Destacamos, nesta fase do Estudo Preliminar, as contribuições das investigações selecionadas que abordam aspectos teóricos, conceituais, metodológicos e práticos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. A análise dessas investigações reforçou a justificativa pela escolha desse tema como objeto matemático de investigação didática e pelo objetivo da pesquisa, qual seja, *analisar como um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática mobiliza competências e desenvolve conhecimentos didático-matemáticos, durante a implementação de uma proposta didática que aborda significados da Integral Definida, envolvendo tecnologias digitais.*

Nesta seção, buscamos apresentar as convergências das investigações selecionadas, com destaque para as dificuldades de aprendizagem e possíveis competências a serem desenvolvidas pelos estudantes, potencializando suas aprendizagens. Também procuramos evidenciar as contribuições dessas investigações na constituição desta tese, bem como as indicações daquelas para pesquisas futuras e em que medida esta investigação contribui para essas expectativas.

A importância da construção significativa de conhecimentos acerca de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na área de Ciências Exatas foi destacada em todas as pesquisas selecionadas neste Estudo Preliminar, sendo observada a relação entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria ao longo das reflexões realizadas, sobretudo, nas pesquisas que abordam aplicações geométricas da Integral Definida. Tal relação contribuiu para o desenvolvimento e busca por generalizações de conceitos e para a qualidade nos processos instrucionais. Ressaltamos ser importante que essa relação seja abordada pelo professor em benefício do aprendizado do estudante, pois mostra o que está implícito no cálculo da Integral Definida.

As investigações, cujos participantes são estudantes de Licenciatura em Matemática, como em Andersen (2011), Vogado (2014), González-Martín (2016) e Menoncini (2018), fizeram-nos refletir acerca da possibilidade/necessidade de oferecer ao futuro professor oportunidades para vivenciar uma metodologia que concorra para a sua formação inicial, colaborando no desenvolvimento de sua autonomia, de seu poder de crítica e de conscientização

de sua capacidade de construir os seus próprios conhecimentos, contribuindo para a sua formação matemática e didática.

Atentamos, no desenvolvimento da proposta didática apresentada nesta tese, para a associação de aspectos formais de generalização, algebrização, algoritmização a aspectos conexos à intuição, com base na análise e reflexão das representações, de modo a apresentar aos estudantes aspectos que podem ajudá-los a mobilizar seus processos cognitivos, ampliando o tratamento formal que, normalmente, é utilizado no ensino da Integral Definida, assim como está proposto em Vogado (2014).

A utilização de situações-problema que contextualizam as aplicações da Integral Definida e fazem a interlocução entre teoria e prática foi evidenciada em vários dos trabalhos selecionados no Estudo Preliminar, considerando as múltiplas aplicações – na Matemática, Física, Biologia, Estatística, entre outras áreas – que podem se manifestar como motivação para levar o estudante à aprendizagem dos conceitos, como destacado em González-Martín (2006), Ribeiro (2010), Cargnin (2013), Vogado (2014), Reis (2015), Almeida (2017), Menoncini (2018), Miranda (2018) e Crisostomo (2012). Nessa óptica, ficou evidente que a falta de articulação contínua com outras ciências das quais o Cálculo é subsidiário pode impactar na qualidade da aprendizagem.

Essas investigações que trazem uma abordagem voltada para as aplicações da Integral Definida nos trouxeram ideias para a construção da proposta didática, como, por exemplo, no desenvolvimento de atividades que aportam aos contextos intra e extramatemáticos.

Envolver os estudantes a fim de os tornar ativos no processo de aprendizagem do Cálculo foi reconhecido como uma atitude instrucional importante no processo de construção do conhecimento. Ribeiro (2010) e González-Martín (2006), por exemplo, destacam que o estudante pode vivenciar o que é fazer ciência, fazendo observações, experimentações e descobertas em atividades matemáticas, coadunando com Crisostomo (2012), ao retratar que a autonomia do estudante pode ser potencializada por meio de estratégias didáticas que lhes atribuam maiores responsabilidades de participação. Cargnin (2013) também destaca que uma maior autonomia discente na comunicação e na resolução de problemas pode impactar a construção dos seus significados pessoais, que poderão fazer reflexões sobre os aspectos envolvidos, sendo essa uma ferramenta para que o professor identifique compreensões errôneas que o estudante obteve sobre conceitos estudados.

Andersen (2011) e Crisostomo (2012) apresentam a necessidade de se conhecerem os estilos de aprendizagem dos estudantes como uma via para adequar esse processo às características deles, já que, muitas vezes, é privilegiado um método único de ensino, porém,

cada estudante tem condições próprias de construção do seu conhecimento. Algumas pesquisas, como a de Reis (2015), trouxeram a superação de dificuldades, a evolução dos conhecimentos e das habilidades dos estudantes em relacionar conceitos, significados e procedimentos de Cálculo, seguidas do desenvolvimento da autonomia desses quanto ao estudo dos conceitos trabalhados. Pelo exposto, temos uma via de mão dupla, desenvolvimento da autonomia implicando evolução na aprendizagem.

Algumas dificuldades para a aprendizagem efetiva dos estudantes foram apontadas, em comum, nas investigações selecionadas:

- a) carência de conhecimentos elementares e de formação de conceitos e definições matemáticas da Educação Básica (CRISOSTOMO, 2012; CARGNIN, 2013; APOLINAR, 2014; REIS, 2015);
- b) falta de compreensão do estudante na articulação da Integral como o limite de uma adição de medidas de áreas de retângulos, sendo que as medidas das bases desses retângulos são infinitesimais – abordagens que antecipam a formalização conceitual podem gerar dificuldades na compreensão do conceito, das demonstrações e representações (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; CRISOSTOMO, 2012; APOLINAR, 2014);
- c) conceitualização da Integral baseada unicamente na noção de medida de área – há evidência de que alguns estudantes relacionam a noção de área a uma fórmula, apenas como um objeto aritmético, desconsiderando esse conceito como um objeto geométrico, gerando dificuldades na compreensão da Integral Definida, não estabelecendo a relação desse com novos problemas (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; APOLINAR, 2014; ALMEIDA, 2017; MENONCINI, 2018);
- d) A tendência de excessiva algebrização e/ou algoritmização utilizada de maneira descontextualizada e mecanicizada – alguns estudos concordam que o desequilíbrio entre os componentes conceituais e algorítmicos no ensino da Integral Definida pode conduzir a problemas de compreensão, inviabilizando que o estudante desenvolva a capacidade de utilizar o conceito em situações novas, dando ênfase ao domínio de procedimentos de resolução de exercícios (abordagem mecanicista) ou memorização das definições e compreensão das demonstrações dos teoremas (abordagem formal), (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; RIBEIRO, 2010; APOLINAR, 2014; BRANDÃO, 2015). Menoncini (2018) reforça que essas características estão presentes em alguns livros textos de Cálculo, em que o registro gráfico-geométrico é utilizado apenas para fornecer o intervalo de integração e a função integrando;

- e) carência da abordagem gráfica para a Integral Definida, causando limitações cognitivas e didáticas (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; ANDERSEN, 2011; MENONCINI, 2018);
- f) dificuldades com a notação da Integral, sem que o estudante compreenda os significados de cada termo da notação, são apontadas por Cargnin (2013), Menoncini (2018), Crisostomo (2012) e Apolinar (2014);
- g) mobilização das representações em diferentes registros – alguns pesquisadores evidenciaram dificuldades relacionadas ao uso das operações de tratamento (âmbitos algébrico e gráfico e mudança de representações), afirmando que a transição entre as representações pode ser a chave para a aprendizagem das noções do Cálculo e para a generalização desses conceitos (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; ANDERSEN, 2011; CARGNIN, 2013; APOLINAR, 2014; BRANDÃO, REIS, 2015; ALMEIDA, 2017; MENONCINI, COMETTI, MIRANDA, 2018);
- h) o distanciamento das aplicações das Integrais pode ser um problema, uma vez que o estudante não associa a parte teórica à parte aplicável dos conceitos vistos em CDI (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2006; CRISOSTOMO, 2012);
- i) Andersen (2011) e Crisostomo (2012) apresentam que a maioria dos estudantes não tem domínio do Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro ano de graduação e revelam que isso ocorre devido a estudos superficiais sobre funções e taxa de variação.

Algumas dessas dificuldades de aprendizagem podem ser percebidas em nossas salas de aulas, como temos observado em nossa prática. Diante desse cenário, torna-se necessário compreender os apontamentos presentes nessas investigações e se apropriar deles.

Esse conhecimento é importante para os professores de Cálculo, para que possam desenvolver e experimentar estratégias de ensino que possibilitem uma construção progressiva da aprendizagem dos estudantes; e que essas estratégias possam respeitar os seus níveis de aprendizagens, que sejam criativas e motivadoras, além de serem fundamentadas na epistemologia do conhecimento matemático.

Alguns trabalhos, presentes neste Estudo Preliminar, abordam aspectos da semiótica²⁷ como constructo teórico e evidenciam a compreensão do conceito matemático estudado com base no uso das múltiplas representações (linguagem falada/escrita, gráfica, numérica, algébrica, computacional). Essas investigações, como a de Brandão (2015), chamam a atenção para a ausência de um enfoque com diversidade de representações para os significados da Integral. González-Martín (2006) também ressalta a necessidade de compreensão e

²⁷ “...é o recurso a um (ou a muitos) signo(s) de um sistema semiótico já constituído (a língua materna ou a língua simbólica, por exemplo), para designar um objeto (CARGNIN, 2013, p. 59).

aprofundamento do conceito da Integral que auxilie os estudantes a interagir com os registros algébrico e gráfico. Essa hipótese é confirmada por Brandão (2015) ao afirmar que o uso das representações gráficas e algébricas permitiu aos estudantes, participantes de sua pesquisa, impulsionarem sentidos e significados para a aplicação da Integral Definida em situações-problema, contribuindo para a aprendizagem desse conceito.

Andersen (2011), Crisostomo (2012) e Carginin (2013) também destacam a importância da transição entre as representações para a aprendizagem do Cálculo de modo a proporcionar aos estudantes um ambiente de experimentação que promova a diversidade de registros e o desenvolvimento de aspectos relacionados ao pensamento, visualização e escrita matemática.

Compactuando com essas refutações, Menoncini (2018) afirma que algumas aplicações da Integral Definida requerem a mobilização de representações em diferentes registros (algébrico, gráfico, numérico, língua materna); e enfatiza que atividades que impulsionam a conversão de representações entre registros incentivam o estudante a distinguir o objeto de sua representação.

Esses trabalhos que evocaram a formação de uma representação semiótica na representação da Integral Definida foram relevantes para a investigação apresentada nesta tese, uma vez que passamos a refletir acerca dos tipos de representação desse objeto matemático e sobre a diversificação, diferenciação e coordenação desses registros.

O aspecto tecnológico possibilita que novos conceitos matemáticos possam ser entendidos pelo estudante, se esse tiver condições de relacioná-los aos seus conhecimentos prévios e de desenvolver representações mentais ricas desse conceito, assim como destaca Dreyfus (1991). Nessa ótica, Reis (2015), Cometti (2018) e Menoncini (2018) buscaram identificar as possíveis contribuições na utilização do *software* GeoGebra, relacionando-as aos registros de representações semióticas. Esses pesquisadores reconhecem a capacidade que a tecnologia traz na apresentação das múltiplas representações de um mesmo objeto matemático. Os resultados observados, assim como na pesquisa de Miranda (2018), apontaram que o processo de visualização auxiliado pelo GeoGebra se mostrou um importante componente para os processos de compreensão dos principais conceitos e propriedades das Integrais, uma vez que o *software* intensifica o uso das operações de tratamento, nos âmbitos algébrico e gráfico, e a mudança de representações.

Esses trabalhos nos mostraram que atividades ligadas à exploração de características visuais que abordam aspectos de conversão, segundo aspectos teóricos de Duval (2009), podem ser bem aproveitadas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou por uma sequência didática, fato que nos orientou na construção da proposta didática: primeiro

ratificando a importância da construção de significados; e, segundo, remetendo à importância de traçarmos estratégias didáticas que atendam ao perfil do estudante, imerso numa sociedade moderna e digital, levando-o a explorar recursos digitais, destacando as especificidades visuais dos gráficos criados no intuito de potencializar a compreensão desses acerca do objeto de investigação didática especificado.

Ficou evidenciado nos trabalhos desse Estudo Preliminar que abordam a utilização de recursos tecnológicos que o uso responsável desses contribui para a renovação das práticas de ensino, evitando que essas se tornem demasiadamente formais ou algorítmicas e oferecem a possibilidade de desenvolver atividades matemáticas inovadoras, incluindo a relação entre os quadros algébrico, gráfico e tabular, com o objetivo de promover o trabalho experimental.

Esses fatos reafirmam a opção de utilizar uma ferramenta digital na pesquisa como uma possibilidade didática para o ensino da Integral Definida. A análise desses trabalhos nos trouxe a oportunidade de ampliar a utilização do *software* GeoGebra para dinamizar o processo de aprendizagem da Integral Definida.

Ressaltamos que, em alguns trabalhos desse Estudo Preliminar, foram apontadas limitações do *software* em uso, com destaque para o que Tall (1986) evidencia acerca da utilização errônea de um *software*, denominado por ele como um organizador genérico, que pode levar a representações desfavoráveis a construções de conceitos, nos quais propriedades de exemplos específicos podem ser generalizadas, equivocadamente, a contextos não equivalentes. Um exemplo disso, conforme destacado por Oliveira (2016, p. 128) em sua pesquisa, foi que “o uso do *software* apresentou uma limitação de finitude que pode levar à formação de intuições errôneas”.

Alguns apontamentos relacionados às dificuldades de manipulação de *software*, como em Oliveira (2016), nos fizeram repensar o delineamento das atividades e da contribuição desta investigação na disponibilização de materiais de ensino que possam ser utilizados nas salas de aula, como atividades exploratórias e investigativas.

Esses trabalhos contribuíram com a pesquisa retratada nesta tese, como inspiração na forma de explorar os padrões gráfico-geométricos, relacionados com as funções integrandas e suas primitivas, com o *software* GeoGebra e na estruturação da proposta didática, apontando para uma abordagem não convencional, em que o uso das tecnologias digitais como fator potencial para a aprendizagem é uma tendência no presente e no futuro.

A pesquisa que desenvolvemos tem algumas similaridades com trabalhos já desenvolvidos com o mesmo objeto de estudo, Integral Definida, relativo a apresentar uma proposta didática, com o objetivo de mobilizar aspectos cognitivos dos estudantes, com o uso

de tecnologias digitais e analisar a compreensão desses acerca do objeto matemático. O que diferencia este estudo dos demais é o fato de que utilizamos o modelo teórico do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática na proposição de experiências aos estudantes de Licenciatura em Matemática, para que esses tenham a oportunidade de mobilizar aspectos cognitivos (construção de esquemas) que os levem ao aprimoramento dos conhecimentos didático-matemáticos e competências no contexto da formação de professores.

A abordagem proposta nesta tese se diferencia do que está apresentado em alguns livros didáticos, que buscam mobilizar a aprendizagem dos estudantes partindo das definições. Em nosso caso, partimos de situações-problema intra e extramatemáticas, com destaque para a institucionalização matemática das experiências, que é imprescindível para que os significados pessoais dos estudantes se aproximem dos significados institucionais pretendidos. As aplicações utilizadas buscam auxiliar o reconhecimento do significado da Integral Definida em alguns contextos, dando possibilidade ao estudante de ampliar seus significados pessoais acerca desse tópico matemático.

Levantadas as dificuldades de compreensão dos estudantes nos conceitos relacionados ao Cálculo Integral, as pesquisas deste Estudo Preliminar relatam resultados encorajadores àqueles que trabalham visando a que os estudantes progridam em suas aprendizagens nos cursos de Cálculo.

Como expectativa de pesquisas futuras, enumeramos alguns aspectos que foram abordados nas investigações deste Estudo Preliminar e que nos motivaram na elaboração da questão de investigação. Procuramos, por conseguinte, expor em que medida esse trabalho atende algumas dessas expectativas.

Almeida (2017) e González-Martín (2006) abrem a possibilidade da proposição de seus projetos a outros estudantes e/ou professores, sugerindo a utilização dos materiais produzidos, como também os dados apresentados por suas investigações, alcançando maior equilíbrio entre as situações didáticas e a-didáticas e menos defasagens entre as análises *a priori* e *a posteriori*, destacando a importância dada à formulação e aplicação de materiais que abordem o ensino de Cálculo. Assim, propõem que estudos futuros poderiam auxiliar na complementação da classificação de dificuldades e obstáculos no ensino e fornecer maneiras de aliviar seus efeitos.

Apolinar (2014) ressalta a necessidade de se desenvolverem materiais didáticos que incluam o desenvolvimento de competências algébricas, manipulação de objetos tridimensionais, explicação e modelação matemática de fenômenos envolvidos em situações-problema. Sugere um estudo dos pré-requisitos de conceitos necessários para a compreensão da Integral Definida e uma avaliação analítica para outros conceitos do Cálculo, preconizando

avaliações menos tradicionais que permitam aos estudantes enfrentar problemas, cuja solução envolva o estabelecimento de uma Integral Definida.

Também sugere um enfoque desse tema, articulado à abordagem leibniziana (emergência do conceito por meio do cálculo aproximado inicial da medida da grandeza que se pretende quantificar na sua totalidade) e à abordagem newtoniana (determinação da forma adequada de dividir o todo, de modo a tomar o elemento diferencial), em atividades que permitam aos estudantes a obtenção de esquemas para identificação de como o todo deve ser dividido corretamente, aumentando o número de estudantes que alcança a compreensão do conceito de Integral Definida.

São aconselhados, por Apolinar (2014), estudos pertinentes aos fenômenos que ocorrem na utilização de conceitos relacionados à quantidade infinita e infinitesimal no estabelecimento da Integral Definida e, também, sobre a implementação desse processo instrucional no ensino médio, para conhecer os resultados que seriam afetados por um curso de Cálculo anterior, que permitiria um aprofundamento na compreensão dos fenômenos que ocorreram.

González-Martín (2006) sugere o desenvolvimento de pesquisas que utilizam tecnologia nos processos instrucionais, haja vista o interesse no desenvolvimento de ambientes favoráveis para a integração e operacionalização dos distintos registros, facilitando a aprendizagem e abrindo caminhos para novas hipóteses, formas de se pensar e pesquisas relacionadas ao tema.

Oliveira (2016), nesse mesmo viés, destaca que a utilização de *softwares*, especificamente na formação do professor de Matemática, é uma questão deixada em aberto, com vistas a verificar se essa utilização traria mais significados aos conceitos que essa formação exigirá na relação com a Matemática trabalhada na Educação Básica, o que também é abordado por Andersen (2011), que interroga acerca de quais os efeitos do uso de uma ferramenta computacional no ensino e aprendizagem de conceitos relacionados à Derivada e à Integral.

Miranda (2018) também evidencia o desejo de dar continuidade ao processo de investigação acerca das atualizações tecnológicas e/ou metodológicas, inovando as formas de abordagens de conteúdos. Sugere, por exemplo, a inclusão de uma tarefa que envolva a Integral Definida, pois evidenciou certa dificuldade dos participantes de sua pesquisa no cálculo de Integrais.

A presente pesquisa atende às recomendações desses investigadores, considerando que o uso ativo das tecnologias digitais pode contribuir para a efetivação do processo de aprendizagem. São apresentadas condições ecológicas satisfatórias, ou seja, o grau em que esse processo de estudo, com a utilização dessas ferramentas, se ajusta ao currículo proposto pela instituição – no caso, a ementa da disciplina, à sociedade e aos condicionamentos do entorno

no qual se desenvolve, é favorável.

Destacamos, portanto, que a utilização dessas ferramentas tem o potencial de permitir o desenvolvimento de competências digitais nos estudantes de Licenciatura em Matemática, ao serem submetidos a uma proposta didática que será desenvolvida com o uso de um *software*.

Cometti (2018) ressalta possibilidades de pesquisas futuras, relacionando outros conteúdos do Cálculo de várias variáveis à luz da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, abordando conceitos nos quais a utilização de tecnologias pode contribuir para reflexões importantes pelos professores-pesquisadores do Ensino Superior comprometidos com um ensino voltado para a aprendizagem com compreensão significativa.

Crisostomo (2012) destaca perspectivas de investigações relacionadas à formação de professores de Matemática:

- a) dos saberes profissionais dos professores formadores sobre outros objetos do Cálculo, para verificar o grau de coincidência com os resultados obtidos em sua pesquisa;
- b) da análise do conhecimento profissional de professores formadores sobre objetos didáticos de outras disciplinas e sua aplicabilidade no currículo da Licenciatura em Matemática;
- c) de viabilidade do desenho, planejamento e implementação dos processos de estudo da Integral (ou outros objetos do Cálculo), segundo o EOS;
- d) do conhecimento profissional dos professores formadores, sobre a Integral (ou outros objetos do Cálculo) em outras carreiras;
- e) de adequação do estudo de objetos do Cálculo, a fim de articular aulas teóricas e práticas, com o uso de recursos tecnológicos. Das questões deixadas em aberto nessa pesquisa, destacamos as segunda e quinta questões que se relacionam com os objetivos desta pesquisa e tiveram influência nesta investigação.

A necessidade de se produzirem significados para os conceitos matemáticos ensinados nas universidades, promovendo uma reconstrução do conhecimento alcançado e incentivando os estudantes a extrapolar o que já está posto por conhecimento científico é destacado por vários pesquisadores, como Brandão (2015) e Cargnin (2013), que sugerem a realização de sequências de ensino que contemplem situações-problema envolvendo os conceitos do Cálculo, contribuindo para trazer dinamicidade às aulas, com maior participação discente. Nessa mesma perspectiva, Andersen (2011) aponta para a inserção de atividades baseadas em um ensino por descoberta para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Cargnin (2013) considera urgente a aproximação entre as pesquisas acadêmicas e a sua utilização em sala de aula, destacando a importância de síntese das pesquisas existentes para os

diversos conteúdos da Matemática que, individualmente, apresentaram benefícios, mas que nem sempre chegam à sala de aula. Assim, indica ações nos cursos de formação de professores de Matemática, envolvendo a vinculação dos objetos matemáticos às suas diversas representações; o trabalho com as conversões de representações entre registros, a fim de impulsionar os futuros professores a atuarem desse modo em sua prática profissional futura. Nesse contexto, trazemos esta pesquisa como uma contribuição que busca atender a esses aspectos.

Menoncini (2018) afirma que a equivalência de áreas pode ser um novo elemento a ser inserido no estudo da Integral, pois é um assunto não comumente abordado em livros textos de Cálculo. Ainda vislumbra o repensar de seu estudo, complementando-o com outras metodologias ou atividades, como, por exemplo, a modelagem matemática ou a proposição de atividades que retratem problemas reais.

Diante do exposto, esclarecemos que todos os trabalhos selecionados auxiliaram, de alguma forma, na composição e evolução da pesquisa aqui apresentada. Ressaltamos que nossa preocupação perpassa o conhecimento do desempenho matemático do estudante e a exploração dos conceitos da Integral Definida, chegando à observação das competências para identificação e utilização de objetos e processos matemáticos, seus significados e vínculos, fazendo uma análise da estrutura das práticas educativas em Matemática, objetos e processos que os estudantes acionam na resolução das atividades relacionadas à Integral Definida.

No próximo capítulo, apresentamos o processo de construção do desenho da proposta didática, de acordo com a fase do desenho da Engenharia Didática, baseada na abordagem ontossemiótica do conhecimento e da instrução matemática.

CAPÍTULO 6 – DESENHO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos o desenho e os aspectos considerados para a concepção da proposta didática desenvolvida por dez estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros. Explicitamos as situações-problema desenvolvidas para cada uma das atividades propostas e seu sequenciamento. Uma análise ontossemiótica de cada uma das atividades também é explicitada neste capítulo, considerando os objetos primários que compõem a configuração de objetos do EOS – problemas, linguagens, conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos. Partimos da observação do uso da linguagem matemática nas definições, nas propriedades e nos argumentos, assim como das relações que ocorrem entre os diferentes objetos matemáticos que intervêm na comunicação de ideias matemáticas e aquelas originadas dos diferentes cenários – intra e extramatemáticos (contextuais).

A proposta didática está estruturada em duas Unidades de Estudo: I) Institucionalização do conceito de Integral Definida e II) Aplicações da Integral Definida em contextos extramatemáticos.

Explicitamos, neste capítulo, a configuração didática de cada atividade que compõe as Unidades de Estudo para compreensão da abordagem de cada uma dessas e do fio condutor entre elas, a fim de permitir a identificação das competências e conhecimentos didático-matemáticos sobre a Integral Definida manifestados pelos estudantes, a partir do desenvolvimento da proposta didática. Uma configuração didática é qualquer desenvolvimento de um processo didático, compreendido entre o início e a finalização de uma situação-problema. A configuração didática, segundo Godino (2014), pode ser epistêmica, instrucional ou cognitiva-afetiva.

6.1 O processo de construção do desenho da proposta didática

A construção da proposta didática para o estudo da Integral Definida se ancorou na estrutura teórico-metodológica do EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2008; GODINO *et al.*, 2013), ressaltada por Sousa *et al.* (2019, p. 448) quando discorrem que

[...] planejar aulas ou sequências de tarefas, não é um exercício apenas de escolher conteúdos e planificar atividades, mas passa a envolver fatores emocionais (o aluno

vai gostar da questão?), epistêmicos (qual o melhor conteúdo, como apresentá-lo?), ecológicos (como contribuir para a inserção social dos aprendizes?), entre outros. (SOUSA *et al.*, 2019, p. 448, tradução nossa)

Assim, consideramos os aspectos relacionados às facetas do EOS – epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional (mediacional e interacional). Atinente à abordagem epistêmica-ecológica, consideramos, também, o estudo realizado por Crisostomo (2012), no qual cita a gênese e desenvolvimento da Integral, para desenvolvermos possibilidades de abordagem de alguns significados parciais descritos pelo autor; também a análise da diversidade de contextos de aplicação e utilização desse tema, contemplando o currículo da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, instituição onde foi realizada a investigação. Relativamente às facetas cognitiva-afetiva e instrucional, a análise dos aspectos cognitivos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Integral Definida foi essencial para a compreensão dos principais entraves enfrentados pelos estudantes, o que trouxe subsídios para elaboração e implementação da proposta didática.

Nesse processo, atendendo às facetas do EOS, destacamos quatro aspectos importantes da proposta didática desenvolvida: 1) atende a complexidade dos objetos matemáticos que se pretende ensinar – foram considerados os resultados obtidos na fase do Estudo Preliminar e como esse tópico do Cálculo é trabalhado na instituição onde se realiza a pesquisa; 2) considera que as práticas utilizadas na resolução das situações-problema devem fornecer informações sobre o grau de ajustamento do significado pessoal dos estudantes em relação ao significado institucional do objeto Integral Definida, considerando algumas de suas configurações epistêmicas (CRISOSTOMO, 2012) – na tentativa de alcance desse aspecto, foram incluídas atividades que ativam alguns significados parciais do objeto; 3) pretende mobilizar processos relevantes para a atividade matemática destacados no EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2008; FONT; RUBIO, 2017); 4) considera os conhecimentos prévios dos estudantes como suporte para suas práticas como professores que ensinarão Matemática.

Em relação a esse quarto aspecto, ressaltamos que, no desenho da proposta didática, contemplamos a inclusão de três tipos de tarefas:

- a) aquelas que os estudantes colocam em ação o conhecimento comum – resolver a tarefa matemática respectiva ao nível em que estão posicionados;
- b) aquelas a demandar o conhecimento de diferentes representações e significados parciais de um objeto matemático, resolver a situação-problema por meio de vários procedimentos, manifestar diferentes argumentos válidos, identificar o conhecimento colocado em ação durante a resolução de uma tarefa matemática – que consideramos

como conhecimento especializado; e

- c) aquelas tarefas para aplicação de conhecimento ampliado – generalizar tarefas sobre conhecimento comum ou especializado e/ou fazer conexões com objetos matemáticos mais avançados do currículo. Dada a complexidade da abordagem de uma tarefa que atenda os três critérios, simultaneamente, as situações-problema propostas foram selecionadas de tal forma que as tarefas se complementam para avaliar esses critérios.

Assim, a proposta didática sugere uma trajetória para que o estudante aprimore seus conhecimentos sobre a Integral Definida e, também, para o desenvolvimento de competências didáticas que poderão ser utilizadas em sua prática como professor, como uso de distintas representações, uso de interdisciplinaridade na abordagem de conteúdos matemáticos, uso das tecnologias digitais voltadas para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Schoenfeld e Kilpatrick (2008), ao discutirem sobre a Teoria da Proficiência na educação, afirmam “que as pessoas precisam desenvolver habilidades para se tornar proficientes” (2008, p. 350, tradução nossa). No EOS essa teoria é explicada como uma referência aos conhecimentos e competências que deveriam ter os professores para que seu ensino seja eficaz (GODINO, 2002, p. 18).

Como *conhecimento comum do conteúdo* (CCC), consideramos que o estudo da Integral Definida, implementado pela proposta didática, traz aos estudantes, futuros professores, além da possibilidade do aprimoramento do conhecimento desse conteúdo específico do Cálculo, a possibilidade de aprimoramento de conhecimentos matemáticos como funções e suas propriedades, geometria plana, conversão de escalas, proporcionalidade. Esses conteúdos da Matemática Básica são abordados nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio que compreende o campo de atuação dos futuros professores. Dessa forma, os estudantes têm a oportunidade de se apropriar de propriedades, conceitos e procedimentos que lhes serão úteis no processo de ensino desses conteúdos. Avaliamos ainda como CCC os elementos básicos da Integral Definida, integrados à estrutura metodológica do processo de ensino, compreendendo os objetos primários (linguagens, conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos).

Como *conhecimento avançado do conteúdo* (CAC), que considera o conhecimento dos conceitos previstos para as etapas posteriores ao nível escolar em foco, reforçamos que na licenciatura em Matemática em que os estudantes, participantes da pesquisa, são matriculados, os conteúdos com maior nível de profundidade (conhecimento ampliado) apresentam-se com a proposta para formar um professor crítico na análise de documentos e materiais curriculares ao planejar suas aulas, a fim de criar condições para que seus alunos possam desenvolver-se em

um processo reflexivo e questionador.

A mobilização dos conhecimentos especializados do conteúdo (CEC) se dá a partir de estratégias que foram adotadas, tais como solicitar respostas às atividades, em que é necessário justificar e argumentar sobre as resoluções; tecer reflexões sobre casos particulares, partindo para a generalização de conceitos, e sobre propriedades e/ou proposições apresentadas; envolvimento com atividades de diferentes tipos, tais como situações-problema e tarefas que articulam tecnologias digitais e interdisciplinaridade.

O desenvolvimento de atividades da natureza da proposta didática implementada visa oportunizar ao estudante criar diferentes experiências de aprendizagem, uma vez que pressupõe autonomia intelectual e ação docente. É esperado que o estudante supere a postura de mero espectador de um processo e assuma uma postura crítica, questionadora e de discussão, registrando suas reflexões, intervindo na realidade, posicionando-se e assumindo responsabilidades.

Utilizamos, nas seções seguintes, a ferramenta de configuração ontossemiótica do EOS para realizar uma análise detalhada dos conteúdos que são mobilizados nas práticas necessárias para resolver as atividades da proposta didática.

6.2 Configuração Epistêmica-ecológica

Nesta seção, abordamos a configuração epistêmica-ecológica, relacionada aos significados institucionais da Integral Definida utilizados, articulando a ecologia de saberes como referência para análise.

Passamos, primeiramente, aos aspectos ecológicos que abordam como a Integral Definida está prevista na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Licenciatura em Matemática, na instituição onde foi realizada a pesquisa.

6.2.1 O Estudo da Integral Definida na Licenciatura em Matemática da Unimontes

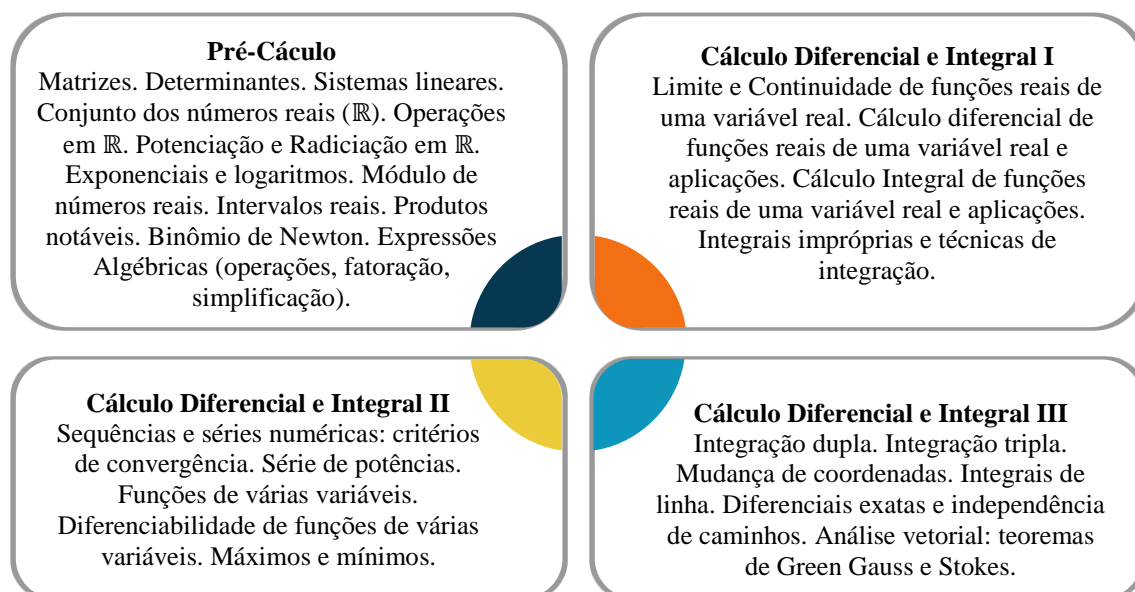
A organização curricular da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros se baseia, especialmente, na Resolução CNE/CP N° 2, de 1° de julho de 2015, que estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Tal Resolução, que se ampara no Parecer CNE/CP 002/2015, apresenta expectativas de que os cursos de licenciatura implementem uma formação de professores que tenha como princípio a

indissociabilidade entre teoria e prática, pois é instituído que “durante o processo formativo, deverá ser garantida efetiva e concomitante relação entre teoria e prática, ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessárias à docência” (BRASIL, 2015, p. 13). Essas diretrizes estão contempladas no Projeto Pedagógico do Curso (PPC) da Licenciatura em questão.

O currículo desse curso, atendendo a Resolução citada, é organizado por meio dos componentes curriculares distribuídos em quatro eixos: I) Conhecimentos Específicos de Matemática; II) Conhecimentos Didático-Matemáticos; III) Formação Geral Docente; IV) Conhecimentos Experiencial e Profissional. Esses eixos contemplam os componentes curriculares teóricos e práticos que se encontram articulados ao longo do PPC da Licenciatura em Matemática da Unimontes, que foi reformulado em 2019, e buscam contemplar as distintas categorias do conhecimento do professor de Matemática no âmbito da Licenciatura.

Na organização dos programas curriculares das disciplinas, o estudo da Integral Definida é contemplado em Cálculo Diferencial e Integral, que é dividido em quatro disciplinas do curso, e está presente no segundo período do curso, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I). Na Figura 12, apresentamos um resumo das quatro disciplinas relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral constantes desse PPC.

Figura 12 – Distribuição dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral



Fonte: Projeto Pedagógico do Curso Matemática, 2019

A disciplina CDI-I tem carga horária de 108 horas/aula. No plano de ensino analisado, referente ao 1º semestre de 2020 (Anexo A), os objetivos contemplam: possibilitar ao estudante conhecimento sobre funções reais de variáveis reais, limites, continuidade, derivadas e integrais

e aplicar os resultados aprendidos em outras disciplinas.

De modo geral, o conteúdo programático para desenvolvimento da ementa da disciplina CDI-I é organizado pelos professores do seguinte modo:

- a) Unidade 1 – Funções reais de uma variável real. Limite e continuidade de funções reais de uma variável real;
- b) Unidade 2 – Derivadas de funções reais de uma variável real. Estudo da variação de funções reais de uma variável real. Máximos e Mínimos. Aplicações. Teorema de Rolle e do valor médio;
- c) Unidade 3 – Cálculo Integral. Conceito. Teorema Fundamental do Cálculo. Integrais Imediatas. Aplicações. Técnicas de integração. Introdução ao estudo de funções de várias variáveis reais.

Os tópicos referentes à Integral Definida estão presentes na Unidade 3, como um subitem do Cálculo Integral.

A estratégia didática adotada privilegia a forma como os conceitos e atividades são abordados pela bibliografia selecionada para a disciplina, quais sejam, aulas expositivas, atividades em grupo e individuais, listas de exercícios e pesquisas bibliográficas. No entanto, existe um esforço dos professores e Coordenação do curso para viabilizar a realização de ações que possibilitam o desenvolvimento de competências previstas nas DCN da Licenciatura em Matemática.

Na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I), o processo avaliativo ocorre a partir de atividades com consulta, realizadas individualmente ou em grupo, em sala, e provas individuais sem consulta. Aspectos como interesse, assiduidade, participação, domínio de conteúdo, capacidade de análise e raciocínio lógico, manifestados pelos estudantes durante as aulas também são considerados pelos professores.

A bibliografia básica, indicada no PPC da licenciatura em questão, é composta por três obras:

- a) GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de Cálculo*. v. 1 e 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- b) STEWART, James. *Cálculo*. v. 1. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- c) THOMAS, George B. *Cálculo*. v. 1. São Paulo: Pearson Education, 2003.

A bibliografia complementar, desse mesmo curso, compreende duas obras, quais sejam:

- a) LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- b) SWOKOWSKI, Earl William. *Cálculo com Geometria Analítica*. 2. ed. rev. São Paulo:

Makron Books, 1995.

Segundo Cooney (1994), os programas de formação de professores devem propiciar aos estudantes experiências que os ajudem a criar ao mesmo tempo um embasamento teórico-conceitual específico e pedagógico. Esse autor afirma que os cursos de Licenciatura se caracterizam por

Dar condições aos licenciandos de desenvolver um conhecimento matemático sob uma perspectiva construtivista;
Oferecer ocasiões para os licenciandos refletirem sobre suas próprias experiências como aprendizes de Matemática;
Fornecer contextos nos quais os licenciandos desenvolvam habilidades em identificar e analisar os obstáculos de ensino e como lidar com estes;
Dar oportunidade aos licenciandos de traduzir o seu conhecimento matemático em estratégias adequadas de ensino (COONEY, 1994, p.16).

A proposta didática elaborada e implementada com os estudantes participantes desta pesquisa coadunam com as diretrizes do PPC da Licenciatura em Matemática da Unimontes que, por sua vez, atende às preocupações apontadas por Cooney (1994), concernentes aos anseios dos professores em atividade, em que para ser professor não basta “ter” apenas conteúdos matemáticos, mas se preocupar em saber quais dificuldades se interpõem à aquisição desse conhecimento e qual a melhor forma de torná-lo acessível aos estudantes para que possam compreendê-lo e construí-lo adequadamente.

A definição de Integral Definida é fundamentada no conceito de Soma de Riemann, isso significa que a noção de Integral Definida é dada como sendo uma adição de infinitas parcelas, infinitamente pequenas. Esse objeto de estudo é abordado com maior ou menor profundidade de acordo com o objetivo de cada curso. O estudo da Integral, na formação do professor de Matemática, apresenta-se como sendo de fundamental importância por ser suporte para diversas aplicações, como cálculo de medidas de áreas, perímetros, volumes, noções procedentes da Física, dentre outras, conforme já destacado anteriormente, interagindo com outras disciplinas do curso de Matemática e com outras áreas do conhecimento.

Em consonância com o EOS, corroboramos a posição de que as noções de Cálculo devem ser introduzidas e desenvolvidas no Ensino Superior começando pelas situações-problema. Nessa perspectiva, a proposta didática é composta de atividades que apresentam, inicialmente, uma situação-problema que direciona o desenvolvimento das práticas matemáticas que se manifestam na resolução de uma sequência de tarefas diferentes, constituindo-se em subconfigurações, constando de construções a serem realizadas no GeoGebra. Também há um conjunto de questionamentos com o intuito de possibilitar a

mobilização dos processos cognitivos dos estudantes participantes da pesquisa. No processo de seleção, elaboração e análise da implementação dessas atividades, utilizamos as noções de configuração epistêmica²⁸ e configuração didática²⁹, com o intuito de possibilitar ao estudante a identificação de alguns significados parciais da Integral Definida.

Passaremos a tratar dos aspectos epistêmicos que foram considerados no desenho da proposta didática, com destaque para os significados institucionais de referência da Integral Definida, utilizados no desenvolvimento dessa proposta.

6.2.2 Significados Institucionais de Referência

6.2.2.1 Área, Integral de Riemann e Integral Definida

• O conceito de área como uma função de conjuntos

Introduzimos a noção de área a partir de uma função a , denominada função área que associa a cada região S do plano um número real $a(S)$ denominado área de S .

Essa noção de área é definida axiomaticamente, conforme dispõe Apostol (1967):

Assumimos que existe uma família M de regiões planas S cuja função a satisfaça as propriedades:

1. Para qualquer S em M , $a(S) \geq 0$.
2. Propriedade aditiva: Se S e T estão em M então $S \cup T$ e $S \cap T$ também estão e, além disso,
3. Propriedade da diferença: $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$.
4. Invariância da congruência: Se uma região S está em M e S é congruente a T então T também está em M e $a(S) = a(T)$.
5. Escolha de escala: Todo retângulo R está em M . Se o retângulo tem largura h e altura k então $a(R) = h \cdot k$.
6. Propriedade da exaustão: Seja Q um conjunto limitado entre duas regiões em escada, S e T , tal que: $S \subseteq Q \subseteq T$ (*). Se existe um único número c tal que

²⁸ As configurações epistêmicas são compostas pelos objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas matemáticas em diferentes contextos de uso. Um objeto matemático pode ter várias configurações epistêmicas e essas carregam um significado parcial diferente para aquele objeto matemático (FONT; GODINO, 2006).

²⁹ Uma configuração didática está associada a uma configuração epistêmica, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

$a(S) \leq c \leq a(T)$, para quaisquer regiões em escada S e T que satisfaz (*), então $a(Q) = c$.

Pode ser demonstrado que existe uma tal função área, conforme está disposto em Moise (1990)³⁰.

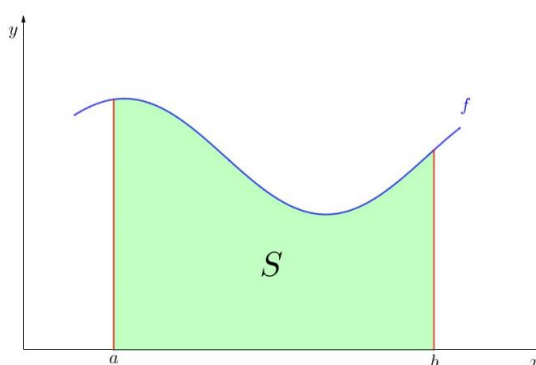
Os elementos de M são denominados mensuráveis.

Vale destacar que os axiomas asseguram que: A área de uma região plana é sempre maior ou igual a zero. Que o conjunto vazio é mensurável e sua área é igual a zero, assim como um segmento de reta; que cada *região escada* é mensurável e que a sua área é a soma das áreas das regiões retangulares que constituem a região escada. O Axioma 6, incorporando o método grego de exaustão, permite estender a noção de área de regiões retangulares a outras regiões não retangulares.

• Conjuntos ordenados

Seja f uma função não negativa, definida em um intervalo fechado da reta $[a, b]$. A região do plano limitada por $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$ é denominado conjunto ordenado de f . O conjunto S representado na Figura 13, é um exemplo de um conjunto ordenado de f :

Figura 13 – Exemplo de um conjunto S ordenado de f



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.
 Legenda: $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

• A noção de Integral de funções escada

Seja s uma função escada definida em $[a, b]$ e P uma partição de $[a, b]$ em que a função s é constante em cada subintervalo dessa partição.

³⁰ MOISE, E. E. **Elementary geometry from an advanced standpoint**. 3. ed. London: Ed. Pearson, 1990.

Define-se Integral de s em $[a, b]$ como a soma dos valores das áreas das regiões retangulares. Indica-se o número resultante dessa soma por $\int_a^b s(x)dx$.

Pode-se verificar que $a(s) = \int_a^b s(x)dx$.

A partir da noção de Integral de uma função escada pode-se generalizar o conceito de Integral para outras funções em que se pode utilizar o método de exaustão do axioma 6.

A Integral de uma função existe quando existe um único número I tal que $\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b t(x)dx$, para quaisquer s, t escadas tais que $s \leq f \leq t$.

- **A área de um conjunto ordenado expressa como uma Integral**

Teorema: Seja f uma função não negativa que admite Integral Definida no intervalo $[a, b]$, e seja Q o conjunto ordenado de f em $[a, b]$. Então Q é mensurável e a sua área é igual a $\int_a^b f(x)dx$.

Demonstração: Sejam S e T duas *regiões em escada* que satisfaçam $S \subseteq Q \subseteq T$. Para essas regiões escada existem duas funções escadas que satisfazem $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$, tais que: $a(S) = \int_a^b s(x)dx$ e $a(T) = \int_a^b t(x)dx$, quaisquer que sejam as funções s e t escadas tais que $s \leq f \leq t$. E então existe um único número I que satisfaz $a(S) \leq I \leq a(T)$.

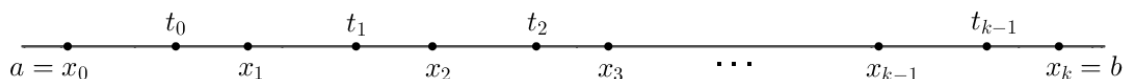
Como f é integrável em $[a, b]$, o número $I = \int_a^b f(x)dx$ é o único número que satisfaz a desigualdade: $\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b t(x)dx$ para todas as funções escada s e t com $s \leq f \leq t$. Portanto, este é também o único número que satisfaz $a(S) \leq Z \leq a(T)$ para uma região em escada S e T com $S \subseteq Q \subseteq T$. Pela propriedade da exaustão, isto prova que Q é mensurável e que $a(Q) = Z$.

- **Integral de Riemann**

Definição: Seja $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, um intervalo fechado da reta. Uma partição de $[a, b]$ é um subconjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset [a, b]$ com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. O conjunto de todas as partições de $[a, b]$ vamos representar por ρ . É possível notar que uma partição $\{x_0, \dots, x_k\} \in \rho$ determina k intervalos fechados: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k]$, a qual chamamos de *subintervalos* de partição. Seja $P \in \rho$, $P = \{x_0, \dots, x_k\}$, definimos a norma de P como sendo o número $\max_{1 \leq i \leq k} \{p_i - p_{i-1}\}$.

Definição: Uma partição, vetada de $[a, b]$ é uma partição P de $[a, b]$, juntamente com a sequência finita $I = \{t_0, \dots, t_{k-1}\}$, com $t_i \in [x_i, x_{i+1}] \forall i = 0, \dots, k-1$. Vamos denotar por $\{P, I\}$ a partição P etiquetada pela sequência I , conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Partição P etiquetada pela sequência I



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

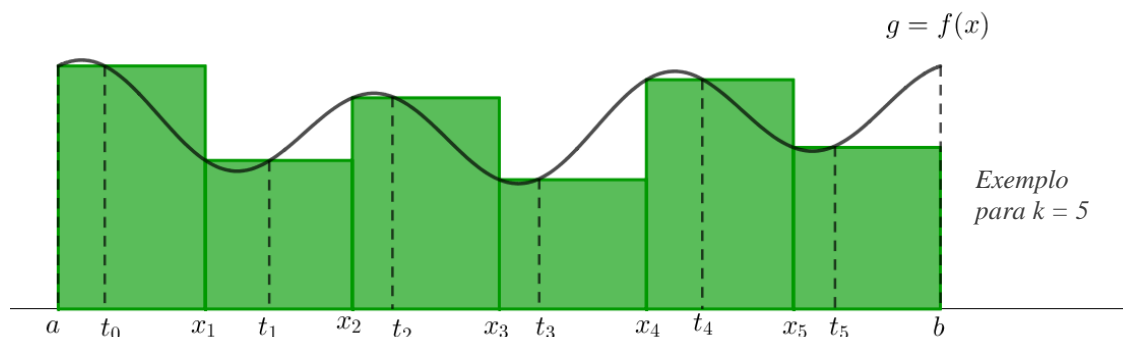
Em outras palavras, uma partição etiquetada é uma partição juntamente com um ponto de cada subintervalo. Dizemos que partição etiquetada $\{Q, J\}$ é um refinamento de $\{P, I\}$ se $Q \subset P$ e $J \subset I$. Definimos então no conjunto A das partições etiquetadas de $[a, b]$ uma relação de ordem parcial (\leq) tal que $\{P, I\} \geq \{Q, J\}$ se e somente se $\{Q, J\}$ é um refinamento de $\{P, I\}$.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função definida em $[a, b]$ que assume valores não-negativos. Dada uma partição etiquetada $\{P, I\}$ de $[a, b]$, uma soma de Riemann de f com respeito a $\{P, I\}$ é dada por: $S(\{P, I\}) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Assim, cada parcela do somatório acima representa a área de um retângulo com altura $f(t_i)$ e comprimento $x_{i+1} - x_i$.

Então temos: Área de $S = \int_a^b f(x)dx$.

Figura 15 – Representação gráfica G_f de uma função g em um sistema cartesiano, com exposição sombreada de regiões retangulares usadas para aproximar a medida da área sob a curva g , em um intervalo $[a, b]$

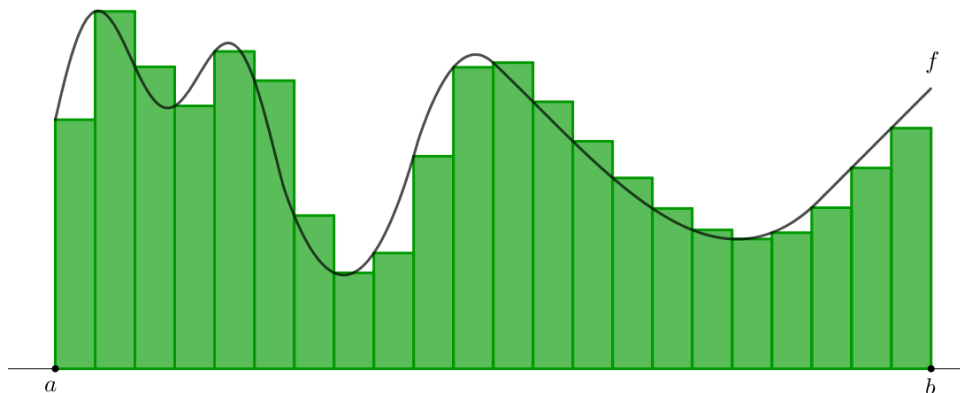


Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

Dizemos que a Integral de Riemann da função f é igual a S se, $\forall \varepsilon > 0$, existe uma partição etiquetada $\{P, I\}$ de $[a, b]$ tal que, para qualquer refinamento $\{Q, J\}$ de $\{P, I\}$, $Q = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $J = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, tenhamos:

$$|S(Q, J) - S| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(y_{i+1} - y_i) - S \right| < \varepsilon$$

Figura 16 – Representação gráfica G_f de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada de regiões retangulares usadas para aproximar a medida da área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

Podemos definir a Integral de Riemann de f como o limite da soma de Riemann em relação a partições cujas normas tendem a zero. Há de se observar, intuitivamente, que quanto mais fina for a partição (isto é, mais próxima de zero for a sua norma), mais próximo da área sob a curva $y = f(x)$ será o valor da Integral da f sobre tal partição.

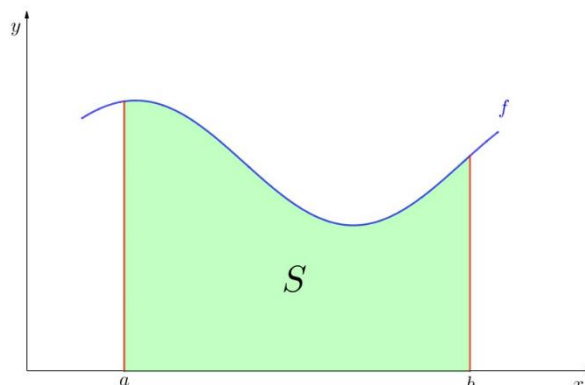
Teorema: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua positiva, então a área da região delimitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (*eixo x*) e pelo gráfico de f é igual à Integral da f .

- **Relação entre a Integral de Riemann e área**

1. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, então a área da região S delimitada pelo gráfico de f , pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\text{área de } S = \int_a^b f(x)dx.$$

Figura 17 – Representação gráfica G_f de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada da região que representa a área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

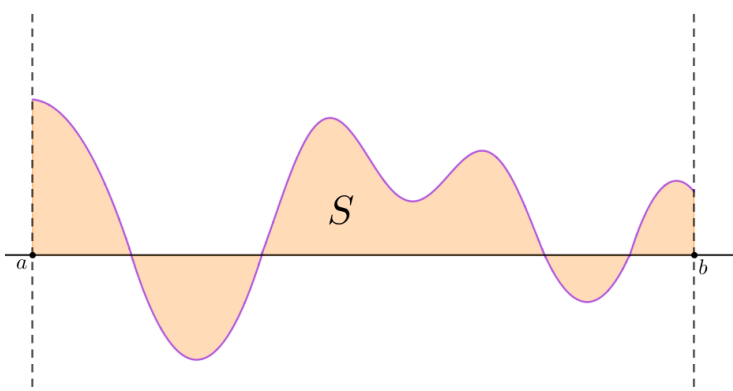
Legenda: S é a região limitada por G_f , $x = a$, $x = b$ e o eixo das abscissas, ou seja,
 $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Essa relação de área é observada a partir da definição de Integral de Riemann.

2. Sem a hipótese de f ser positiva, a área delimitada pelo gráfico de f , pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\text{Área de } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ ou } \text{Área de } S = - \int_a^b f(x) dx.$$

Figura 18 – Representação gráfica G_f de uma função f em um sistema cartesiano, com exposição sombreada da região que S que representa a área sob a curva f , em um intervalo $[a, b]$



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

Podemos considerar também as funções f^+ e f^- , chamadas parte positiva de f e parte negativa de f , respectivamente, dadas por:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

De modo que tenhamos propriedade como: f^+ e f^- , são não-negativas, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$ e, assim, a área anterior pode ser calculada como:

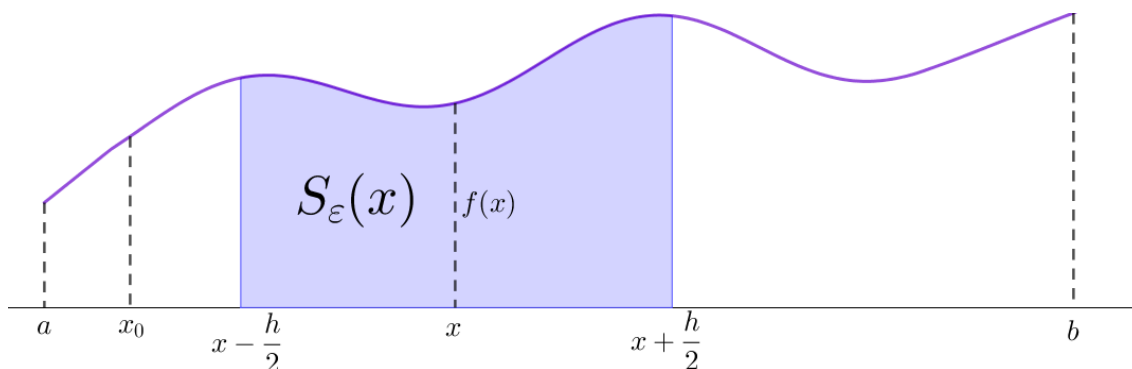
$$\text{Área de } S = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

• Área e Derivabilidade

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Dado $x_0 \in [a, b]$ fixado, defina a aplicação $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; F(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds$, então F é derivável e $F'(x) = f(x)$.

Seja $x \in (a, b)$ e $f: [a, b]$ contínua e positiva, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $h > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall y \in \left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)$.

Figura 19 – Representação gráfica de uma região $S_\varepsilon(x)$ em um intervalo $\left[x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right]$



Fonte: A autora, 2021, por meio do GeoGebra.

Chamando de $S_\varepsilon(x)$ a área acima, por um lado, como $\forall y \in \left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, observa-se que: $h \cdot (f(x) - \varepsilon) \leq \text{Área}(S_\varepsilon(x)) \leq h \cdot (f(x) + \varepsilon)$, por outro lado, observa-se também que a área é, precisamente $F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)$, daí:

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} \leq f(x) + \varepsilon \quad (*)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

Donde segue que:

- F é contínua em x .

$$\text{De fato: } \lim_{h \rightarrow 0} |F(x+h) - f(x)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} h \left[\left| F\left(x + \frac{h}{2}\right) \right| + \varepsilon \right] = 0,$$

Onde na primeira desigualdade que usamos (*), trocando x por $x + \frac{h}{2}$, obtendo

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \leq \max\{|f(x) - \varepsilon|, |f(x) + \varepsilon|\} = |f(x)| + \varepsilon$$

E, para concluir que o limite acima é 0, usamos o fato de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ser limitada.

- $F'(x) = f(x)$

Da relação entre ε e h e usando (*), segue que:

$$f(x) - \varepsilon \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} \leq f(x) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Donde segue que: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} = f(x), \quad (**)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} = f(x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

A separação dos limites em (1) faz sentido, por causa da relação (**), trocando x por $x + \frac{h}{4}$ e h por $\frac{h}{2}$. Portanto, $F' = f$ em (a, b) .

No caso em que f não é necessariamente positiva, basta fazer $f = f^+ - f^-$ e os estudos acima para f^+ e f^- , donde conclui-se que $F' = f$ nesse caso também.

Com isso, concluímos, tomando $x_0 = a$ e $x = b$ que, nas condições de continuidade, a Integral Definida de f , de a até b , representa, uma Integral de Riemann e portanto, uma área nas condições da região.

Apesar da área ser definida axiomáticamente como número e, portanto, a medida de região plana, usualmente, nos livros didáticos do Ensino Básico e em alguns do Ensino Superior considera-se a área como região. Assim, nesta investigação, referenciaremos *área* como uma região plana mensurável e *medida de área* como o número positivo que expressa a medida de uma região.

6.2.2.2 Significados Institucionais da Integral Definida utilizados na proposta didática

No EOS, o significado se relaciona aos sistemas de práticas operacionais e discursivas – institucionais e pessoais – que são operacionalizados por meio de configurações correspondentes – epistêmicas ou cognitivas, referentes ao quadro institucional, culturas e comunidades de prática. Os sistemas práticos e, conseqüentemente, as configurações dos objetos que emergem dessas práticas podem ser organizados em subsistemas (subconfigurações), cada um constituindo um significado parcial do objeto em questão.

Com base em um estudo histórico, epistemológico e didático da Integral, Crisostomo (2012) sistematizou diferentes significados institucionais atribuídos à Integral, considerando a evolução histórica dessa noção e suas conexões com os estudos desenvolvidos na Didática do Cálculo, particularmente, na Didática da Integral. Assim, considerou útil distinguir oito tipos diferentes de configurações epistêmicas da Integral: intuitiva, primitiva, geométrica, soma, aproximada, extramatemática, acumulada e tecnológica. Dessas oito, utilizamos seis como referência para a pesquisa: intuitiva, geométrica, soma, extramatemática, acumulada e tecnológica. Ressalta-se que o contexto desta investigação se assemelha ao contexto de atuação pedagógica da pesquisa de Crisostomo (2012), que consiste na formação de professores de Matemática sobre um tema específico (Integral), no contexto socioprofissional da graduação em Matemática no Brasil.

No Quadro 7, apresentamos uma síntese das configurações epistêmicas, sistematizadas por Crisostomo (2012), com base nos descritores: situações-problema, elementos linguísticos, procedimentos, proposições, definições, argumentos.

Quadro 7 – Síntese das Configurações Epistêmicas da Integral propostas por Crisostomo (2012)

Configuração	Indicadores das Configurações Epistêmicas
<p>(i) Configuração epistêmica intuitiva (CEI)</p> <p>As situações-problema que surgem na CEI são resolvidas de modo que a noção de Integral não é explicitamente utilizada, da forma similar a alguns dos problemas resolvidos por Arquimedes, para introduzir a Integral no ensino universitário de Cálculo, com destaque para o conceito de área de figuras planas entre curvas.</p>	<p>Situações: Encontrar as medidas das áreas de regiões planas e medidas de volumes, utilizando, implicitamente, a ideia de Integral.</p> <p>Procedimentos: Utilização de métodos intuitivos para a resolução de problemas que contemplam o conceito de Integral.</p> <p>Linguagem: Geométrica, ordinária.</p> <p>Conceitos: Áreas, áreas de polígonos, limite, somas inferiores e somas superiores.</p> <p>Proposições: Área de figuras planas. Somas sucessivas. Propriedades de limite e de séries convergentes. Somas de Riemann.</p> <p>Argumentos: Indutivo e dedutivo.</p>
<p>(ii) Configuração Epistêmica Geométrica (CEG)</p> <p>As situações-problema apresentadas na CEG são de natureza geométrica, que se resolvem pela integração, com destaque para encontrar as medidas de área de regiões planas, de volumes de sólidos, de comprimento de arco de uma curva, de área de superfície de revolução.</p>	<p>Situações: Resolução de problemas de natureza geométrica: cálculo de medidas de áreas e de volumes de superfícies de revolução e medidas de comprimentos de arcos.</p> <p>Procedimentos: Análise dos dados do problema, interpretando-os como uma Soma de Riemann. Dedução e cálculo da Integral Definida.</p> <p>Linguagens: Geométrica, algébrica e simbólica.</p> <p>Conceitos: Áreas de regiões planas; área e volume de sólidos de revolução; comprimento de um arco de uma curva.</p> <p>Proposições: Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema do Valor Médio, Regra de Barrow e Princípio de Cavalieri.</p> <p>Argumentos: Dedutivo.</p>
<p>(iii) Configuração Epistêmica de Soma (CES)</p> <p>A principal questão que surge na CES é expressa pela necessidade de formalização e generalização da Integral para uma classe mais ampla de problemas e pela busca do aperfeiçoamento da linguagem e simbologia do Cálculo. Destacam-se a formalização do conceito de Integral, com início na noção de limite; o cálculo da Integral, realizado como limite das somas de Riemann ou utilizando a ideia das somas de Riemann para deduzir a Integral Definida, que se pretende calcular, a começar de cada situação-problema.</p>	<p>Situações: Necessidade de formalização e generalização da Integral para uma classe mais ampla de problemas em busca do aperfeiçoamento da linguagem e simbolismo do Cálculo.</p> <p>Procedimentos: O cálculo da Integral é feito como o limite das somas de Riemann ou utilizando essa a ideia para deduzir a Integral Definida que se pretende calcular.</p> <p>Linguagens: Analítica, algébrica e simbólica.</p> <p>Conceitos: Integral Definida, função, limite, infinitesimal, continuidade, funções descontinuas, convergência de série, diferencial e derivada.</p> <p>Proposições: Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema do Valor Médio, continuidade de uma função, as propriedades da integral e uma Soma de Riemann e Regra de Barrow.</p> <p>Argumentos: Dedutivo.</p>

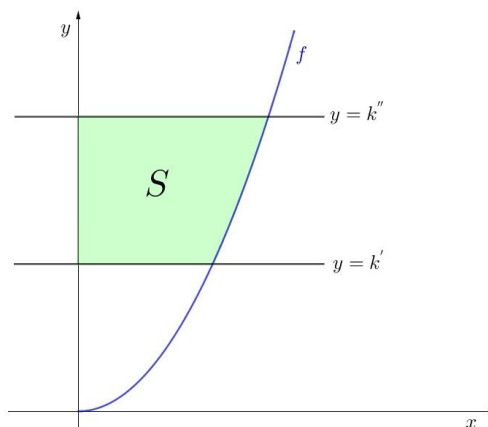
<p>(iv) Configuração Epistêmica Extramatemática (CEE)</p> <p>As situações-problema que surgem na CEE dão destaque para conceitos relacionados às áreas de aplicação da Integral em contextos extramatemáticos (Física, Engenharia, Biologia, entre outros), que são resolvidos por meio da integração. Algumas das situações-problema extramatemáticas foram abordadas antes do desenvolvimento do Cálculo, especialmente na Física. No entanto, o reconhecimento da necessidade de se requererem os conceitos relacionados à Integral Definida para modelar uma situação-problema não ocorre facilmente pelos estudantes de Cálculo no primeiro ano do ensino universitário.</p>	<p>Situações: Como aplicar a Integral na resolução de problemas extramatemáticos.</p> <p>Procedimentos: Aplicação da integral na resolução de problemas em outras áreas do conhecimento que não sejam a Matemática.</p> <p>Linguagens: Algébrica, simbólica e gráfica.</p> <p>Conceitos: Conceitos extramatemáticos: pressão, força, trabalho, momento, centro de massa, excedente do consumidor, distribuição normal, etc.</p> <p>Proposições: Teorema Fundamental do Cálculo, Soma de Riemann, Regra de Barrow.</p> <p>Argumentos: Intuitivo e dedutivo.</p>
<p>(vi) Configuração Epistêmica Acumulada (CEAc)</p> <p>O principal problema presente na CEAc é baseado no estudo de mudança e movimento, sendo que essa configuração consiste em abordar o cálculo referente à mudança cumulativa de uma função, que representa uma taxa de variação em um determinado intervalo de tempo. A ênfase está no conceito da Integral Definida e não na memorização das “regras” que relacionam as noções matemáticas e extramatemáticas que emergem nas aplicações da Integral.</p>	<p>Situações: Com base no estudo da mudança e do movimento, consiste em calcular a mudança acumulada de uma função que representa uma taxa de variação em um determinado intervalo de tempo.</p> <p>Procedimentos: Deduzir a integral definida relacionado com o problema, interpretando-o como uma mudança acumulada.</p> <p>Linguagens: Gráfica, algébrica e computacional.</p> <p>Conceitos: Alteração acumulada, função, partição, taxa de variação, limite, derivada, área, volume, trabalho, velocidade, etc.</p> <p>Proposições: Propriedades da Integral e Teorema do Valor Médio.</p> <p>Argumentos: Intuitivos baseados na visualização.</p>
<p>(vii) Configuração Epistêmica Tecnológica (CET)</p> <p>As situações-problema apresentadas na CET consistem no uso de tecnologias na resolução de problemas matemáticos e extramatemáticos, por meio da integração.</p>	<p>Situações: Como utilizar tecnologias na resolução de problemas matemáticos e extra matemáticos por meio da integração.</p> <p>Procedimentos: Utilização de tecnologias na resolução de problemas que requerem a aplicação da Integral.</p> <p>Linguagens: Tecnológico, algébrico, simbólico e gráfico.</p> <p>Conceitos: geométricos (área, volume, comprimento etc.) e extramatemáticos.</p> <p>Proposições: Teorema Fundamental do Cálculo, Somas de Riemann, Regra de Barrow.</p> <p>Argumentos: Intuitivo</p>

Fonte: Adaptado de Crisostomo, 2012

Elaboramos as atividades constituintes da proposta didática da pesquisa a partir dos conceitos básicos da Integral de Riemann de uma função $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, em que \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais e I denota um intervalo fechado em \mathbb{R} , I não degenerado. Para efeitos de motivação, mobilizamos o problema clássico do cálculo de medida da área de uma região S do plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, limitada por uma curva fechada simples, sendo a fronteira de S constituída pela representação gráfica da função f , ou seja, $G_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y = f(x)\}$; além de segmentos de retas verticais $x = a, x = b$, por exemplo, sendo a e b os extremos de I ; e o eixo das abscissas, conforme Figura 17, apresentada anteriormente.

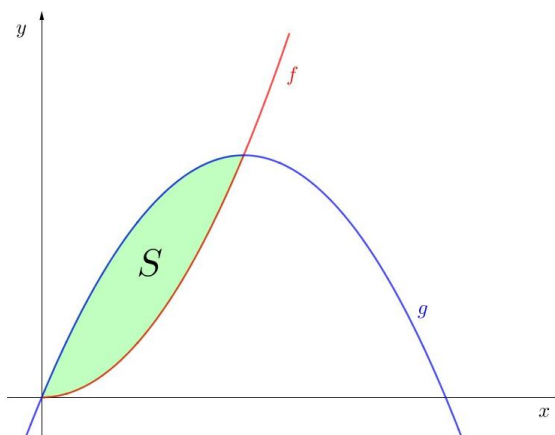
Para efeitos do que se costuma mobilizar para as práticas matemáticas que levam a um dos significados parciais da Integral de Riemann, como a medida da área de uma região limitada do plano, cuja fronteira é uma curva fechada simples, consideramos três casos para a definição da região S , a saber, o caso que foi sobredito anteriormente, representado na Figura 17; o caso em que S está limitada pelo conjunto G_f , por duas retas horizontais $y = k, k \in \mathbb{R}$ e o eixo das ordenadas (Figura 20); e o caso em que a fronteira de S está formada pelas representações gráficas de duas funções consideradas (Figura 21).

Figura 20 – Representação gráfica da região S limitada pelo conjunto G_f , por duas retas horizontais $y = k, k \in \mathbb{R}$ e o eixo das ordenadas



Fonte: A autora, 2021, via uso do GeoGebra

Figura 21 – Representação gráfica da região S , formada pelas representações gráficas de duas funções f e g



Fonte: A autora, 2021, via uso do GeoGebra.

6.2.3 Trajetória Didática em cada Unidade de Estudo

Apresentamos no Quadro 8 a configuração epistêmica-ecológica da proposta didática, por Unidade de Estudo, identificando as configurações epistêmicas de Crisostomo (2012) que foram utilizadas na exploração da Integral Definida em cada uma das atividades.

Quadro 8 – Configuração Epistêmica por Unidade de Estudo

Encontro	Unidades de Estudo	Atividades	Objetivos gerais	Configurações epistêmicas mobilizadas
1º	I) Institucionalização do conceito de Integral Definida	1. Introdução à Definição de Integral de Riemann	Estimar medidas de áreas.	Intuitiva Geométrica Soma Tecnológica
2º		2. Sobre os conceitos da Integral de Riemann para o cálculo de medida de área e a compreensão do conceito de Integral Definida.	Institucionalizar o conceito da Integral Definida, ampliando as reflexões acerca dos significados parciais da Integral Definida de funções contínuas em que $f(x) < 0$, em determinado intervalo.	Intuitiva Geométrica Soma Tecnológica
3º	II) Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos	3. Aplicações da Integral na Física – Problemas de movimento	Relacionar conceitos da Física, como deslocamento e distância, com conhecimentos do Cálculo, por meio do uso da Integral Definida.	Intuitiva Geométrica Soma Tecnológica Acumulada Extramatemática

Fonte: A autora, 2021

Na quinta coluna do Quadro 8, as configurações epistêmicas são as apresentadas por Crisostomo (2012), sendo as configurações intuitiva, geométrica, tecnológica e soma abordadas em todas as atividades da proposta didática; a extramatemática e acumulada são contempladas na Atividade 3. Expomos a seguir como essas configurações estão impulsionadas na proposta didática.

Os aspectos da *configuração epistêmica intuitiva* são contemplados, inicialmente, nas duas primeiras situações-problema propostas na Unidade 1. Em um primeiro momento, a noção de Integral Definida é trabalhada intuitivamente, sendo interpretada como a medida da área de uma região. Em seguida, as tarefas ou configurações remetem ao uso das noções de infinito e limite, fazendo uma aproximação da medida da área usando as Somas de Riemann no processo de resolução da situação-problema. Embora, ao final das atividades, busca-se a formalização do conceito de Integral Definida, na introdução dessas, há a disposição de tarefas que remetem a respostas informais. É estimulada a produção de argumentos dedutivos e indutivos. A atividade da Unidade 2 traz uma aplicação no contexto da Física que, no início, é tratada intuitivamente.

A *configuração epistêmica geométrica* se faz presente nas atividades das duas Unidades. A Integral Definida é utilizada para calcular a medida da área de uma região plana na primeira atividade, caracterizando a natureza geométrica dessa situação-problema, que também se verifica na Atividade 2. A Atividade 3 da Unidade 2 traz também um apelo à interpretação geométrica que, em todas as atividades, é apoiada pelo uso do *software* GeoGebra, na construção de retângulos sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica de uma função contínua f e o eixo das abscissas em um intervalo $[a, b]$. Essa prática auxilia na análise dos dados das situações-problema e promove a interpretação das soluções dessas como uma Soma de Riemann.

A solução de todas as situações-problema propostas é apoiada por um processo construtivo, realizado com o uso do GeoGebra, caracterizando a *configuração epistêmica tecnológica*. A intenção é que a visualização, propiciada pelo uso de *software*, possa auxiliar na compreensão dos estudantes. Importante destacar que o desenho da proposta didática contempla o uso de tecnologias digitais como contribuição para o estabelecimento de distintas representações e de experimentação, articulação de registros gráficos e algébricos, assim como para operacionalizar alguns resultados institucionalizados nas atividades propostas.

A busca pelo aprimoramento da linguagem e compreensão da simbologia do Cálculo é contemplada na estrutura das atividades que compõem as duas unidades, enfatizando a *configuração epistêmica soma*. As atividades abordam a noção de Limite, sendo o cálculo da

Integral Definida realizado como o Limite de uma Soma de Riemann em cada situação-problema. Conforme considera Crisostomo (2012), a noção da Integral desenvolvida atualmente no Ensino Superior, especificamente no contexto da formação de professores de Matemática no Brasil, baseia-se na integral de Cauchy-Riemann. É imperativo que o conteúdo e a metodologia de ensino desse tópico do Cálculo sejam adaptados às necessidades dos estudantes.

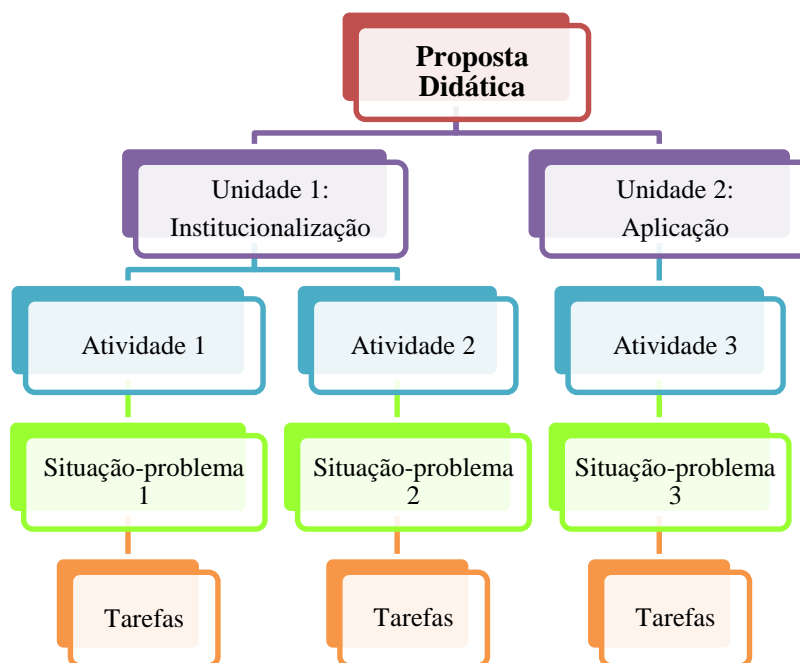
A Unidade 2 traz uma situação-problema que contempla a interdisciplinaridade da Matemática com outras Ciências, aqui denominadas extramatemáticas, e requer conceitos e procedimentos de diferentes áreas de conhecimento. A Atividade 3 dessa Unidade abrange a *configuração epistêmica extramatemática*. Não é fácil para o estudante resolver problemas, especialmente na interdisciplinaridade, reconhecendo a relação do conteúdo da Matemática com uma situação problematizada, conforme argumenta Crisostomo (2012). A Unidade 2, portanto, pode colaborar para a mobilização desse tipo de situações – a Atividade 3 envolve uma aplicação na Física.

A *configuração epistêmica acumulada*, que se relaciona com os problemas do Cálculo que envolvem mudança e movimento, faz-se presente na Atividade 3, especificamente, distância percorrida e deslocamento – conceitos que os estudantes, muitas vezes, confundem e que a análise matemática pode esclarecer, sendo que distância e deslocamento, dependendo do sistema de referência, podem representar um mesmo resultado ou não. As linguagens algébrica, gráfica e computacional predominam nessas atividades, das quais emergem o conceito de mudança acumulada, principalmente, nas atividades relacionadas ao movimento na Física.

Apresentamos, nas seções seguintes, a configuração epistêmica-ecológica por *Unidade de Estudo*, que são compostas por atividades conforme explicitação no Quadro 8. Descrevemos as *atividades* que compõem cada Unidade de Estudo, como foram aplicadas aos estudantes da Licenciatura em Matemática da Unimontes, com uma descrição geral dessas, destacando os objetivos gerais, específicos e os principais objetos e processos abordados em cada Unidade.

A Figura 22 explicita a organização em que cada *atividade* foi estruturada.

Figura 22 – Organização da Proposta Didática para o estudo da Integral Definida.



Fonte: A autora, 2021

6.2.3.1 Unidade 1: Institucionalização do conceito de Integral Definida

Esta Unidade é composta pela primeira e segunda atividades implementadas, presencialmente, com os estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros. Tais atividades buscam potencializar a compreensão do conceito referente à medida de área de uma região, limitada por uma curva fechada simples, que, necessariamente, não é um polígono. Procuramos mobilizar o conhecimento do conceito de Integral Definida em dois aspectos do desenvolvimento de competências a serem desenvolvidas no ensino de Integral: competências relacionadas às habilidades de aplicação de conhecimentos para resolução de problemas, cuja modelagem matemática remonta às origens do conceito de Integral de Riemann; seguidas das competências atinentes ao desenvolvimento de atitudes e de valores, os quais alcançam os aspectos humanos e sociais na formação profissional de futuros professores de Matemática.

Apresentamos duas situações-problema nesta Unidade de Estudo, estabelecidas desde perspectivas gráfica, algébrica e numérica, que abordam maneiras de se calcularem aproximações de medida de uma área S que remete ao método da exaustão, com erros que podem ser tipificados por um valor abaixo da medida da área (aproximação por falta) ou, o contrário disso, quando se trata da aproximação por excesso. O mais comum para o trabalho de

calcular a medida da área S é tratar, intuitivamente, o cálculo aproximado dessa medida, considerando uma coleção de retângulos, cujas medidas das bases são iguais às medidas dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, contidos no domínio da função f , isto é, consideramos uma partição do domínio $I = [a, b]$, e que, para a medida da altura do retângulo, escolhe-se o valor $f(c_i)$ em que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Para efeitos de rotinas computacionais, lembramos que o GeoGebra as suporta com boa qualidade de desempenho.

Embora tenhamos optado por trabalhar com partições regulares – intervalo $I = [a, b]$ dividido em subintervalos de igual comprimento – há situações nas quais é mais vantajoso trabalhar com intervalos de comprimentos diferentes. Nesse caso, existem métodos de integração numérica que utilizam os subintervalos de comprimentos desiguais, no entanto, essa característica não foi abordada nas atividades presentes nesta investigação.

A Atividade 1 envolveu um objeto de experimento, um parque da cidade de Montes Claros, espaço público presente no cotidiano dos estudantes participantes da pesquisa, bem como da população dessa cidade. O fenômeno a ser estudado se tratava de obras de reformas nesse espaço, o que demandou a necessidade de se conhecer a medida da área desse parque.

A situação-problema, constante nessa primeira atividade, exigiu elaborar uma sequência ordenada de tarefas, em que o desenvolvimento de um estudo experimental conduziria à melhor precisão, para que o cálculo da medida da área em comento pudesse ser garantido. Nesse sentido, uma sequência de práticas, incluindo o uso de mapas disponíveis no *Google Maps*, assim como uso do GeoGebra serviram de ferramenta importante para o sistema de modelagem computacional daquela.

Observamos que, com a evolução dos recursos digitais, é cada vez mais comum a otimização de resolução de problemas pela via da modelagem computacional e sistemas, em que o uso de ferramentas da Computação e da Matemática se alia para realização de experimentos que precedem visitas e tarefas presenciais. Essa maneira de atuar tem garantido a otimização de tempo e de esforços, e a diminuição de gastos desnecessários para a busca de melhores soluções de problemas de diferentes áreas de conhecimento.

Retomando o tema de interesse da Unidade 1, a Integral Definida é um conceito abstrato, mas com potencial para ser compreendida mediante a realização de atividades que possam atribuir (re)significações no campo perceptivo e, portanto, dar lugar a avanços para a compreensão dos aspectos abstratos, intrínsecos e naturais dos objetos matemáticos.


Resumidamente, a situação-problema proposta na Atividade 1 incorpora a transferência de uma imagem de um mapa do espaço a ser estudado com o aplicativo computacional, no caso o GeoGebra. Nesse *software*, por meio da escolha de pontos pertencentes à fronteira da região

que encerra a imagem do mapa, é possível trabalhar com a aproximação de uma função³¹ que melhor representa a situação da realidade a ser investigada.

Referente ao conceito de medida de área, vale ressaltar que, conforme Carginin (2013), é preciso se ater ao fato de que essa aplicação da Integral Definida deve considerar, como suporte, as experimentações, especialmente nos casos não contemplados pela Geometria Euclidiana, como é o caso de áreas de superfícies cujas fronteiras não se restringem a polígonos.

Apresentamos a Atividade 1 e as respectivas sequências de tarefas para iniciar o estudo de Integral Definida, no sentido de Riemann, conforme descrito no Quadro 9.

Quadro 9 – Atividade 1 da Unidade 1, conforme foi apresentada aos estudantes

Atividade 1: Introdução à definição de Integral de Riemann	
A atividade é constituída de tarefas experimentais com o uso do GeoGebra para o estudo de uma Soma de Riemann, como ferramenta para o cálculo de medida de área.	
Objetivos: Estimar medidas de áreas, utilizando aproximações finitas, usando como ferramenta tecnológica o <i>software</i> GeoGebra, considerando uma função f contínua, em um determinado intervalo, em que $f(x) \geq 0$.	
Metodologia: Utilizar as aproximações finitas com o GeoGebra.	
Duração prevista: 3 h/a	
Situação-Problema 1: Suponhamos que a prefeitura da cidade de Montes Claros necessite de que uma determinada empresa faça uma reforma no Parque Municipal Guimarães Rosa, localizado na Avenida José Corrêa Machado, bairro Ibituruna, e, para isso, precisa obter a medida da área desse Parque. Como obter a medida aproximada de sua área tendo como referência o mapa gerado pelo aplicativo <i>Google Maps</i> ?	
Vamos trabalhar para encontrar a medida dessa área.	
<ul style="list-style-type: none"> • Abra o <i>software</i> GeoGebra e siga os seguintes passos: 	
Passos	Procedimentos a serem realizados no GeoGebra; reflexões e questionamentos a serem respondidos.
1º	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Acesse a 10ª ferramenta da janela do GeoGebra e escolha a guia “inserir imagem” . Selecione a figura <code>parque_Guimarães_Rosa</code>, localizada na área de trabalho do computador. Essa figura foi obtida usando o <i>Google Maps</i>. ▪ Posicione a figura da forma apresentada abaixo, isto é, de modo que o lado do Parque formado por um segmento de reta coincida com o eixo das abscissas e que o ponto A, já presente na figura, coincida com a origem do sistema cartesiano.

³¹ Em geral, o GeoGebra usa a função *spline* para aproximar uma curva, passando pelos pontos escolhidos, à qual, na maior parte dos casos, consiste em um polinômio de grau 3. A aproximação se torna com melhor precisão à medida em que se escolhem maiores quantidades de pontos, pelos quais devem passar a curva. Polinômios são funções contínuas, sendo a continuidade uma propriedade importante que deve satisfazer as condições de funções Riemann integráveis.

Figura 1: Imagem do Parque ajustada ao eixo das abscissas



Fonte: Software GeoGebra

- Clique com o botão direito do *mouse* sobre a figura e especifique “fixar objeto”.

2º

- Trace uma reta que coincida com o eixo x. Qual será a equação dessa reta?
- Crie 5 pontos sobre a figura na extensão da curva presente no mapa do Parque. Lembrando que: a superfície do Parque está sendo representada na cor esverdeada;
- Vamos criar uma lista com esses 5 pontos. Para isso, verifique, na janela de álgebra, o nome dado a esses pontos. Digite na linha de entrada: $lista = \{C,D,E,F,G\}$;
- Vamos criar um polinômio que passe por esses pontos. Para isso, digite na linha de entrada: $Polinômio(Lista)$. Escreva, abaixo, a equação do polinômio obtido.
- A imagem seguinte pode servir de modelo para os passos anteriores. Observe se sua construção está de acordo com essa imagem.

Figura 2: Imagem do Parque com pontos sob sua extensão



Fonte: Software GeoGebra

3º

- Observe que o ponto A se encontra na extremidade esquerda da figura que representa a superfície do Parque. Crie um ponto na extremidade direita, um pouco antes do ponto

B, também sob o eixo das abscissas. Use a ferramenta Ponto em Objeto  .

Qual nome foi dado a esse ponto?

Para padronizar os nomes dos elementos da construção, mude o nome desse ponto para H;


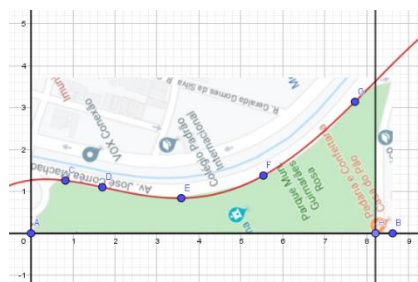
- Trace duas retas perpendiculares à reta $y = 0$, sendo uma reta passando pelo ponto A e outra reta passando pelo ponto H. Use a ferramenta Reta Perpendicular  ;
- Observe que vamos obter apenas uma medida aproximada da área, uma vez que parte da superfície do Parque está fora da região que demarcamos inicialmente, assim como existem dentro dessa região superfícies que não são compostas pela superfície do Parque. No entanto, com o aprofundamento de nossos estudos, poderemos medir a área das mais diversas figuras planas, também de figuras espaciais;
- Veja se sua construção está de acordo com a imagem a seguir:

Figura 3: Área do Parque delimitada pelo polinômio e pelas retas criadas



Fonte: *Software GeoGebra*

4º Vamos aproximar a região da área do Parque utilizando retângulos e depois vamos tomar o limite das medidas das áreas desses retângulos enquanto aumentamos o número deles.

- Após ser feita toda a construção da figura, utilize o seguinte comando na linha de entrada:


SomaRetângulos (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>, <Abscissa Base para o Retângulo Inicial>)

Onde:

- <Função> é a representação algébrica da curva construída para delimitar a região que representa a superfície do Parque. Digite a letra correspondente à função obtida que representa essa curva. Veja na janela de álgebra;
- <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final> são as abscissas dos pontos de interseção entre as retas plotadas anteriormente e o eixo x . Insira, por exemplo, $x(A)$; $x(H)$. Verifique na janela de Álgebra os pontos que serão utilizados no seu caso. Esse será o intervalo considerado para o cálculo da medida da área;
- <Número de Retângulos>. Digite n para o número de retângulos que usaremos para fazer a aproximação da medida da área;
- Em <Abscissa Base para o Retângulo Inicial> poderemos utilizar 0 ou 1, sendo zero para considerar a extremidade esquerda do subintervalo que irá conter a base do retângulo ou um para considerar a extremidade direita do subintervalo. Nesse caso específico, digite 0 para usarmos a extremidade esquerda do intervalo que irá conter a base do retângulo.

- O comando anterior deve ser digitado da seguinte forma:

SomaRetângulos(g , $x(A)$, $x(H)$, n , 0)

- Podemos notar que foi criado um controle deslizante $\frac{a=2}{\bullet}$ para variarmos o número de retângulos. Clique com o botão direito sob esse controle  e, em *Propriedades*, altere o número mínimo de retângulos para 1; máximo para 100 e incremento 1;
- Veja que se considerarmos o número de retângulos $n = 1$, a medida da área exibida na janela de álgebra terá um erro muito grande para medida da área do Parque.

5º ▪ Movimentando o controle deslizante, observe o número de retângulos obtidos. Reflita e responda aos questionamentos que se seguem:

1. O que pode ser observado a respeito da ocupação física dos retângulos sobre a área do Parque, à medida que aumentamos o número de retângulos?
2. O que acontece com a medida da base de cada um dos retângulos, quando aumentamos a quantidade total deles?

3. O que acontece com a medida da área de cada um dos retângulos, quando aumentamos a quantidade total deles?
4. Na tarefa anterior, o que representa cada um dos n -ésimos retângulos inscritos sobre a curva?
5. Chamando de A_1 a medida da área do primeiro retângulo, A_2 a medida da área do segundo retângulo e A_n a medida da área do n -ésimo retângulo, o que representa o valor $A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$?
6. Qual seria o número de retângulos necessários para cobrir toda a área da figura abaixo da curva?
7. Vamos lembrar uma notação matemática padrão para abreviar grandes somas. Essa é a chamada “notação sigma”, porque utiliza a letra grega Σ (sigma).

Assim, podemos escrever a soma anterior como:

$\sum_{k=1}^n A_k$, que se lê: Soma de A_k , onde k varia de 1 a n .

A expressão dada indica que estamos anotando cada um dos números A_k , quando o índice k varia de 1 a n , sendo $n > 0$, ou seja, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, e depois adicionamos todos esses elementos.

$$\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$$

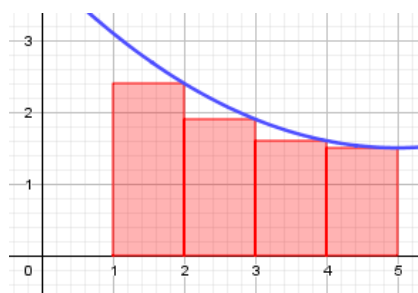
Então, escrevemos $k = 1$ abaixo de Σ e n acima para dizer que a soma começa com o termo A_1 e termina com o termo A_n . A letra k é usada, nesse caso, como *índice de somatório*. Qualquer outra letra (i ou j , por exemplo) poderia ser usada com o mesmo propósito.

8. Considere: $x(A) = a$; $x(H) = b$, onde A e H são os pontos determinados no passo 3.
 - a. Para $n = 1$, o que a razão $\frac{|b-a|}{n}$ representa na figura?
 - b. Considerando $n = 2$, o que $\frac{|b-a|}{n}$ irá representar?
 - c. Para $n = 100$, o que podemos dizer de $\frac{|b-a|}{n}$?
 - d. Observe que à medida que se altera o n , a medida da base dos retângulos divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. A medida desses subintervalos chamaremos de Δx .

Assim: $\frac{|b-a|}{n} = \Delta x$

Para exemplificar, observe a figura abaixo e responda ao questionamento que se segue.

Figura 5: Soma de Riemann Inferior de uma função f no intervalo $[1, 5]$



Fonte: Software GeoGebra

No intervalo de $[1,5]$, ao utilizarmos $n = 4$ (4 subintervalos e, conseqüentemente, 4 retângulos), teremos a medida Δx igual a qual valor?

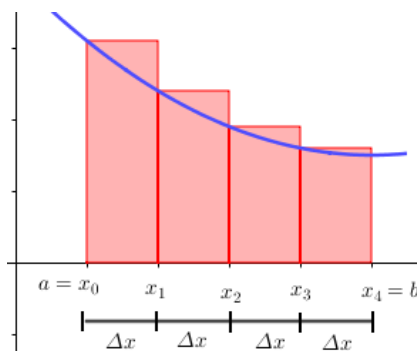
Logo, a medida do comprimento de cada subintervalo, que representa a medida da base de um retângulo, será constante e de valor unitário. Isso permite inferir que:

$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$; e de um modo geral:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, \text{ onde } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

De forma genérica, ilustramos os subintervalos destacados no intervalo $[a, b]$:

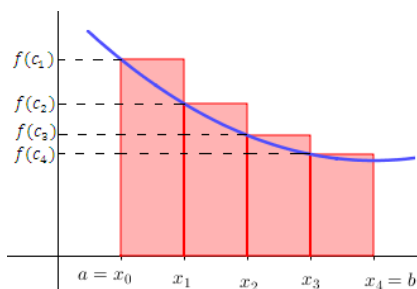
Figura 6: Subintervalos de $[a, b]$ com medida de comprimento Δx



Fonte: Software GeoGebra

- e. Observe, na figura seguinte, que existe um ponto C_1 , pertencente ao intervalo $[x_0, x_1]$, cuja ordenada tem valor máximo nesse intervalo. Chamaremos a abscissa desse ponto C_1 , onde a ordenada é máxima, de c_1 .

Figura 7: Alturas dos retângulos dadas por $f(c_i)$, com $i = 1, 2, 3, 4$



Fonte: Software GeoGebra

Assim, geometricamente, o que representa $f(c_1)$, em relação ao primeiro retângulo que tem como base o segmento $\overline{x_0x_1}$?

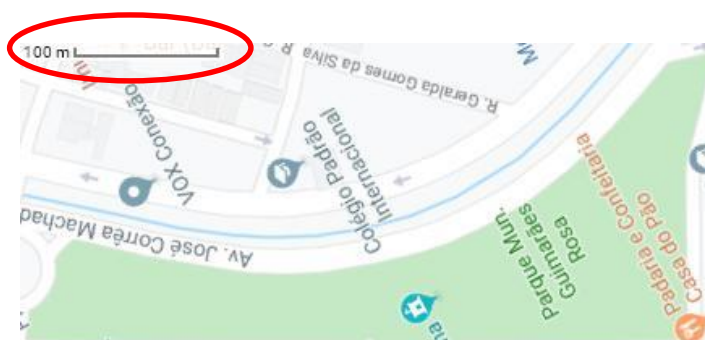
- f. Como pode ser obtida a medida da área do primeiro retângulo (A_1), de forma genérica?
- g. Assim como no primeiro retângulo, pode ser calculada a medida da área dos demais retângulos, ao estabelecer $c_2 \in [x_1, x_2]$, tal que $f(c_2)$ seja a ordenada máxima do intervalo. Assim, qual será a medida da área do segundo retângulo?
- h. Agora, vamos refletir em algo que se estende para os n subintervalos que delimitam a base de cada um dos retângulos até chegar ao n -ésimo intervalo, onde temos:

$$A_n = \frac{|b - a|}{n} * f(c_n)$$

Assim, a soma das medidas das áreas dos retângulos (R_n), como já vimos, será:

	$R_n = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$ <p>Que pode ser representado ainda por:</p> $R_n = \Delta x * f(c_1) + \Delta x * f(c_2) + \dots + \Delta x * f(c_i) + \dots + \Delta x * f(c_n)$ <p>Lembrando que: $\Delta x = \frac{ b-a }{n}$</p> <p>i. Como podemos escrever a soma acima, de forma genérica, usando a notação de somatório (Σ)?</p> <p>9. Observe, na sua construção no GeoGebra, a altura de cada um dos retângulos dispostos. Para $n = 2, n = 3, n = 100$. Como podemos representar, de forma genérica, a medida dessa altura em função da curva que delimita a área?</p> <p>10. Como podemos representar, de forma genérica, a medida da área de cada um dos retângulos?</p> <p>11. Agora, reflita e responda: Como escrever o somatório $\sum_{k=1}^n A_k$ em função de x e Δx.</p> <p>12. O que representa a soma das medidas das áreas de infinitos retângulos (R_n), dispostos abaixo da representação gráfica da função dada, tanto no contexto matemático, quanto no contexto físico?</p> <p>13. O que foi possível concluir quando alteramos o parâmetro de quantidade de retângulos para um número maior de retângulos?</p> <p>14. Vamos lembrar que: Uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, com uma soma parcial de ordem n, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_n$, converge para a soma S, se S é um número finito tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ e, nesse caso, escrevemos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.</p> <p>Podemos entender que a medida da área da região limitada pela representação gráfica da função que representa um dos lados do Parque, e pelo eixo x, considerando um intervalo específico, corresponde ao limite das somas das medidas das áreas dos retângulos, quando o número desses tende a infinito.</p> <p>Como podemos escrever isso algebricamente?</p> <p>15. Na situação-problema proposta, se temos definida uma função $R: N \rightarrow R_n$ tal que, se existe R tal que $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$, então, podemos dizer que R é a medida da área da região delimitada pela curva, pelas retas $x = a, x = b, y = 0$, em um intervalo $[a, b]$.</p> <p>Assim sendo, qual o objeto matemático podemos utilizar para resumir a notação que representa o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, observados na representação geométrica feita no GeoGebra?</p>
6º	<p>Agora que já estudamos como medir áreas de superfícies irregulares, vamos verificar se a medida da área encontrada nos cálculos para o Parque Guimarães Rosa coincide com a medida real de sua área.</p> <p>Observação: Por informações prévias, obtidas na <i>Web</i>, sabemos que a medida da área do Parque Guimarães Rosa é de, aproximadamente, 35.000 m^2.</p> <p>Fonte: (sítio Gazeta Norte-mineira https://gazanortemineira.com.br/noticias/cidade/prefeitura-reinaugura-parque-guimaraes-rosa)</p> <p>Então, vamos verificar se a medida da área encontrada com a utilização do <i>software</i> GeoGebra se aproxima desse valor. Para isso, observe que no canto superior esquerdo da imagem da área do Parque, a qual inserimos no GeoGebra, existe uma escala onde está especificado que o segmento de reta na imagem equivale a exatamente 100 m na distância real, conforme podemos observar na imagem seguinte.</p>

Figura 8: Parque Guimarães Rosa com indicador de escala



Fonte: Google Maps

16. Meça esse segmento, que representa a escala na figura, utilizando a ferramenta *Distância*, *Comprimento* ou *Perímetro* ^{cm}. Assim, estabeleça uma escala de centímetros para metros.

17. Encontre uma razão de medida de área proporcional à razão de medida de comprimento.

18. Use uma regra de três simples, relacionando a razão da escala da medida da área do Parque informada e a medida da área encontrada no GeoGebra, ao utilizar um número grande de retângulos, no comando *SomaRetângulos*, com a medida real da área que desejamos encontrar. Assim, encontre e registre a medida real da área do Parque, encontrada por meio das construções realizadas no GeoGebra.

19. Verifique qual a diferença da medida de área encontrada na realização da tarefa, com o suporte do GeoGebra e a medida apresentada, por meio das informações da *Web*.

20. Esse erro é de quantos por cento?

- Nota: Como informação adicional, esclarecemos que esse erro pode ter relação com áreas que foram invadidas no Parque Guimarães Rosa e que não constam no mapa atual do parque. Como curiosidade, vocês podem acessar a matéria “Áreas invadidas do parque Guimarães Rosa estão sendo liberadas pela Prefeitura” pelo endereço eletrônico <https://portal.montesclaros.mg.gov.br/noticia/meio-ambiente/areas-invadidas-do-parque-guimaraes-rosa-estao-sendo-liberadas-pela-prefeitura>.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Nesta primeira atividade são abordados termos importantes para a compreensão do conceito da Integral Definida, no sentido de Riemann, tais como somatório, intervalos e subintervalos, área, séries, somas sucessivas, entre outros. A atividade apresenta partição de intervalos e subintervalos; possibilita o trabalho com a divisão dos intervalos em partes infinitamente pequenas; calcula o somatório das medidas de áreas dos retângulos aproximantes³²; usa o limite desse somatório com a quantidade de retângulos tendendo a infinito; esclarece em que consiste o limitante inferior e superior em um somatório; e, por fim, leva à notação desenvolvida por Leibniz para a Integral Definida.

A referida atividade traz sequências A_n de aproximações da medida da área A , com a

³² Denominamos *retângulos aproximantes*, os n -ésimos retângulos que compõem uma Soma de Riemann.

noção de limite de A_n e com o valor da medida da área A , de modo que o estudante possa trabalhar com os conceitos intuitivos da Integral Definida, como partições de uma região, somatório de partições de uma região, aproximações de medidas, entre outros, por intermédio do cálculo da medida da área de uma região, a fim de compreender o processo de cálculo dessa medida e fazer relações com registros algébricos.

Ainda que a motivação inicial leve o estudante a permanecer no contexto das funções, em que $f(x) \geq 0$, o processo de aproximação da medida da área da região compreendida entre a representação gráfica de f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, pode evoluir para o âmbito das funções em que $f(x) < 0$, em um intervalo específico.

Para o segundo encontro, o foco continua na institucionalização do conceito de Integral Definida. Levamos em conta o que considera Orton (1983) ao dispor que os fundamentos do Cálculo devem ser retomados, muitas vezes, ao longo da formação do estudante, sendo que a primeira abordagem pode ser realizada informalmente e cada reconstrução pode ter um rigor maior e apresentar uma melhor formalização do que a anterior. Ainda, Czarnocha *et al.* (2001) indicam que a coordenação entre o esquema visual das Somas de Riemann e o esquema de limite de seqüências numéricas é necessária para um bom entendimento do conceito de Integral. Além disso, propõe que seqüências e seus limites sejam abordados intensivamente, antes das Somas de Riemann.

A Atividade 2, nessa perspectiva, amplia o estudo para possibilitar o aprimoramento da percepção dos estudantes acerca do significado do conceito de Integral Definida, no sentido de Riemann. A situação-problema proposta nessa atividade está enquadrada em um contexto intramatemático, em que se faz uma interpretação da Integral de uma função contínua f , com $f(x) < 0$ em um intervalo $[a, b]$. Intentamos possibilitar aos estudantes a revisão do conceito da Integral Definida e a familiarização com os símbolos da notação matemática referente a esse conceito, assim como verificar se os conceitos trabalhados na Atividade 1 foram compreendidos por eles. No Quadro 10, fazemos a descrição dessa atividade.

Quadro 10 – Atividade 2 da Unidade 1, conforme foi apresentada aos estudantes

<p>Atividade 2: Aprimorando a compreensão do conceito de Integral Definida</p> <p>A atividade é constituída de tarefas experimentais com o uso do GeoGebra para o estudo de uma Soma de Riemann, como ferramenta para o cálculo de medida de área, considerando uma função f contínua em um determinado intervalo, em que $f(x) < 0$.</p> <p>Objetivos: Institucionalizar o conceito de Integral Definida, possibilitando a familiarização com a simbologia matemática referente a esse conceito e o aprimoramento desse para o cálculo da Integral Definida de funções contínuas, em que $f(x) < 0$, em determinado intervalo.</p>
--

Metodologia: Utilizar as aproximações finitas com o <i>software</i> GeoGebra.	
Duração prevista: 2 h/a	
Situação-Problema 2: Escrever um método que permita calcular a medida da área da região limitada pelo eixo Ox e a representação gráfica de uma função contínua f , em um intervalo específico, em que $f(x) < 0$.	
Passos	Procedimentos a serem realizados no GeoGebra; reflexões e questionamentos a serem respondidos.
1º	<ol style="list-style-type: none"> 1. Considere o intervalo real $[0,2]$ e divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude. Qual será a medida dessa amplitude? 2. Se o intervalo fosse dividido em 10 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? 3. Se o intervalo fosse dividido em 20 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? 4. Observando suas respostas anteriores, responda: <ol style="list-style-type: none"> a) Como você relaciona a amplitude do subintervalo com o comprimento do intervalo e com o número de partes? b) É possível escrever simbolicamente a amplitude de cada subintervalo? Se sim, escreva.
2º	<ol style="list-style-type: none"> 5. Abra o <i>software</i> GeoGebra. <p>Considere a função $f(x) = -x^2 + 4$, definida no intervalo $[0,2]$, e as abscissas x_i como extremos esquerdos dos 4 subintervalos de mesma amplitude.</p> <p>Plote essa função no GeoGebra.</p> 6. Considere e anote os valores das imagens da função f para cada um desses quatro x_i, nos subintervalos considerados na tarefa anterior: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$. 7. Qual a relação existente entre a soma dos produtos $f(x_i) \cdot \text{amplitude do subintervalo}$ e a função considerada nesse intervalo? Explique.
3º	<ol style="list-style-type: none"> 8. Escreva um método que permita calcular a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,2]$.
4º	<ol style="list-style-type: none"> 9. Pense na situação: O intervalo $[0,2]$ será dividido em n partes iguais, qual será a amplitude de cada subintervalo? Como escrevê-la genericamente? Escreva-a. 10. Considerando as atividades realizadas, o que você pode concluir a respeito do cálculo da medida da área sob a representação gráfica de uma função, num intervalo dado? Explique. 11. Usando a escrita matemática, escreva uma fórmula que possa representar a medida da área sob uma curva, em um intervalo dado, que esteja de acordo com sua descrição no item acima.
5º	<ol style="list-style-type: none"> 12. Use no GeoGebra os comandos <i>SomadeRiemannSuperior</i> e <i>SomadeRiemannInferior</i> para o cálculo da medida da área da função $f(x) = -x^2 + 4$, plotada anteriormente, e o eixo das abscissas no intervalo $[0,2]$. <ol style="list-style-type: none"> a) Altere o número de retângulos usados nesse comando. <p>Observe os resultados para um número menor de retângulos e um número maior.</p> <p>Por exemplo: <i>SomaDeRiemannSuperior</i>($f, 0, 2, 10$) <i>SomaDeRiemannSuperior</i>($f, 0, 2, 100$) <i>SomaDeRiemannInferior</i>($f, 0, 2, 10$) <i>SomaDeRiemannInferior</i>($f, 0, 2, 100$)</p>

	<p>Anote esses resultados.</p> <p>b) Qual a diferença entre esses dois comandos, em termos do cálculo da medida da área no intervalo citado, considerando uma quantidade menor de retângulos e uma quantidade maior de retângulos.</p> <p>13. Pesquise outras formas de se calcular a medida da área usando comandos do GeoGebra. Quais outros comandos do GeoGebra podem ser usados para essa finalidade?</p> <p>14. Qual a diferença da construção dos retângulos, em relação aos diversos comandos utilizados, para se calcular a medida da área da figura abaixo da curva que representa a função $f(x) = -x^2 + 4$, no intervalo $[0,2]$, nas atividades realizadas?</p> <p>15. Descreva, sucintamente, o significado da expressão: $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$, explicitando cada termo dessa expressão.</p>
6º	<p>16. Reflita:</p> <p>Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, então:</p> $\int_a^b f(x)dx = \text{Área}(R), \text{ onde } R = \{(x, y) \in R^2 a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$ <p>Assim, definimos: $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, onde o extremo superior de integração x varia entre 'a' e 'b'.</p> <p>Dessa forma, responda:</p> <p>a) O que representa a função $A(x) = \int_a^x f(t)dt$?</p> <p>b) Se $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$:</p> <p>b.1) como será o resultado da expressão $\int_a^b f(x)dx$?</p> <p>b.2) Esse resultado terá a mesma interpretação geométrica destacada na Tarefa 16. a?</p> <p>b.3) Que alterações podemos realizar na expressão $\int_a^b f(x)dx$, com $f(x) < 0$ para que possamos alcançar a mesma interpretação geométrica da Tarefa 16. a?</p>
7º	<p>17. Em um arquivo novo do GeoGebra, plote a função $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$ e responda:</p> <p>a) Use o comando Integral para determinar o valor da Integral de f, no intervalo $[0,3]$. Qual o valor encontrado?</p> <p>b) Qual o sinal do resultado numérico de $\int_0^3 f(x)dx$? E, por que essa Integral apresenta esse sinal?</p> <p>c) Para que o resultado da Integral de f possa representar a medida de uma área, o que é necessário ser observado?</p> <p>d) Usando a notação de Integral como deverá ser feito o registro algébrico de forma a representar a medida da área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,3]$.</p>

Fonte: A autora, 2021

A Unidade 1 tem como objetivos gerais institucionalizar o conceito da Integral Definida, possibilitando, inicialmente, de maneira intuitiva, a estimativa da medida de área usando o *software* GeoGebra; posteriormente, promover a comparação entre dois processos: numérico e

algébrico.

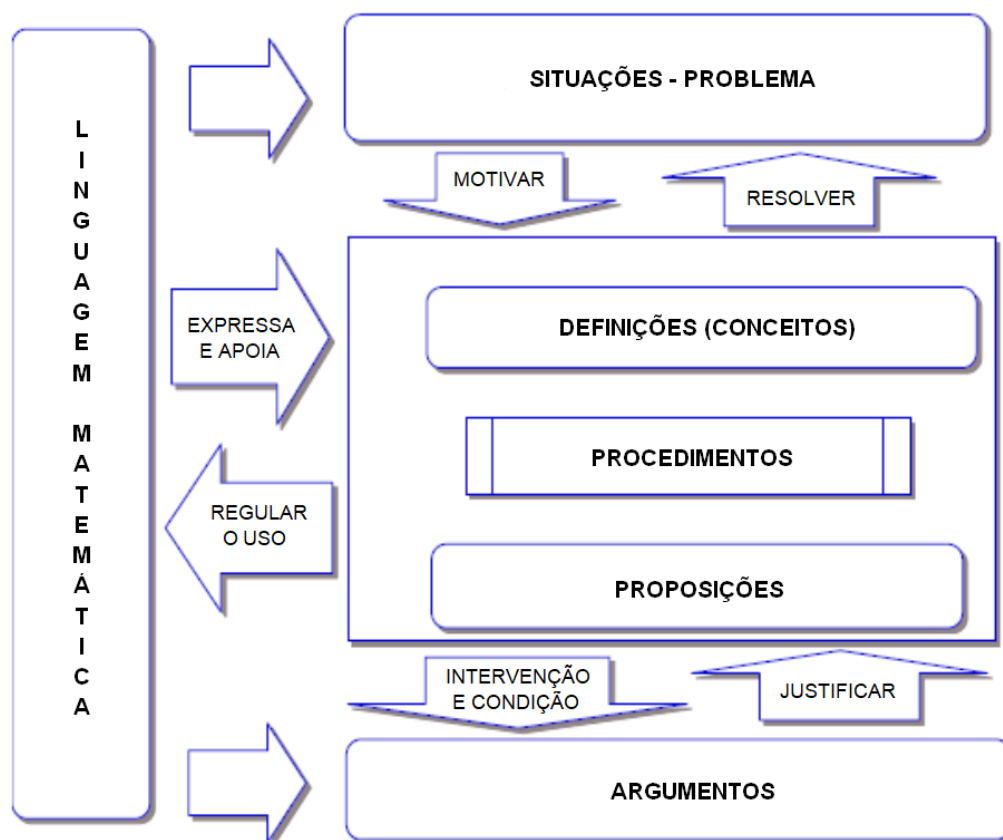
Os objetivos específicos dessa Unidade são:

- a) determinar a medida da área de superfícies com o uso do GeoGebra;
- b) associar, em um sistema cartesiano, a medida da área de uma região, abaixo de uma curva, em um intervalo fechado $[a, b]$, limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$, à medida da área de uma superfície específica;
- c) realizar experimentos com o GeoGebra que possibilitem a investigação de conceitos envolvendo a Integral de Riemann para funções contínuas, limitadas por um intervalo $[a, b]$;
- d) revisar, com o apoio da tecnologia e com o uso de situações-problema, a definição formal da Integral Definida, em contextos intra e extramatemáticos;
- e) possibilitar o desenvolvimento de habilidades quanto à utilização do GeoGebra como ferramenta auxiliar para a resolução de problemas que envolvem a Integral Definida;
- f) institucionalizar o conceito da Integral Definida e possibilitar a familiarização do estudante com a simbologia matemática referente a esse conceito;
- g) estimular o desenvolvimento da autonomia do estudante quanto à compreensão da definição formal da Integral de Riemann de uma função contínua f ;
- h) dar materialidade ao objeto matemático (Integral Definida), partindo para a formalização e generalização desse conceito.

A seguir, destacamos os principais objetos e processos que emergem nesta Unidade de Estudo. Dentre esses objetos e processos descrevemos, sucintamente, os objetos primários indicados pelo EOS (GODINO, 2002, 2011): elementos linguísticos, conceituais, propriedades/proposições, procedimentos e argumentos. Esse procedimento também é realizado na apresentação da Unidade 2.

No EOS, certo pragmatismo é adotado. A definição de objeto, emergindo dos sistemas de práticas e a tipologia dos objetos primários respondem à necessidade da realização da descrição dos sistemas de práticas, a fim de os comparar entre si e de tomar decisões na concepção, desenvolvimento e avaliação dos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática. Esse esquema é representado por Godino *et al.* (2010) e está ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Configuração de objetos matemáticos primários



Fonte: Adaptado de Godino, Font e Planas, 2010, p. 8 (tradução nossa).

Com base no significado institucional de referência, que nesta pesquisa se pautou nas configurações epistêmicas da Integral propostas por Crisostomo (2012), identificamos, no desenho da proposta didática, um sistema de práticas que permite reconhecer o significado institucional pretendido. Espera-se que a implementação dessa proposta didática contribua para impactar o significado pessoal alcançado pelos estudantes da Licenciatura em Matemática. Assim, o significado pretendido é descrito a seguir, incorporado à descrição dos objetos primários, evocados na Unidade 1.

Considerando que o reconhecimento explícito de objetos e processos permitem prever conflitos de aprendizagem potenciais e eficazes, entendemos, a partir dos estudos de Godino *et al.* (2010), ser relevante avaliar competências matemáticas dos estudantes e identificar objetos que devem ser lembrados e institucionalizados em momentos oportunos do processo educativo.

A Unidade 1 traz, em suas atividades, elementos linguísticos, como linguagem verbal (designações nominais de conceitos e proposições, bem como os argumentos que as explicam ou justificam); gráfica (representação das funções no *software* GeoGebra); numérica (valores aproximados das medidas); computacional (comandos digitados na linha de entrada do *software*); simbólica (símbolos matemáticos); e analítica (expressões algébricas). Tais

elementos têm implicação no significado institucional pretendido, por exemplo, expressar em língua natural e algebricamente:

- a) a relação entre o número de retângulos utilizados e a aproximação da medida da área, considerando os elementos base e altura dos retângulos, particular e generalizadamente;
- b) obtenção da medida da área de um retângulo, de forma genérica;
- c) identificação da aproximação da medida da área, usando a notação de somatório;
- d) uso da notação de limite de um somatório para escrita da expressão da medida da área;
- e) identificação do objeto matemático Integral Definida para representar, algebricamente, a medida da área.

Nas duas atividades da Unidade 1, a linguagem gráfica foi utilizada para possibilitar a visualização dos elementos geométricos de uma Soma de Riemann. A linguagem computacional é remetida aos comandos utilizados do GeoGebra, por exemplo, *SomaRetângulos* (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>, <Abscissa Base para o Retângulo Inicial>); *lista = {C,D,E,F,G}*; *Polinômio (Lista)*, entre outros, bem como a sintaxe necessária na digitação desses na linha de entrada do *software*. A linguagem analítica ou algébrica é utilizada nas atividades que remetem à reflexão acerca de uma notação, por exemplo, *o que a razão $\frac{|b-a|}{n}$ representa na figura?*

Os conhecimentos referentes a conceitos e definições, mobilizados na Unidade 1, envolvem área de superfícies; funções e seus elementos (domínio, contradomínio, imagem); coordenadas cartesianas; intervalos e subintervalos; partição; somas sucessivas; soma superior; soma inferior; Somas de Riemann; Integral Definida; limite; infinitesimal; continuidade; expressão analítica; escalas; dentre outros, com destaque para elementos conceituais essenciais:

- a) a medida do intervalo $[a, b]$ é dada por $|b - a|$;
- b) considerando uma função f contínua, definida em um intervalo $[a, b]$, podemos escolher pontos nesse intervalo de tal maneira que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_{n-1} < x_n = b$, de modo a obter diversos números $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, com $i = 1, 2, \dots, n$;
- c) a medida de cada subintervalo pode ser vista como a medida da base de um retângulo, que poderá estar posicionado abaixo ou acima da representação gráfica da função contínua f . Considerando n subintervalos de $[a, b]$, igualmente espaçados, a medida de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é dada por $\frac{|b-a|}{n}$, que denotamos por Δx e será chamada de amplitude de cada subintervalo;
- d) ao considerarmos um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, podemos fixar $f(c_i)$ como a altura do

retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$. Assim, teremos Δx_i como a medida da base de um retângulo e $f(c_i)$ como sua altura;

e) sendo a partição de $[a, b]$ regular, então $\Delta x_i = \Delta x$ para $i = 1, 2, \dots, n$; assim a medida da área do n -ésimo retângulo é dada por: $A_n = \Delta x \cdot f(c_i)$;

f) uma soma $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$ é chamada Soma de Riemann, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866);

g) a soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes é dada por:

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n \text{ ou } \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x;$$

h) a medida da área A da região S que está sob a representação gráfica de uma função contínua f é o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \dots + \Delta x * f(x_i) + \dots + \Delta x * f(x_n)];$$

i) se f é uma função contínua, definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n

subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{|b-a|}{n}$. Sejam $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ as

extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários

nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a

Integral Definida de f de a e b é $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, desde que o limite

exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ (STEWART, 2014, p. 337);

j) a Integral Definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma Soma de Riemann;

k) se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, então,

$$\text{Área}(R) = \int_a^b f(x) dx, \text{ onde } R = \{(x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\};$$

l) se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) < 0$, então,

$$\text{Área}(R) = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ ou } \text{Área}(R) = - \int_a^b f(x) dx, \text{ onde}$$

$$R = \{(x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Mesmo que os estudantes possam estar familiarizados com alguns desses conceitos ou definições, por já os terem estudado, é importante destacar que, em sua formação inicial, muitas vezes, eles apresentam dificuldades na compreensão significativa de conceitos já trabalhados. Ainda, em algumas situações, partem diretamente para aplicação de fórmulas e para a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, tendo contato insuficiente com as definições e aplicações e, conseqüentemente, com os distintos significados parciais do objeto de estudo.

Para o desenvolvimento das atividades da Unidade 1, o estudante da Licenciatura em Matemática poderá mobilizar o conhecimento das proposições e/ou propriedades dos objetos, como nos exemplos:

- a) a subdivisão do intervalo $[a, b]$ deve satisfazer a seguinte propriedade:
 $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ tende à zero quando $n \rightarrow \infty$;
- b) em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, 3, \dots, n$ existe um ponto c_i em que a função contínua f assume um mínimo ou máximo absoluto. Portanto, podemos considerar os retângulos, cujas medidas da base são representadas por $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$;
- c) soma inferior de um conjunto A: é a soma das medidas das áreas dos polígonos inscritos na representação gráfica de f , sendo, nesse caso, valores aproximados por falta da medida da área entre a representação gráfica e o eixo das abscissas;
- d) soma superior de um conjunto A: é a soma das medidas das áreas dos polígonos circunscritos na representação gráfica de f , sendo, no caso em tela, valores aproximados por excesso da medida da área entre a representação gráfica de f e o eixo das abscissas;
- e) a Integral de Riemann satisfaz as seguintes propriedades, considerando f contínua, dentro dos limites de integração: Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Podemos destacar, ainda, um conjunto de procedimentos envolvidos na realização dessa Unidade de Estudo, dentre esses, procedimentos operacionais a serem realizados no GeoGebra e procedimentos reflexivo-verbais para potencializar a institucionalização dos conceitos pelos estudantes da Licenciatura em Matemática. As tarefas, como as exemplificadas, são identificadas:

- a) *Procedimentos operacionais* – realizados com o apoio do GeoGebra:
 - traçar uma reta que coincida com o eixo x;
 - traçar retas perpendiculares;
 - plotar a representação gráfica da função $f(x) = -x^2 + 4$, definida no intervalo $[0, 2]$;
 - supondo que a função f seja contínua e $f(x) \geq 0$ em um intervalo $[a, b]$, dividi-lo em n subintervalos de comprimentos iguais;
 - seja x_i um ponto qualquer no subintervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, construir, em cada um desses subintervalos retângulos que tenham base de medida Δx e altura $f(x_i)$ e somar a medida de suas áreas;
 - movimentar o controle deslizante no GeoGebra, referente ao número de retângulos sob uma curva f , em um intervalo $[a, b]$;

- calcular a medida da área de uma região compreendida entre a representação gráfica de uma função f e o eixo Ox , em um intervalo $[a, b]$, usando apenas retângulos inscritos – o processo usando retângulos circunscritos pode ser desenvolvido de maneira similar – inicia-se o processo pela subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n partes, escolhendo-se pontos da seguinte maneira:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_{n-1} < x_n = b;$$

- aproximar a medida da área da região do Parque, utilizando retângulos e tomar o limite das medidas das áreas desses retângulos à proporção que aumenta o número desses;
- digitar na linha de entrada do GeoGebra o comando:

$$\text{SomaRetângulos}(g, x(A), x(H), n, 0).$$

b) *Procedimentos reflexivo-verbais* – são de natureza indutiva e descritiva, dependendo de cada atividade, com o propósito de sensibilizar o estudante a refletir acerca de notações algébricas/analíticas e registrar suas conclusões, como nas questões seguintes.

- O que a razão $\frac{|b-a|}{n}$ representa na figura?
- Qual a relação existente entre a soma dos produtos $f(x_i) \cdot \text{amplitude do intervalo}$ e a função considerada nesse intervalo? Explique.
- Escreva um método que permita calcular a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,2]$.
- Ao movimentar o controle deslizante, referente ao número de retângulos no GeoGebra, o estudante é motivado a refletir que a soma S das medidas das áreas dos retângulos inscritos se refere a uma aproximação da medida da área da região compreendida sob a representação gráfica da função f e o eixo Ox , em um intervalo $[a, b]$. Se aumentarmos o número de pontos na subdivisão do intervalo $[a, b]$, nas condições estabelecidas, obtém-se melhor aproximação para essa medida.
- Observar o número de retângulos obtidos, a ocupação física deles, as medidas de suas bases, a medida de área de cada retângulo e a soma das medidas das áreas de todos esses retângulos.
- Fazer uma relação da soma das medidas das áreas dos retângulos com a expressão $\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$.
- Escrever o somatório $\sum_{k=1}^n A_k$ em função de x e Δx .

As atividades visam potencializar nos estudantes da Licenciatura em Matemática

oportunidades para elaborar argumentos, realizando conjecturas, explorando exemplos e contraexemplos para justificar suas conclusões e a validade das ações realizadas, que são competências previstas no documento *Principles and Standards for School Mathematics* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM³³, 2000).

A elaboração de argumentos está relacionada com o ato de fazer conjecturas e desencadeia a produção de generalizações; as justificativas, presentes nos argumentos, verificam a fidedignidade da conjectura. No EOS, distinguem-se dois tipos de argumentos: heurísticos (usando a intuição), que visam validar certas ações – como a resolução de um problema ou um argumento lógico – são chamados de *justificativas* ou *validações*; e aqueles que validam formalmente uma proposição – são chamados de *deduções* ou *demonstrações*. Destacamos alguns argumentos que podem emergir na resolução das atividades da Unidade 1:

- a) se f é uma função de x , então a sua Integral Definida é uma Integral restrita a valores em um intervalo específico, digamos, $a \leq x \leq b$;
- b) para calcular a medida da área de uma superfície limitada por uma curva, representativa de uma função f , em certo intervalo, podemos utilizar figuras com fórmulas conhecidas para o cálculo da medida de sua área – por exemplo, retângulos – de modo a aproximar o cálculo da medida da área que se deseja por meio da repetição de porções de áreas cada vez menores;
- c) a ocupação física de retângulos, dispostos abaixo da curva que representa uma função contínua f em um intervalo $[a, b]$, se aproxima, à medida que o número de retângulos aumenta, da ocupação física do Parque, representado por seu mapa na Atividade 1, isto é, essa aproximação parece se tornar cada vez melhor quando o número de retângulos tende a infinito – realização de uma estimativa visual da medida da área, proposta na Atividade 1;
- d) a medida da base dos retângulos aproximantes diminui à medida que a quantidade de retângulos aumenta;
- e) a medida da base dos retângulos pode ser expressa, genericamente, por $\frac{|b-a|}{n}$, sendo n o número de retângulos utilizados no intervalo $[a, b]$;
- f) à medida que se aumenta o número de retângulos, menor ficará a diferença entre a soma das medidas das áreas dos retângulos circunscritos e a soma das medidas das áreas dos retângulos inscritos, ou seja, menor será a diferença nos valores de Somas de Riemann Inferior e Superior;

³³ O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos.

- g) adicionando-se todas as medidas das áreas dos retângulos compreendidos sob a curva f , tem-se uma aproximação da medida da área da região compreendida entre a curva que representa a função f e o eixo Ox , em um intervalo $[a, b]$. Quanto menor a medida da base dos retângulos, melhor é a aproximação da medida da área total;
- h) uma Soma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$ calcula a soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes e fornece uma estimativa para a medida da área da região entre a curva, representativa de uma função f , e o eixo das abscissas, em $[a, b]$;
- i) Na concepção de Leibniz, exige-se que $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$ para garantir, evidentemente, que não apareçam no somatório parcelas com valores negativos e, portanto, destituídas de significados referentes ao valor da medida de área. Entretanto, do ponto de vista processual, o limite se calcula sobre uma soma e não há nenhuma restrição analítica que comprometa a existência do limite, caso apareçam parcelas com valores negativos nessa soma;
- j) para $f(x) \geq 0$, em $[a, b]$, o valor de $\int_a^b f(x) dx$ coincide com a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica de f e o eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$, ou seja, $\text{Área} = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$;
- k) no caso de $f(x) < 0$, pode ser calculada a medida da área indicada, considerando:
 $\text{Área} = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ ou $\text{Área} = - \int_a^b f(x) dx$.

No EOS, o discurso sobre as práticas matemáticas deixa evidente os conteúdos matemáticos, enquanto o discurso sobre os processos tem um foco cognitivo. Dada uma tarefa, muitas práticas, processos e objetos podem ser colocados em ação. No entanto, podemos considerar que, de acordo com o contexto, apenas um processo pode ser priorizado como o principal (FONT; RUBIO, 2017).

Alguns dos 16 processos elencados no EOS foram ativados nas atividades da Unidade 1. Os objetos de uma configuração – problemas, definições, proposições, procedimentos e argumentos – emergem do respectivo processo matemático, por exemplo, comunicação, problematização, definição, enunciação, desenvolvimento de procedimentos (algoritmos, rotinas, entre outros) e argumentação. Por sua vez, as dualidades dão origem aos seguintes processos cognitivos/epistêmicos: institucionalização-personalização; generalização-particularização; análise/decomposição-síntese/reificação; materialização/concretização-idealização/abstração; expressão/representação-significação. Os processos ativados nas atividades são descritos nas análises, constantes no Capítulo 7.

6.2.3.2 Unidade 2: Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos

Nesta Unidade, observamos a necessidade de buscar métodos alternativos que favorecessem a interconexão dos conceitos do Cálculo Integral com outros contextos e a necessidade de realização de abordagens intuitivas por meio da resolução de situações-problema que combinam representações algébricas, geométricas e analíticas.

A introdução do conceito de Integral Definida é abordada, geralmente, pelo problema clássico da medida da área de uma região compreendida sob uma dada curva, nos materiais didáticos (livros), assim como dispõem Figueiredo *et al.* (2013) na revisão bibliográfica que realizaram em livros didáticos. Para esses autores, as situações-problema referentes a outras áreas de conhecimento, como Física, Economia, Biologia, apresentam-se como uma aplicação direta da Integral Definida, não sendo, geralmente, utilizadas para trabalhar com a ideia de Somas de Riemann.

Sousa *et al.* (2019) asseveram que o processo de contextualização, referente ao uso de modelos do mundo real para representar objetos matemáticos, só estará completo se houver uma posterior descontextualização, ou seja, o retorno para o conteúdo matemático para aplicar o conceito trabalhado em outras situações (generalização). Esse movimento de contextualização/descontextualização pode ser apresentado em nível intra ou extramatemático, devendo haver uma interação entre esses tipos, sendo esse movimento uma característica essencial do Cálculo.

Isso posto, apresentamos a Unidade 2, cujo objetivo geral é proporcionar aos estudantes da Licenciatura em Matemática uma situação que favoreça o entendimento de ideias envolvidas no conceito de Integral Definida, com o limite de Soma de Riemann, associada às ideias da Física. A Atividade 3, denominada *Aplicações da Integral Definida na Física – problemas de movimento*, implementada remotamente com os participantes da pesquisa, traz uma aplicação da Integral Definida em um contexto extramatemático.

A situação-problema proposta na Atividade 3 propõe ao estudante o cálculo do deslocamento e da distância percorrida por um móvel, cuja função da velocidade, dependente do tempo, é enunciada e pode ser conhecida em todos os intervalos de tempo. Se a velocidade permanece constante, então o problema da distância é de fácil resolução, por meio da relação $distância = velocidade \cdot tempo$. No entanto, a situação-problema proposta traz a velocidade do móvel variando no intervalo de tempo. Nesse caso, o cálculo da distância não será simplesmente a aplicação da relação citada. Para a resolução desse problema, é proposta a utilização de uma Soma de Riemann.

A realização da Atividade 3 conta com o auxílio visual do GeoGebra. Contudo, o foco da atividade se refere à necessidade de interpretação da Integral de uma função, no sentido de Riemann, que apresenta imagens positivas e negativas em seu domínio para encontrar o valor da distância percorrida pelo móvel. Em um segundo momento, é proposta na atividade o cálculo da Integral Definida, a fim de que o estudante aprimore o conhecimento acerca da relação entre o processo de derivação e integração, no contexto da Cinemática, para ampliar seus significados parciais acerca da Integral Definida.

Dessa forma, são abordados conceitos de distância e de deslocamento. A atividade tem como objetivos específicos:

- a) promover a identificação do resultado da Integral de uma função, que retrata a velocidade em relação ao tempo, como geradora de uma outra função, que descreve o deslocamento relacionado ao tempo;
- b) diferenciar a distância percorrida por um móvel, de seu deslocamento, por meio do tratamento da função velocidade, adaptando essa função, matematicamente;
- c) possibilitar a reflexão de que a medida da área dos retângulos aproximantes, dispostos na região compreendida entre a representação gráfica de uma função f , em um determinado intervalo, pode ser interpretada como grandezas diversas, em conformidade com as grandezas relacionadas na lei de formação da função em estudo;
- d) aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, reconhecendo-o como ferramenta prática para o cálculo da Integral Definida.

Passaremos a apresentar a Atividade 3 e as respectivas sequências de tarefas, conforme descrito no Quadro 11.

Quadro 11 – Atividade 3 da Unidade 2, conforme foi apresentada aos estudantes.

Atividade 3: Aplicações da Integral Definida na Física — Problemas de movimento
A atividade é constituída de tarefas experimentais com o uso do <i>software</i> GeoGebra para o estudo de conceitos relacionados a movimento (distância e deslocamento), tendo como ferramenta uma Soma de Riemann.
Objetivos: <i>i)</i> Promover a identificação do resultado da Integral de uma função que retrata a velocidade em relação ao tempo, como geradora de uma outra função que descreve o deslocamento relacionado ao tempo. <i>ii)</i> Diferenciar a distância percorrida por um móvel, de seu deslocamento, por meio do tratamento da função velocidade, em função do tempo, fazendo uma mudança nessa função.
Metodologia: Utilizar as aproximações finitas com o GeoGebra.
Duração prevista: 3 h/a
Situação-Problema 3: Um móvel se move em linha reta, com velocidade dada em metros por segundo, de acordo com a função $v(t) = 6 - t$, onde t é dado em segundos. Utilizando o

GeoGebra, seguindo os passos propostos, responda:

- a) Qual o deslocamento do móvel, no intervalo de 0 a 12 segundos.
- b) Qual a distância total percorrida, no intervalo de 0 a 12 segundos.

- Nesse problema, associaremos o tempo do deslocamento (t) ao eixo das abscissas e a velocidade do móvel $v(t)$, ao eixo das ordenadas.
- Abra o *software* GeoGebra. Siga as instruções e responda às tarefas propostas.

Procedimentos a serem realizados no GeoGebra; reflexões e questionamentos a serem respondidos.

1. Plote, no *software* GeoGebra, a representação gráfica da função $v(t) = 6 - t$, no plano cartesiano, considerando o intervalo de tempo $[0,12]$, dado em segundos.
2. Considerando que o movimento em estudo tem trajetória retilínea, responda: Em qual intervalo a velocidade tem valor positivo? E negativo?
3. Vamos lembrar alguns conceitos:
 - Quando a velocidade é positiva significa que o móvel está se movendo no sentido positivo da trajetória retilínea, o qual denominaremos “sentido a favor da trajetória” e, quando a velocidade é negativa, significa que o móvel está se movendo no sentido negativo da trajetória retilínea, que denominaremos “sentido contrário à trajetória”.
 - Quando a velocidade é constante, o problema do cálculo da distância reduz-se a procedimentos elementares, a partir do conceito de que:

$$\text{distância} = \text{velocidade} \cdot \text{tempo}$$

Assim, considerando o intervalo de tempo de 0 a 12 segundos, na função $v(t) = 6 - t$, faça o que se propõe:

4. Utilizando o controle deslizante do GeoGebra, particione esse intervalo de tempo em n partes, para se ter subintervalos de 1 segundo. Escreva qual comando do GeoGebra você utilizou.
5. Utilizando o GeoGebra, calcule a medida da soma das áreas dos retângulos, com base 1 unidade, sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica da função v e o eixo das abscissas, no intervalo citado. Qual o valor encontrado?
6. O que representa a medida da área do primeiro retângulo?
7. Quantos metros o móvel andou no sentido a favor da trajetória?
8. Quantos metros o móvel andou no sentido contrário à trajetória?
9. Aumente o número de retângulos de modo a obter uma melhor aproximação para a medida da área da região considerada anteriormente. Responda, novamente:
 - a) Quantos metros o móvel andou no sentido a favor da trajetória?
 - b) Quantos metros o móvel andou no sentido contrário à trajetória?
10. Qual foi o deslocamento desse móvel no intervalo $[0,12]$ segundos?
11. Qual a distância total percorrida pelo móvel nesse mesmo intervalo de tempo?
12. Execute o comando: *integral* (<função>, <valor de x inicial>, <valor de x final>), expressando a função v , no intervalo de $[0,12]$ segundos. Qual o valor encontrado?
13. Vale lembrar que a velocidade é a taxa de variação da posição do móvel, em função do tempo. Então, qualquer variação em sua posição será dada por uma Integral Definida. Refletindo sobre isso e, observando a representação gráfica plotada no GeoGebra, responda com suas palavras: o que a expressão matemática $\int_0^{12} v(t)dt$ significa, nesse contexto?
14. Como obter a distância total percorrida, nesse caso, usando uma Integral Definida?
15. Como pode ser generalizado, matematicamente, o cálculo do deslocamento e da distância percorrida, conhecendo-se a função velocidade v de um móvel, em movimento retilíneo?
16. Escreva a Integral Indefinida, ou seja, a primitiva da função $v(t) = 6 - t$.
17. Calcule, para os tempos $t = 0$, $t = 6$ e $t = 12$, as respectivas imagens, considerando a primitiva da função $v(t) = 6 - t$.
18. Faça a diferença entre os valores encontrados para $t = 0$ e $t = 6$, e para $t = 6$ e $t = 12$. O que podemos concluir sobre esses valores?
19. Sabendo que a função que descreve a velocidade v de um móvel, que se move em uma trajetória

retilínea, tem sua Integral Definida, em certo intervalo, igual à sua mudança de posição, ou deslocamento, durante o período de tempo t_1 a t_2 , o que pode ser afirmado sobre o significado físico da primitiva encontrada e qual a sua finalidade, ao substituir sua variável por um instante t qualquer?

20. Se tivermos uma função que descreve o deslocamento de um móvel, como poderíamos encontrar a equação que descreve a sua velocidade?
21. Sintetize os conceitos trabalhados nessa atividade.

Fonte: A autora, 2021

Destacamos os principais objetos e processos que emergem desta Unidade de Estudo. As linguagens utilizadas durante a Atividade 3 são: gráfica, por meio das construções no GeoGebra; verbal, nos momentos em que são apresentados questionamentos sobre a interpretação de resultados obtidos no *software*, ou por meio de cálculos realizados durante a Atividade; e simbólica, que busca a formalização dos aspectos intuitivos trabalhados.

São abordados conceitos e definições relacionados à Derivada, Integral Indefinida e Integral Definida, Teorema Fundamental do Cálculo, Integral de função modular, noções básicas de Cinemática, em que se promove o trabalho com a antiderivada da função velocidade, como função posição, ambas variando em função do tempo t . É proposto o trabalho com as velocidades (escalar e vetorial), articulada com a Integral Definida. Damos destaque aos seguintes elementos conceituais:

- a) a grandeza velocidade é definida pela taxa de variação da posição de um objeto, em função do tempo. Dessa forma, é possível conhecer a velocidade de um objeto, em qualquer instante de tempo, a partir da função da posição, usando o Cálculo Diferencial e, caso se conheça a função da velocidade, pode-se reconhecer a função da posição, usando o Cálculo Integral, ou seja, se conhecermos a função velocidade v de uma partícula em movimento retilíneo, então a integração de v produz uma família de funções de posição s . Se, além disso, soubermos a posição s_0 da partícula, em algum instante t_0 , então, haverá informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma função posição determinada;
- b) o deslocamento de uma partícula, em movimento retilíneo, ao longo de um intervalo de tempo, é a diferença entre a coordenada final e a inicial. Assim, se a função posição da partícula for s , seu deslocamento, ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é $s(t_1) - s(t_0)$. Isso pode ser escrito, em linguagem matemática formal, como:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t) dt = s(t_1) - s(t_0);$$
- c) Para encontrar a distância percorrida pela partícula, ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, é necessário considerar os intervalos em que a função velocidade é positiva, o

que significa que o móvel está se movendo no sentido positivo da trajetória retilínea, o qual denominamos, conforme especificado na atividade, “sentido a favor da trajetória” ou nula; também os intervalos em que a função velocidade é negativa, o que significa que o móvel está se movimento no sentido negativo da trajetória retilínea, que denominamos “sentido contrário à trajetória”, sendo preciso integrar a função velocidade, naquele intervalo, fazendo: $\int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt$;

- d) o valor absoluto da velocidade é chamado de velocidade escalar, logo, informalmente, é possível resumir o que foi explicado anteriormente, considerando uma trajetória retilínea ao integrar a função velocidade, ao longo de um intervalo de tempo, obtém-se o deslocamento; ao integrar a velocidade escalar, ao longo de um determinado intervalo de tempo, obtém-se a distância percorrida.

Essa Atividade busca potencializar nos estudantes da Licenciatura em Matemática oportunidades para elaborar argumentos, subsidiados pelas reflexões ocorridas na realização dos procedimentos relacionados à manipulação dos subintervalos. Por exemplo, no movimento uniforme, a distância percorrida é obtida por meio do produto da velocidade constante pelo tempo decorrido; no caso específico da situação-problema da Atividade 3, em que a velocidade não é constante, é possível dividir o intervalo em subintervalos cada vez menores, a fim de encontrar um valor para a distância percorrida naquele subintervalo. Ao repetir esse procedimento n vezes, a aproximação da distância percorrida será encontrada pela adição das distâncias calculadas, em cada um dos n subintervalos considerados.

A Atividade 3 promove a mobilização de alguns processos do EOS, como comunicação, particularização, generalização, significação, argumentação, algoritmização, visualização, enunciação, entre outros, dos quais destacamos:

- a) *visualização*, após plotar a representação gráfica da função no GeoGebra e realizar os devidos cálculos, o estudante poderá perceber a diferença entre os conceitos de deslocamento e distância percorrida por meio do intervalo de integração que estará intimamente ligado à positividade da função. Nesse aspecto, mencionamos Dreyfus (1991) que elenca a importância da visualização como um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, conduzindo o estudante a perceber exemplos concretos que, nesse caso, são apoiados pela representação gráfica dos conceitos de mudança de posição ou deslocamento e distância percorrida;
- b) *enunciação* da distância percorrida e do deslocamento como um limite de aproximações, relacionando o conceito matemático ao conceito físico, *sintetizando-os e formalizando-os*.

- os;
- c) *algoritmização* é utilizada quando o estudante faz manipulações algébricas e as aplica à integração em uma função, para comparar os resultados manipulados com ou sem o *software*;
 - d) *generalização* e *significação* quando se aborda o contexto de aplicação e significado da Integral Definida em outra ciência;
 - e) *representação* e *tradução*, uma vez que a sequência de atividades mobiliza aspectos relacionados às representações (numérica, simbólica/algébrica, mental, visual/gráfica) e provoca os estudantes a realizarem a mudança de representações;
 - f) *enunciação*, *institucionalização*, *definição*, *comunicação* que são requeridas nas tarefas em que o estudante deve escrever acerca dos conceitos trabalhados, usando a linguagem natural ou uma linguagem matemática formal.

No desenho da proposta didática, são apresentadas atividades com níveis de avanço gradativo em relação aos conceitos mobilizados. Isso é feito por meio de estímulos ao desenvolvimento de processos cognitivos, motivados por perguntas, deixadas concomitantemente em relação às instruções de ações no GeoGebra, com abordagem de alguns significados da Integral Definida. Na seção seguinte, apresentamos a configuração cognitiva-afetiva considerada no desenvolvimento dessa proposta.

6.3 Configuração Cognitiva-Afetiva

Nos atentamos às reflexões acerca de como os conteúdos e as atividades propostas poderiam potencializar a interação entre os estudantes, bem como a mobilização de seus conhecimentos prévios, buscando, também, a proposição de problemas desafiadores que trouxesse estímulo a um maior envolvimento, interesse, autonomia e motivação nas soluções demandadas.

Como já dissertado no Estudo Preliminar (Capítulo 5), em observações realizadas na literatura e, também, em nossa experiência docente, existem alguns entraves no processo de aprendizagem dos conceitos relacionados à Integral Definida, como falta de compreensão do estudante na articulação da Integral Definida, como o limite de um somatório; conceitualização da Integral baseada unicamente na noção de área; e incompreensão das notações simbólicas, dentre outros.

O desenho da proposta didática visou a progressão da compreensão dos estudantes da Licenciatura em Matemática na construção conceitual da Integral Definida, com o propósito de

esses aprimorem seus conhecimentos elementares, partindo de abordagens intuitivas que antecipam a formalização conceitual. Foram abordadas situações-problema em que a noção de área transcendeu o aspecto relacionado ao cálculo aritmético, trazendo a utilização dessa noção não apenas como uma fórmula, mas também como um objeto geométrico que pode ter relação com novos problemas, conforme proposto por González-Martín (2006) e Apolinar (2014).

Outro aspecto, já abordado no Estudo Preliminar, tem relação com a excessiva algebrização e/ou algoritmização utilizada de modo descontextualizado e mecanicizado, conforme apresentado em Brandão (2015) e Menoncini (2018), entre outros. Assim, no desenho da proposta didática, buscamos um equilíbrio entre os componentes conceituais e algorítmicos, utilizando uma abordagem experimental, realizada com o apoio do *software* GeoGebra, juntamente com a possibilidade de auxiliar os estudantes no estabelecimento de relações entre as diferentes formas de expressão – algébrica, gráfica, simbólica, dentre outras – e a preencher as carências relacionadas à abordagem gráfica, compreensão das notações e mobilização das representações em diferentes registros.

Ressaltamos, ainda, que esse desenho aponta para a mobilização de alguns dos processos cognitivos como generalização-particularização, institucionalização-personalização, representação-significação, comunicação, argumentação, visualização, algoritmização e problematização, relacionados à realização das práticas matemáticas. Por exemplo, em todas as atividades foram colocadas tarefas que impulsionam a argumentação que podem direcionar à formalização do conceito.

Ao observar a faceta cognitiva articulada com a afetiva, no desenho da proposta didática, refletimos que, conforme dispõe Godino (2011), ao resolver um problema matemático, o estudante traz consigo uma situação afetiva que o faz pôr em ação as práticas operacionais e discursivas necessárias à resolução do problema, mobilizando, também, crenças, atitudes, emoções e valores que o fazem apropriar da resposta cognitiva necessária. Nesse contexto, na concepção da proposta, elaboramos atividades que possam motivar os estudantes ao estudo desse tópico do Cálculo, propondo situações que valorizam a utilidade matemática na vida diária e profissional, e a provocação da participação deles responsável e cooperativamente. A argumentação é solicitada nas atividades para favorecer as situações de igualdade em que o argumento é valorizado em si e não por quem o diz.

A estrutura do EOS reconhece que a aprendizagem implica a apropriação dos significados por meio da participação na comunidade da prática gerada na sala de aula. Assim sendo, destacamos na seção seguinte os aspectos da configuração instrucional que foram observados no desenvolvimento da proposta didática.

6.4 Configuração Instrucional (Mediacional e Interacional)

Os recursos instrucionais utilizados para a implementação da proposta didática podem ser entendidos como uma articulação entre as facetas mediacional, que trata dos recursos tecnológicos, do tempo necessário para a realização das ações e processos de estudo, e interacional – interação entre estudantes, professores e materiais. Essas duas facetas são intermediadas pela negociação de significados que um processo de estudo envolve. Nesta seção, descrevemos os meios, materiais, recursos instrucionais e formas de trabalho desenhados na proposta didática.

Está incluída, nesse rol de recursos, a ferramenta tecnológica (computador) que possibilitou o uso dos aspectos visuais, gráficos, geométricos por meio do GeoGebra, que apoia a reconstrução da didática do Cálculo, com base em abordagens não formais. Trabalhos como o de Tall (2003) expressam essa necessidade, quando trazem a conveniência de levar o estudante a conceituar objetos sensoriais em sua mente – objetos incorporados –, uma vez que aspectos manipulativos e formais podem ser abordados posteriormente. Ressaltamos que o GeoGebra foi utilizado como recurso para potencializar a mobilização dos processos cognitivos, uma vez que amplia as possibilidades do trabalho com diferentes representações, tais como tabelas, gráficos em duas e três dimensões, expressões algébricas, retorno numérico para cálculo das Integrais Definidas, dentre outras possibilidades que se apresentam dinâmica e articuladamente.

Os instrumentos projetados para conduzir o processo instrucional, disponibilizados aos estudantes para a coleta de suas respostas consiste em materiais impressos ou digitais contendo três atividades que foram apresentadas separadamente nos Guias de Atividades intitulados Atividade 1, Atividade 2 e Atividade 3. Esses guias são compostos por tarefas a serem realizadas com o suporte do GeoGebra, e perguntas que visaram potencializar conhecimentos e competências didático-matemáticos dos estudantes na tentativa de que realizassem a institucionalização matemática exigida em cada atividade, desenvolvendo processos cognitivos, como visualização, representação, generalização, entre outros. Em cada encontro, presencial ou remoto, cada dupla de estudantes recebeu um Guia de Atividades – impresso, nos dois encontros presenciais, e digital, enviado por *e-mail*, no encontro remoto. Os estudantes foram orientados a manusear o guia e registrar nele as respostas para cada uma das tarefas propostas em espaços reservados para cada resolução.

Aos estudantes foi dado um tempo para desenvolvimento das atividades e discussão dos resultados. Após a realização de cada uma das atividades, foi entregue à professora-

pesquisadora, nos encontros presenciais, a folha impressa com as respostas manuscritas e, nos encontros remotos, enviado por *e-mail* o arquivo com as respostas digitadas. Lápis e caneta foram disponibilizados para anotações das respostas nos encontros presenciais. Os estudantes utilizaram seus celulares nos encontros presenciais para ativação de um aplicativo de gravação de áudio, que foi armazenado por nós, professora-pesquisadora, na base de dados da pesquisa. Essas anotações foram utilizadas nas análises.

Os materiais utilizados por nós, professora-pesquisadora, foram guias de atividades impressos, digitais, *software* GeoGebra e caderno de bordo, para anotações das situações didáticas, observadas durante a aplicação das atividades.

A configuração instrucional da proposta didática e a forma de implementação buscou promover trajetórias didáticas nas quais predominam configurações do tipo de trabalho pessoal e cooperativo entre os estudantes, ou seja, com um maior nível de autonomia na aprendizagem da Matemática. Em substituição a textos de Matemática já elaborados, buscamos trazer as experimentações, com sugestão de realização pelo GeoGebra e perguntas que motivaram as reflexões, os entendimentos e o compartilhamento das experiências entre os estudantes. Questões como: *sintetize os conceitos trabalhados nessa atividade; o que foi possível concluir; reflita e responda; como podemos representar de forma genérica*, entre outras, encorajaram os estudantes a explicar, justificar, concordar e discordar, questionar alternativas e refletir acerca dos conceitos trabalhados nas atividades, compartilhando experiências uns com os outros.

Outro atributo desse desenho considera a formação em aspectos didáticos, com potencial para favorecer experiências que poderão auxiliar os estudantes em sua prática profissional futura – docência em Matemática –, como a familiaridade com o uso de tecnologias digitais, a realização de atividades que abordam contextos extramatemáticos e o uso de distintas representações.

Com relação ao tempo, cada uma das atividades foi desenhada para não exceder a duração de 4 horas/aula, tempo que acreditávamos ser suficiente para realização daquelas.

Relatamos, no capítulo seguinte, as trajetórias didáticas realizadas na implementação da proposta didática, discriminando seu desenvolvimento e dinâmica. Apesar de Godino *et al.* (2014) sugerirem que na fase do Desenho (Fase 2) devesse ser realizada a análise *a priori* das atividades, com indicação dos comportamentos esperados dos estudantes e o planejamento de intervenções controladas do professor, optamos por discorrer sobre esses aspectos no próximo capítulo, referente à implementação e avaliação das atividades. Dessa forma, na organização deste estudo, as análises *a priori* e *a posteriori* foram apresentadas na mesma seção para melhor compreensão do desenvolvimento da pesquisa.

CAPÍTULO 7 – IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DA PROPOSTA DIDÁTICA

Descrevemos, neste capítulo, as fases da implementação e análise da proposta didática sobre a Integral Definida (Fases 3 e 4), nas quais utilizamos a noção de configurações do EOS e trajetórias didáticas que, de acordo com esse referencial, compreende as ações dos estudantes e do professor, bem como os meios planejados ou utilizados para abordar o estudo. Discorreremos acerca das observações das interações realizadas entre os estudantes participantes da pesquisa e os recursos utilizados e sobre a avaliação de seus significados pessoais. Apresentamos os fatos didáticos significativos que, segundo Godino *et al.* (2014), são as ações ou práticas didáticas que os compõem e desempenham uma função, ou admitem uma interpretação, voltada para o objetivo de ensino proposto.

Apresentamos os elementos da análise didática que foram usados na realização de uma análise detalhada, orientada para o reconhecimento dos objetos – situações-problema, linguagens, definições, proposições, procedimentos e argumentos – que intervêm nas práticas matemáticas e emergem delas. Essas práticas foram percebidas, atentando para as anotações realizadas pelas duplas de trabalho – protocolos manuscritos ou digitais, audiovisuais das interações presenciais ou remotas e construções no GeoGebra. Identificamos, também, os processos envolvidos, como interpretação, comunicação, representação, argumentação, generalização, visualização, entre outros. Optamos por apresentar a análise da implementação da proposta didática por atividade, destacando os tipos de problemas e as práticas realizadas.

Também neste capítulo, realizamos a valoração da adequação didática do processo formativo, considerando os pressupostos teóricos da idoneidade didática desenvolvidos no EOS.

7.1 Trajetórias didáticas realizadas

Uma sequência de configurações didáticas orientada para a resolução de um tipo de situação-problema, ou de aprendizagem de um conteúdo específico, constitui uma trajetória didática. A aplicação das noções de configuração e trajetória didática (GODINO *et al.* 2014) permite análises particularizadas:

- a) da implantação progressiva dos significados de ensino implementados;

- b) da aprendizagem e sua dependência dos formatos de interação que efetivamente acontecem;
- c) do uso dos recursos e do tempo reservado.

Nessas análises, o foco são a descrição do conteúdo trabalhado, os padrões de interação entre os atuantes na pesquisa, o reconhecimento dos conflitos cognitivos e interativos e as formas como esses são abordados e resolvidos.

Descrevemos, na seção seguinte, como a proposta didática foi implementada, apresentando as descrições das suas trajetórias, organizadas pela ordem das Unidades de Estudo, conforme disposto no Quadro 12. Optamos por pseudônimos para garantir o anonimato dos estudantes.

Quadro 12 – Implementação das trajetórias didáticas

Encontro	Unidades de Estudo	Atividades	Data e forma de Implementação	Carga horária de realização da atividade	Participantes da pesquisa	Realização em duplas ou individualmente
1°	I) Institucionalização do conceito de Integral Definida	1. Introdução à Definição de Integral de Riemann	11/03/2020 Presencial	3 h/a	10 estudantes	Gisele e Bruno Mariana e Jair Elba e Franciele Ludimila e Túlio Ítalo e Luiz
2°		2. Aprimorando a compreensão do conceito de Integral Definida	13/03/2020 Presencial	2 h/a	9 estudantes	Gisele e Bruno Jair Elba e Franciele Ludimila e Túlio Ítalo e Luiz
3°	II) Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos	3. Aplicações da Integral na Física – Problemas de movimento	01/06/2020 Remota	3 h/a	6 estudantes	Gisele e Bruno Franciele e Túlio Ítalo e Luiz

Fonte: A autora, 2021

As trajetórias didáticas, referentes à Unidade 1, foram realizadas de forma presencial, em dois encontros. O primeiro iniciou com o agrupamento em duplas dos participantes da pesquisa, estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, onde atuamos como professora. Na ocasião, cada dupla utilizou um computador para realizar a Atividade.

A implementação da Unidade 2 ocorreu de forma remota. Foi utilizado o aplicativo *Google Meet* para realização das reuniões virtuais, conforme detalhado no Capítulo 4. Destacamos que, para cada atividade da Unidade 2, foram geradas reuniões virtuais com todo o grupo de participantes da pesquisa, para que recebessem orientações acerca da atividade proposta. Em seguida, foram agendadas e realizadas reuniões virtuais, simultâneas, por duplas. Em cada uma dessas reuniões participaram uma dupla de estudantes, a professora-pesquisadora e o acadêmico de Iniciação Científica. Atuando como professora-pesquisadora, oferecemos assistência virtual simultaneamente em todas as reuniões nas quais as atividades estavam sendo implementadas. Os estudantes foram orientados a solicitar a nossa presença, por meio do aplicativo *WhatsApp*, caso precisassem de alguma assistência e se, naquele momento específico, não estivéssemos *on-line* em sua sala virtual, em razão de estarmos atendendo outra dupla, em outra sala. Todas as reuniões virtuais foram gravadas no *Google Drive*, subsidiando os dados desta investigação.

Na seção seguinte, discorreremos sobre os elementos de análise utilizados para avaliar o nível dos conhecimentos didático-matemáticos dos estudantes acerca do objeto matemático Integral Definida.

7.2 Elementos da análise didática

O EOS fornece ferramentas para fazer uma análise minuciosa da atividade matemática, com diversificação de parâmetros, permitindo identificar as configurações de objetos e processos que intervêm nas práticas, seja na resolução das situações-problema, seja na estrutura teórica do tratamento conceitual.

Utilizamos os seguintes níveis de análise propostos por Godino (2009):

- a) práticas matemáticas e didáticas: descrição das ações realizadas para resolver as atividades matemáticas propostas, para contextualizar os conteúdos;
- b) configurações de objetos e processos matemáticos e didáticos que intervêm na realização das práticas, assim como os que deles emergem;
- c) normas e padrões: identificação da rede de regras, hábitos, normas que condicionam e

tornam possível o processo de estudo e que afetam cada faceta e suas interações.

- d) adequação didática: critérios objetivos que servem para avaliar a adequação e a pertinência das ações realizadas, dos conhecimentos mobilizados e dos recursos usados em um processo de ensino de um tema específico da Matemática, além de identificar potenciais melhorias no processo.

Optamos por esses níveis de análise porque consideramos que eles integram aspectos de uma abordagem epistemológica e sociocultural. Os processos de ensino e de aprendizagem ocorrem em um determinado contexto institucional – nesta pesquisa, a Licenciatura em Matemática – e social que condiciona e torna possível a realização do processo educativo.

Godino, Batanero e Font (2008, p. 26) destacam que os quatro primeiros níveis de análise são ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, ou seja, esses servem para entender e responder à pergunta “o que está acontecendo aqui e por quê?”. No entanto, os autores ponderam que a Didática da Matemática não deve se limitar a uma mera descrição que deixa tudo como era, mas aspirava melhorar o funcionamento dos processos de estudo. Portanto, são necessários critérios de adequação para avaliar os processos de ensino efetivamente realizados a fim de orientar o seu aprimoramento, sendo o objetivo do último nível.

A utilização dos níveis de análise propostos por Godino (2009) foi articulada com a análise das facetas – epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica – propostas pelo EOS para análise didática e permearam toda a análise dos dados coletados. Ressaltamos que as facetas foram articuladas entre si, conforme orienta Godino (2011, p.2, tradução nossa): “é necessário desenvolver teorias educacionais que articulem as facetas epistêmicas e ecológicas (teorias curriculares), juntamente com teorias de aprendizagem (facetas cognitivas e afetivas) e teorias orientadas ao design instrucional, ou seja, à prática de ensino.”

No Quadro 13, apresentamos uma adaptação da articulação das facetas com indicadores de Godino *et al.* (2013), que auxiliaram na verificação de como os conceitos e os processos matemáticos acerca da Integral Definida foram mobilizados. Essa análise apresenta categorias detalhadas de observação do conhecimento didático-matemático do professor, que propõe diretrizes para a formulação de itens de avaliação, conforme destacado no Capítulo 3.

Quadro 13 – Facetas com indicadores de instrução da didática da Matemática

Facetas	Componentes	Descritores
Epistêmica-Ecológica	Conteúdo Didático-Matemático (conteúdo matemático, cognitivo, afetivo, interativo, mediacional, ecológico), entendido desde o ponto de vista institucional; Percepção das configurações <i>intuitiva, geométrica, soma, extramatemática, acumulada e tecnológica</i> .	<ul style="list-style-type: none"> – Situações-problema – Linguagens – Conceitos/Definições – Procedimentos – Proposições – Argumentos
	Articulações e conexões	<ul style="list-style-type: none"> – Articulação dos objetos matemáticos e didáticos – Conexões intra e extramatemáticas – Inovação didática na formação dos professores
Cognitiva-Afetiva	Conhecimentos	<ul style="list-style-type: none"> – Conhecimentos prévios – Aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos futuros professores
	Interesses, necessidades, atitudes e emoções	<ul style="list-style-type: none"> – Crenças, valores, interesses, atitudes, emoções dos futuros professores frente à aprendizagem do conteúdo didático-matemático
Instrucional (Mediacional-Interacional)	Interação professor-estudante Interação entre estudantes	<ul style="list-style-type: none"> – Modos de interação e discurso no processo de formação de professores de Matemática
	Uso de recursos tecnológicos	<ul style="list-style-type: none"> – Uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores de Matemática

Fonte: Adaptado de Godino *et al.*, 2013

Optamos por descrever, detalhadamente, as análises referentes à faceta epistêmica-ecológica e os aspectos cognitivos (conhecimento do conteúdo) da faceta cognitiva-afetiva por Unidade de Estudo, como forma de verificar quais as competências foram desenvolvidas pelos estudantes da Licenciatura em Matemática na compreensão de significados da Integral Definida. Os aspectos afetivos, constitutivos da faceta cognitiva-afetiva, e os aspectos da faceta instrucional foram analisados considerando todo o contexto da proposta didática implementada (Atividades 1 e 2 da Unidade 1, Atividade 3 da Unidade 2) e estão detalhados no Capítulo 7 que aborda a adequação didática da proposta.

Utilizamos o modelo de análise didática proposto em Font, Planas e Godino (2010) para descrever, explicar e avaliar o processo instrucional realizado, com base na identificação de diferentes configurações didáticas (CD), cada uma das quais corresponde ao conjunto de interações geradas a partir de uma situação-problema específica.

A análise didática, realizada por Unidade de Estudo, conta com a elaboração de quadros, apresentados nas seções seguintes, que aludem às noções de *trajetórias, interações didáticas e configurações didáticas*. As *trajetórias* se referem à distribuição ao longo do tempo dos objetos e funções semióticas, cuja análise permite caracterizar o significado institucional pretendido.

Utilizamos, na análise, as relações existentes entre as configurações, conforme dispõe Godino, Batanero e Font (2008, p. 21):

Uma *configuração didática* está associada a uma *configuração epistêmica*, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações, as quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles. Associada a uma configuração epistêmica haverá uma *configuração instrucional* constituída pela rede de objetos docentes, discentes e mediacionais colocada em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática abordada. A descrição das aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo se realiza mediante as *configurações cognitivas*, rede de objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas pessoais que se acionam na implementação de uma configuração epistêmica. (*Grifos nossos*).

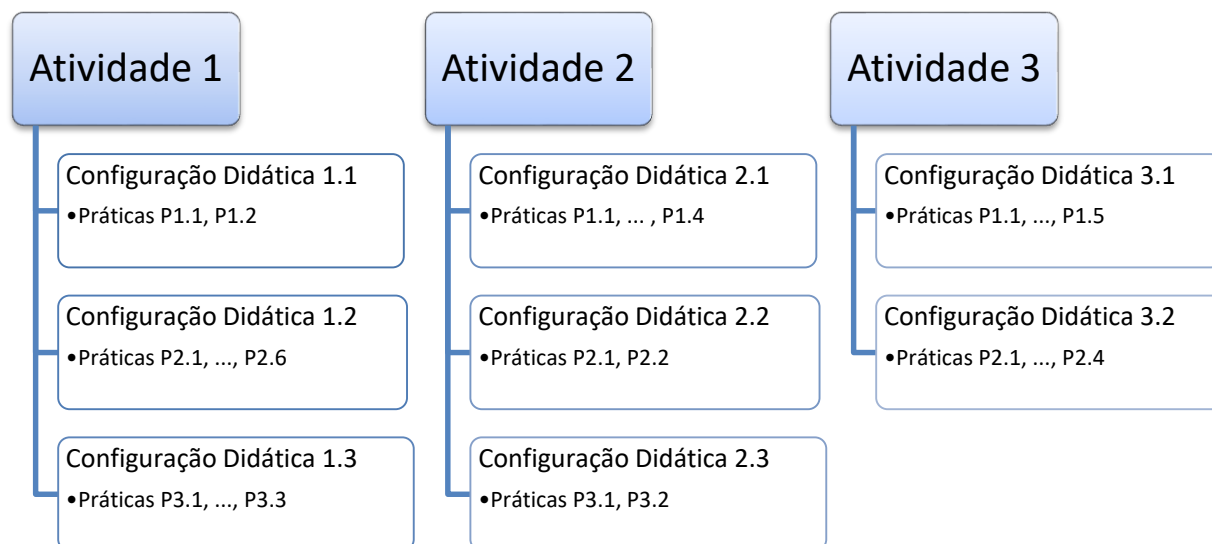
A análise didática se refere, portanto, à caracterização das configurações, seu sequenciamento e articulação.

Realizamos uma descrição dos aspectos que cada atividade mobiliza, de acordo com o *conteúdo ontossemiótico-epistêmico*, obtido por meio da análise epistêmica. Decompomos cada atividade em *configurações didáticas*, em que são utilizados os objetos primários enunciados no EOS – elementos linguísticos, conceitos/definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos –, seus significados e os processos envolvidos nas práticas da proposta didática elaborada nesta pesquisa. Cada configuração didática é concebida como um sistema aberto à interação com outras configurações da trajetória didática da qual faz parte, sendo constituídas por *práticas operativas e discursivas* que devem ser realizadas no desenvolvimento das situações-problema. A proposta didática foi implementada por meio de uma sequência de configurações didáticas.

Ao longo da trajetória do desenvolvimento, implementação e análise da proposta didática, oito *configurações didáticas* foram identificadas. Elas agrupam *tarefas*, dispostas no desenho da proposta e foram organizadas de acordo com as ações necessárias para sua solução, objetos matemáticos, linguagens ou regras utilizadas, processos e argumentos que poderiam ser manifestados pelos estudantes. Associado a essas configurações, há configurações cognitivas e interacionais que foram consideradas nessa organização.

A Figura 24 identifica os elementos de análise epistêmica-ecológica utilizados para cada uma das atividades propostas.

Figura 24 – Identificação dos elementos de análise didática utilizados



Fonte: A autora, 2021

A análise, representada nos quadros, descreve o que se espera que ocorra em termos de interações didáticas e está apresentada nas seções seguintes, referentes às práticas operativas e discursivas de cada uma das atividades propostas. No entanto, somente as respostas efetivamente manifestadas pelos estudantes nos permitiram saber, de acordo com os significados pessoais alcançados, se o significado institucional implementado foi consistente com o pretendido.

Dessa forma, para cada configuração didática, estabelecemos análises *a priori* das práticas, fazendo uma correspondência *a posteriori*, identificando, além dessas, os objetos e processos mobilizados, refletindo acerca do significado pessoal dos estudantes, bem como das dificuldades e/ou de conflitos semióticos manifestados. São colocados em evidência, aspectos relativos à linguagem, representações, relações e argumentos, utilizados para validar e explicar as propriedades/proposições.

Foram analisados todos os protocolos das duplas que realizaram as atividades. Para tanto, intercalamos segmentos de transcrição, correspondendo a uma amostra de fatos didáticos significativos (FDS)³⁴, que nos auxiliaram na identificação e avaliação das trajetórias didáticas no estudo do tópico em referência.

Utilizamos na análise a noção de FDS como critério para delimitar configurações

³⁴ Consideramos, conforme Godino *et. al* (2014), que um fato didático é significativo se as ações ou práticas didáticas que o compõem desempenham um papel, ou admitem uma interpretação, em termos do objetivo instrucional pretendido.

didáticas, ligadas à resolução das situações-problema propostas e à manifestação dos componentes epistêmicos, cognitivos ou instrucionais que caracterizam o processo de estudo correspondente. O FDS não se refere, exclusivamente, à identificação dos significados dos estudantes, mas à sua importância para a compreensão do processo de estudo em si.

Nas seções seguintes apresentamos as descrições das trajetórias geradas para o desenvolvimento das Unidades 1 e 2, detalhadas por atividade.

7.3 Descrição da trajetória didática referente ao desenvolvimento da Unidade 1: Institucionalização do conceito de Integral Definida

Realizamos, no primeiro encontro presencial, uma apresentação inicial aos estudantes, acerca dos objetivos da pesquisa, a metodologia, os procedimentos, bem como outras informações descritas no TCLE, que foi lido e assinado.

Uma vez expostas tais informações e a temática de estudo, buscamos saber dos estudantes seus conhecimentos prévios de Cálculo Diferencial e Integral e, especificamente, seus conhecimentos sobre o tópico Integral. Consideramos esse momento como um fato didático significativo, baseado em uma interação magistral, em que houve explicação da tarefa e dos conhecimentos anteriores.

Nesse momento, também foram estabelecidas as normas e regras de implementação das atividades. Partindo da premissa de que, na aula de Matemática, é estabelecido um compromisso básico, o de ensinar e aprender, é natural direcionar o interesse para as normas que determinam a atividade matemática possível de desenvolver em uma instituição. Desse modo, foram instituídas convenções que descreveram como deveria ser a forma de comunicação entre eles – foi priorizada a comunicação entre as duplas e estabelecido como poderia ser a reação em relação a alguma inconsistência ou erros nas respostas dadas à atividade.

Essas normas, identificadas no EOS como *normas epistêmicas*, regulam o conteúdo matemático, o tipo de situações adequadas para a aprendizagem, as representações utilizadas (em termos de linguagens), as definições, proposições, procedimentos e argumentos.

Para análise do aspecto normativo do processo educativo investigado, foram consideradas as respostas registradas pelos participantes da pesquisa em relação às configurações didáticas categorizadas, apresentadas nas seções seguintes. Além disso, foram incluídas as normas que intervieram durante as sessões de *feedback* e institucionalização, realizadas no início de cada nova atividade em relação à anterior. Para a identificação dessas

normas procuramos identificar as situações regularmente apresentadas e os momentos de interação didática associados a algum tipo de quebra do padrão esperado, ou seja, foram observadas as regularidades ou discrepâncias entre as normas que se esperava serem observadas e as que foram colocadas em ação.

Antes mesmo de começar a atividade, uma das duplas já constituídas questionou sobre a diferença existente entre uma Integral Definida e uma Integral Indefinida. Aproveitamos a oportunidade para motivar o diálogo entre os estudantes, remetendo a pergunta aos seus pares, como forma de promoção de alguma reflexão.

PESQUISADORA: *Então pessoal, alguém poderia nos ajudar nessa questão: O que diferencia a Integral Indefinida da Integral Definida?*

ÍTALO: [após alguns minutos de reflexão] *Professora, eu me lembro que tem algo a ver com números que aparecem no símbolo da Integral. Na Integral Definida aparece e na Integral Indefinida não.*

PESQUISADORA: *E o que esses números significam?*

ÍTALO: *Esses números são os limites de integração. Na Integral Definida tem esses limites, na Indefinida não tem. Mas, não sei direito o que isto significa... Só sei que quando tem os números, **resolvemos a integral e passamos o ponto.***

PESQUISADORA: *Ok. Mas, em termos conceituais: O que é Integral Indefinida e o que é Integral Definida. Alguém pode nos ajudar a esclarecer isso melhor?*

BRUNO: *Sei que **a Integral é o inverso da Derivada.***

ÍTALO: *Sei que **o resultado de uma Integral Indefinida é uma fórmula e da Integral Definida, normalmente, é um número.***

PESQUISADORA: *Muito bem, Ítalo! E o que essa fórmula representa? E o número, representa o quê?*

ÍTALO: *A **fórmula é uma função. E o número representa a área.** Acho que é isso...*

Destacamos que esse diálogo, motivado, inicialmente, pelos próprios estudantes, explora o conhecimento comum desses em relação à Integral. As respostas de natureza verbal apresentadas pelos estudantes refletem alguns usos e significados que eles atribuíram a esse objeto matemático ao longo da sua formação. No entanto, ao refletirmos que a compreensão de um conceito precede, geralmente, à capacidade do sujeito de expressá-lo verbalmente, julgamos que as expressões utilizadas pelos estudantes nos trazem uma percepção de que, mesmo já tendo tido contato com o tópico de Integral na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, esses estudantes, possivelmente, não estavam conscientes dos conceitos já estudados acerca desse tema, apontando para a concordância com as pesquisas constantes no Estudo Preliminar desta pesquisa, como em González-Martin (2006), Apolinar (2014) e Brandão (2015), os quais atestam que o desequilíbrio entre os componentes conceituais e procedimentais no ensino da Integral Definida pode conduzir a problemas de compreensão.

A fala do estudante Bruno, “*Sei que a Integral é o inverso da Derivada*”, descreve uma característica observada em nossa prática docente e, também, abordada no Estudo Preliminar:

os estudantes, geralmente, identificam o termo “integral” com “primitiva”, e pouco identificam o processo de convergência e os aspectos geométricos envolvidos, sendo a Integral vista de forma algébrica, mobilizando, esporadicamente, *configuração epistêmica geométrica*, disposta em Crisostomo (2012).

O estudante Ítalo se recorda, inicialmente, da diferença de notação entre os dois tipos de Integral, ficando a percepção, no entanto, quando afirma não saber direito o que isso significa, ou seja, que ele não tem uma boa compreensão dos significados de cada termo da notação – dificuldade também evidenciada nas pesquisas de Cargnin (2013), Menoncini (2018) e outros. Quando Ítalo menciona que o resultado da Integral Indefinida é uma fórmula e que essa representa uma função, percebemos que ele se aproxima do conceito de Integral Indefinida. Ao se referir à Integral Definida como um número que representa a medida de área, refletimos que os estudantes, normalmente, têm uma conceitualização da Integral baseada, unicamente, na noção de área. Essa reflexão também é abordada nas pesquisas de Apolinar (2014), Almeida (2017), Menoncini (2018) e outros.

Aproveitamos o diálogo para reforçar aos estudantes ser necessário fazermos uma distinção cuidadosa entre Integral Definida e Integral Indefinida, revisando que uma Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ tem como resposta da integração um número, enquanto uma Integral Indefinida $\int f(x)dx$ é uma função, ou uma família de funções, e que a conexão entre elas é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Informamos aos estudantes que algumas dessas definições, conceitos e proposições seriam exploradas na proposta didática a ser implementada com eles na condução da pesquisa.

Aproveitamos o ensejo da discussão para perguntar acerca da aplicabilidade da Integral Definida.

PESQUISADORA: *Tenho, então, outra pergunta para vocês: Para que serve a Integral Definida? Me digam uma aplicação desse tópico do Cálculo Integral.*

LUDIMILA: *Eu me lembro que a gente usava nos exercícios referentes a cálculo de área.*

A estudante refere-se à aplicação da Integral Definida para o cálculo de medidas de áreas, então, poderíamos afirmar que a estudante reconhece uma das aplicações da Integral Definida. No entanto, concordamos com Contreras e Ordonez (2006), pela nossa experiência profissional e conhecimento do perfil dos participantes da pesquisa, visto que, geralmente, o estudante não tem essa compreensão, pois alguns não entendem a área como grandeza, reduzindo o conhecimento da medida da área sob o ponto de vista numérico, por meio de

fórmulas.

Apenas os estudantes Bruno, Ítalo e Ludimila participaram desse primeiro diálogo. Os demais observaram atentos as perguntas e respostas registradas. No entanto, foi possível observar a motivação de todos ali presentes em realizar as atividades propostas, reconhecendo a importância dos conceitos a serem tratados e a conscientização de que precisavam estudar um pouco mais.

A cada dupla foi destinado um computador com o *software* GeoGebra *Classic* (versão 5.0) instalado e o guia da atividade impresso. Foi esperado que as indicações impressas no Guia de Atividades constituíssem orientações suficientes para a realização das tarefas, o que implica que nós, professora-pesquisadora, buscamos adotar um papel de mediação no processo educativo, tendo o mínimo de intervenções possível durante a realização das atividades; promovendo, no estudante, um grau satisfatório de reflexão e autonomia na realização das práticas.

Na seção seguinte, destacamos os problemas e práticas matemáticas e didáticas – entendidas como aquelas ações ou manifestações (linguísticas ou não) realizadas ao longo da implementação da proposta didática. Ao colocar em ação propriedades, conceitos e elementos linguísticos relacionados com objetos matemáticos, o estudante é encorajado a percorrer diferentes representações da Integral Definida de uma função contínua f – representação gráfica e representação analítica – por meio da resolução de situações específicas, com base em argumentos que explicam e validam as ações empreendidas.

7.3.1 Práticas Matemáticas e Didáticas referentes à Unidade 1

A ideia central das atividades da Unidade 1 é que o estudante possa institucionalizar o conceito da Integral Definida, na perspectiva da Integral de Riemann, partindo de construções visuais, apoiadas pelo GeoGebra, e por reflexões estimuladas na realização das atividades propostas.

O discurso teórico, desenvolvido ao longo das atividades, necessário para estabelecer as definições e proposições da Integral de Riemann, por exemplo, a definição de uma Soma de Riemann, é ostensivamente apoiado por visualizações de representações gráficas e experimentações possibilitadas pelo *software*. Assim como no trabalho de Turégano (1994), a hipótese é que os estudantes possam, intuitivamente, aprender conceitos de Cálculo antes de desenvolver as habilidades procedimentais, usando a visualização, auxiliada por tecnologias digitais, para dar sentido ao conceito de Integral Definida e suas propriedades, a partir da ideia

de medida da área sob uma curva. Orton (1983) também já apontava que uma abordagem inicial “informal” dos conceitos de Cálculo deve envolver explorações numéricas e gráficas.

As duas situações-problema, dispostas nesta Unidade 1, cujos enunciados são lembrados no Quadro 14, estão centradas no problema ontológico e semiótico-cognitivo, com base em dois significados parciais da Integral Definida, um informal (intuitivo), representado pela *configuração epistêmica intuitiva* (CEI), e outro formal como limite de uma Soma de Riemann, representado pelas *configurações epistêmicas geométrica* (CEG) e *soma* (CES), no sentido proposto por Crisostomo (2012).

Quadro 14 – Situações-problema propostas nas Atividades 1 e 2 da Unidade 1

Situação-Problema 1: Suponhamos que a prefeitura da cidade de Montes Claros necessita de que uma determinada empresa faça uma reforma no Parque Municipal Guimarães Rosa, localizado na Avenida José Corrêa Machado, bairro Ibituruna, e, para isso, precisa obter a medida da área desse Parque. Como obter a medida aproximada de sua área tendo como referência o mapa gerado pelo aplicativo *Google Maps*?

Situação-Problema 2: Escrever um método que permita calcular a medida da área da região limitada pelo eixo Ox e a representação gráfica de uma função contínua f , em um intervalo específico, em que $f(x) < 0$.

Fonte: A autora, 2021

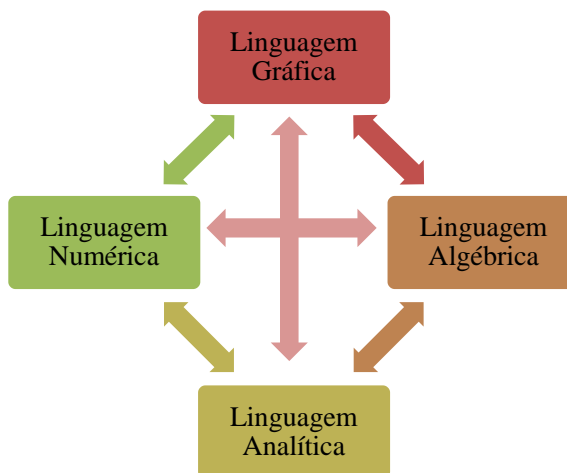
Essas situações-problema disparam uma sequência de tarefas, cujo objetivo é incentivar o estudante a colocar em ação representações da Integral de Riemann, de modo que, partindo de um trabalho dinâmico com o GeoGebra, possa construir a representação gráfica correspondente às funções relacionadas às situações-problema em estudo e aprimorar seus conhecimentos acerca dos conceitos, definições, propriedades da Integral Definida, de forma que possa obter, com base em seus procedimentos reflexivos verbais e construção de argumentos, a expressão analítica que representa uma Soma de Riemann. Assim, a aplicação das sequências contempla o uso dos recursos visuais fornecidos pelo *software* para colocar o estudante em contato com uma noção essencial: uma Soma de Riemann como ferramenta para o cálculo de medida de área.

Na implementação das atividades, os estudantes foram motivados a utilizar determinada linguagem verbal sobre conceitos relacionados às funções e representações simbólicas, como de somatório, integral, limite de uma função. Essa linguagem é a parte ostensiva de uma série de conceitos, proposições, procedimentos, que são usados na elaboração de argumentos, para decidir se as ações que compõem a prática são adequadas.

Dessa forma, as atividades estimulam mudanças na linguagem, ao longo de seu desenvolvimento – da representação gráfica para a numérica–, de forma não intrusiva, e dessa

para a analítica. Isso resulta no esquema produzido, inspirado na TRRS (DUVAL,1991, 2009), que representa as funções semióticas mobilizadas em termos de linguagem, como ilustrado na Figura 25.

Figura 25 – Esquema que representa funções semióticas em termos de linguagem



Fonte: Adaptado da TRRS (DUVAL, 1993, 2009)

Evidenciamos que os estudantes mobilizaram representações dos objetos em diferentes registros, como, por exemplo, no registro em língua materna, na utilização de expressões verbais, quando responderam às questões discursivas e, ainda, ao discutirem entre si acerca das atividades; também, ao sintetizarem as expressões usando a linguagem simbólica matemática ou a linguagem discursiva. Destacamos a mobilização das representações nos registros gráficos gerados no GeoGebra. Os estudantes mobilizaram funções semióticas que correspondem a um instrumento relacional que facilita o estudo da manipulação de objetos matemáticos ostensivos e do pensamento que acompanham as práticas realizadas.

A mobilização das representações em diferentes registros serviu como base para que os estudantes buscassem compreender, formular hipóteses, conjecturas e comunicar a resolução da situação-problema proposta. A conversão de representações entre registros esteve presente no desenvolvimento das atividades, uma vez que os estudantes articularam, de forma favorável, os registros na língua materna, algébrico, gráfico, numérico; o que foi evidenciado a partir de protocolos escritos ou digitais das duplas.

As relações que se estabeleceram entre os diversos objetos e processos matemáticos foram mobilizadas por meio do incentivo ao uso de processos, basicamente intuitivos, que buscaram incitar a necessária compreensão dos conceitos e propriedades dos entes matemáticos que compõem a definição da Integral de Riemann, de forma que os estudantes conseguissem estabelecer um significado pessoal acerca da Integral Definida, próximo do significado

institucional pretendido.

Distinguímos dois tipos de argumentação, seguindo Duval (2009), utilizados para validar e explicar as proposições pertencentes à resolução das atividades da Unidade 1: i) *Retórica*: justificativa verbal de uma declaração e ii) *Heurística*: justificativa da eficácia de uma ação. Isso ocorreu porque os estudantes realizaram os procedimentos para resolver as situações-problema propostas, seguidos de comentários entre si. Em vários momentos, os estudantes utilizaram diálogos com diferentes finalidades: para decidir se as ações que compõem a prática estavam corretas, para “convencer” seu parceiro de dupla acerca de uma resposta a ser registrada ou para esclarecer alguma dúvida.

Na próxima seção, passaremos ao detalhamento seguido da análise *a priori* e *a posteriori* das práticas operativas e discursivas realizadas na Atividade 1 dessa primeira Unidade de Estudo.

a) Práticas operativas e discursivas da Atividade 1 — Unidade 1, analisadas *a priori* e *a posteriori*

Nesta atividade, que foi realizada presencialmente no dia 11/03/2020, partimos de uma situação-problema que apresenta duas abordagens: uma intramatemática (cálculo de medida de área) e outra extramatemática (encontrar a medida da área de um Parque, por meio de seu mapa, gerado pelo aplicativo *Google Maps* e recorrendo ao GeoGebra). Após a disponibilização desse mapa, foram apresentadas tarefas a serem realizadas no *software* para obtenção da medida da área, com uma melhor aproximação possível.

Almejavamos que os estudantes progredissem na compreensão da construção conceitual da medida de área da região compreendida entre a representação gráfica de uma função contínua f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, partindo do limite das somas das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos a essa região, chegando a uma Soma de Riemann e à relação do valor numérico encontrado com a medida aproximada da superfície do Parque.

Ponderamos que uma função semiótica do tipo representacional é estabelecida, uma vez que a medida da área é representada não apenas com um valor numérico, mas por meio de outras linguagens como gráfica, usando o GeoGebra, algébrica e analítica, como em $\text{Área}(R) = \int_a^b f(x) dx$. A atividade busca a institucionalização dos conceitos, reconhecendo a cadeia de relações entre as linguagens gráficas, simbólicas, algébricas e analíticas, fazendo implicitamente a transição para a linguagem numérica – *encontrar o valor da medida da área*

do Parque – que é o objetivo da situação-problema, realizando, por fim, a transformação das escalas gráficas.

Destacamos no Quadro 15 a decomposição da Atividade 1 em *configurações didáticas*, constituídas por *práticas* que resumem as tarefas solicitadas no seu desenho, conforme apresentado no capítulo anterior.

Quadro 15 – Configurações Didáticas – Atividade 1 da Unidade 1

<p>Configuração Didática 1 da Atividade 1 (CD1.1): Manipulações no <i>software GeoGebra</i> para alocação da figura e preparação para realização de reflexões – 1º ao 4º passo da Atividade 1.</p>
<p>P1.1 Preparação da imagem do mapa do Parque no GeoGebra: Inserir e posicionar, adequadamente, a imagem do mapa do Parque na área gráfica do <i>software</i>, observando o sistema de eixos cartesianos. Coincidir uma extremidade do mapa do Parque com o eixo das abscissas. Criar um polinômio que representa uma das extremidades da região que expressa a superfície do Parque. Criar retas perpendiculares ao eixo das abscissas para delimitar o intervalo em que a região que representa a superfície do Parque está representada no plano cartesiano.</p> <p>P1.2 Realização da aproximação da medida da área da região que representa a superfície do Parque, utilizando recurso do GeoGebra: Inserir o comando <i>SomaRetângulos</i>. Variar o número de retângulos utilizados. Identificar o valor numérico relacionado à medida aproximada da área.</p>
<p>Configuração Didática 2 da Atividade 1 (CD1.2): Institucionalização dos objetos matemáticos que compõem uma Soma de Riemann – 5º passo da Atividade 1</p>
<p>P2.1: Experimentação das medidas dos elementos dos retângulos sobrepostos à região que representa a superfície do Parque, quando se altera o número de retângulos.</p> <p>P2.2.: Representação algébrica da soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos, usando somatório ($\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$), sendo A_1 a área do primeiro retângulo, A_2 a área do segundo retângulo e A_n a área do <i>e-nésimo</i> retângulo; e a relação do número de retângulos utilizados com uma melhor aproximação da soma das medidas das áreas dos retângulos, com a medida da área da região que representa a superfície do Parque.</p> <p>P2.3: Interpretação algébrica da divisão do intervalo $[a, b]$ em subintervalos menores e regulares. Institucionalização da relação $\frac{ b-a }{n} = \Delta x$, sendo $[a, b]$ o intervalo considerado, n o número de retângulos sobrepostos à superfície do mapa e Δx a medida dos subintervalos.</p> <p>P2.4: Institucionalização da escolha das alturas $f(c_i)$ dos retângulos sobrepostos à região que representa a superfície do Parque.</p> <p>P2.5: Institucionalização da representação algébrica da medida da área do <i>e-nésimo</i> retângulo: $A_n = f(c_n) \cdot \Delta x$</p> <p>P2.6: Institucionalização da soma das medidas das áreas dos retângulos:</p> $R_n = f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \dots + f(c_3) \cdot \Delta x + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^n A_n$
<p>Configuração Didática 3 da Atividade 1 (CD 1.3): Aplicação da Integral Definida para cálculo da região representada pelo mapa do Parque – tarefas 14 e 15 do 5º passo, 6º passo da Atividade 1</p>
<p>P3.1: Institucionalização da relação do limite com o conceito das somas infinitesimais:</p> $Area = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \dots + f(c_3) \cdot \Delta x + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x]$

P3.2: Associação do conceito de limite ao de Integral, usando a formalização matemática:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx \text{ para funções contínuas, em que } f(x) \geq 0, \text{ em } [a, b].$$

P3.3: Cálculo da proporcionalidade entre a medida aproximada da área da região que representa a superfície do Parque Guimarães Rosa, obtida no GeoGebra, e a medida aproximada da área desse Parque.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Apresentamos, a seguir, a análise detalhada do sistema de práticas, objetos e processos identificados em cada uma das configurações acima referidas.

Ressaltamos que os processos mencionados por Font e Contreras (2008) e Font, Godino e Contreras (2008), quais sejam, generalização-particularização, institucionalização-personalização, representação-significação, decomposição-reificação, idealização-materialização, comunicação, definição, enunciação, argumentação, algoritmização e problematização, estiveram presentes na realização das práticas matemáticas, realizadas pelos estudantes na implementação da Atividade 1. Observamos que, em uma mesma prática, vários objetos e processos podem ser ativados, por esse motivo, priorizamos a exposição daqueles que se destacaram no contexto em que a prática foi realizada.

No Quadro 16, a primeira coluna indica os grupos de práticas relativos à configuração didática 1 da Atividade 1 (CD 1.1); a segunda coluna identifica a utilização ou intencionalidade de cada prática; as colunas 3 e 4 descrevem os tipos de objetos (linguagens, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) e os processos envolvidos nas práticas ou grupos de práticas. Destacamos que os quadros referentes às configurações didáticas não pretendem ser uma coleção exaustiva dos objetos e processos matemáticos mobilizados durante a realização das práticas, por isso, identificamos os objetos e processos que se destacaram no desenvolvimento do processo.

Quadro 16 – Configuração Didática 1.1 – Atividade 1 da Unidade 1

CD 1.1: Manipulações no <i>software GeoGebra</i> para alocação da figura e preparação para realização de reflexões – 1º ao 4º passo da Atividade 1.			
Prática	Uso/Intencionalidade	Objetos	Processos
P1.1 Preparação da imagem do Parque no <i>software GeoGebra</i>	Encontrar a representação algébrica da delimitação do mapa que configura a superfície do Parque no plano cartesiano.	Linguagem: natural, gráfica, algébrica, computacional. Conceitos: Ponto, plano e coordenadas cartesianas, funções, retas, posição relativas entre retas, área.	Interpretação e Comunicação: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Entendimento da declaração do problema, das instruções de manipulação do GeoGebra, relacionando as tarefas realizadas a conceitos estudados. ▪ Um conjunto de números reais é atribuído como conteúdo à expressão $[a, b]$; as letras a (origem) e b (fim) designam os
P1.2 Realização da aproximação da medida da área do mapa do	Exibir, no GeoGebra, aproximações de medida da área de uma superfície plana, limitada por uma	Proposição: a	

Parque utilizando recurso do GeoGebra	curva, e pelas retas $x = a$, $x = b, y = 0$, por falta ou por excesso, utilizando-se coleções de retângulos, com partições regulares.	estimativa tem melhor precisão quando as medidas dos intervalos utilizados são menores. Procedimentos operacionais realizados no GeoGebra.	limites inferior e superior, respectivamente, do intervalo. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Designação do n para representar o número de retângulos Materialização e algoritmização: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Uso do GeoGebra para construções geométricas. ▪ Associação dos comandos do GeoGebra com os elementos conceituais. Visualização: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Interpretação, ação e relacionamento dos conceitos.
---------------------------------------	--	--	---

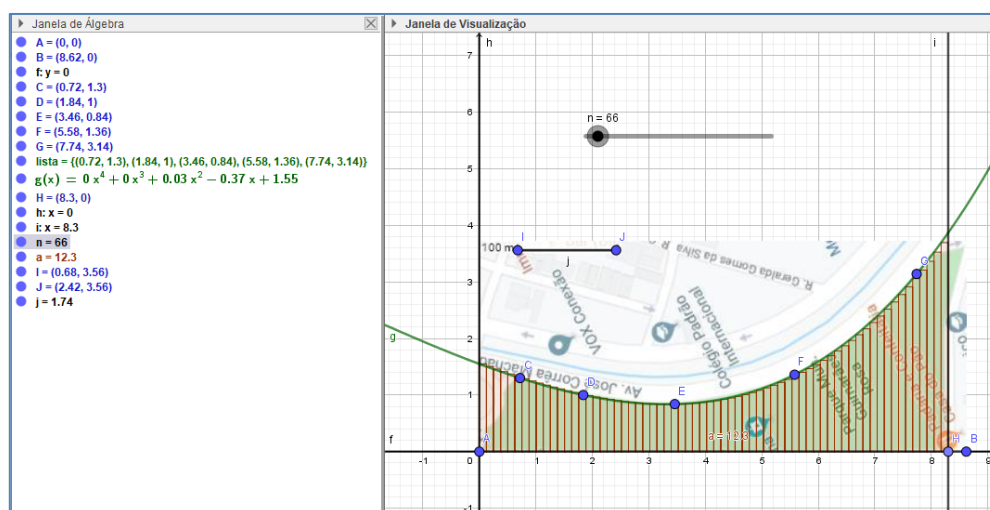
Fonte: A autora, 2021

Em relação à análise *a priori* inerente às práticas da configuração didática 1.1, consideramos que essas possibilitam manipulações e experimentações no GeoGebra, na preparação para o desenvolvimento da ideia intuitiva da aplicação da Integral Definida para o cálculo de medida de área. Esperávamos que, usando os comandos do GeoGebra, os estudantes estabelecessem de forma algébrica e analítica a delimitação do mapa que configura a superfície do Parque no plano cartesiano. Tal representação é composta por uma função contínua f , gerada por meio de pontos colocados sobre um dos limites da imagem do Parque, do eixo das abscissas e de retas ortogonais a esse eixo.

A visualização dos retângulos, inscritos sobre a superfície do mapa do Parque, foi possível pelo uso do comando *SomaRetângulos* do GeoGebra, que traz uma aproximação da medida da área dos retângulos colocados sobre ela, possibilitando o cálculo da aproximação do valor da medida da área do Parque. Foi esperada a percepção dos estudantes durante a experimentação no recurso *controle deslizante* do GeoGebra de que, ao observarem poucos retângulos sobre a imagem da figura, haveria certo erro no cálculo da medida da área, pois os retângulos dispostos não se alojariam perfeitamente à superfície, apreendendo, portanto, que esse erro poderia ser atenuado, diminuindo-se a medida da base de cada um deles e, concomitantemente, aumentando a quantidade de retângulos.

Após a implementação da CD 1.1, era esperado que o estudante apresentasse a tela no *GeoGebra* em conformidade com a Figura 26.

Figura 26 – Tela do GeoGebra referente às práticas inerentes à CD 1.1



Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Com relação à análise dos aspectos relativos à linguagem, destacamos o uso das linguagens natural, simbólica, algébrica e computacional que podem ser mobilizadas pelos estudantes ao cumprirem as tarefas propostas nessa atividade.

Quanto à análise *a posteriori* inerente às práticas previstas na configuração didática 1.1, todas as duplas participantes realizaram-nas com a utilização do GeoGebra, usando uma prática discursiva de reflexão sobre a prática operacional. Os estudantes manipularam e realizaram experimentações com poucas dificuldades operacionais com relação aos recursos do *software*. Foi percebido que à medida que as duplas realizavam os procedimentos operacionais solicitados, verificavam se os resultados retornados pelo *software* eram satisfatórios, fazendo a correção desses quando necessário, fundamentados em comparações e experimentações, como observado no seguinte diálogo:

ELBA: *Você acha que esses cinco pontos serão onde?*

FRANCIELE: *Os pontos estão ficando diferentes, era pra ficar mais pra cima. (...) Será que tá bem na bordinha aqui embaixo?*

ELBA: *Eu acho que esses pontos deveriam ficar nessa borda verde, olha para você vê, aqui é como se fosse o Parque.*

FRANCIELE: *Então abaixa o ponto que é isso.*

Destacamos, nesse diálogo, que as estudantes atendem aos procedimentos operacionais solicitados de encontrar a representação algébrica da delimitação da região que representa o mapa do Parque no plano cartesiano, e que fizeram comparações com o que está sendo gerado no GeoGebra, com o conhecimento comum acerca dos conceitos matemáticos presentes na atividade. Elba aponta que os pontos ficaram em lugares diferentes do que estava apresentado na atividade e faz uma movimentação desses para atender à tarefa proposta. É perceptível que

os estudantes usaram a tecnologia como apoio, validando, discordando ou concordando, expondo argumentos matemáticos relacionados com o que está sendo visualizado, conforme análise das práticas realizadas pela mesma dupla:

ELBA: *Temos que colocar uma reta perpendicular a $y = 0$. Mas a reta ficou em cima do eixo x . Parece que o comando não deu certo.*

FRANCIELE: *Apaga e clica de novo para criar uma perpendicular ali.*

ELBA: *Nesse caso, vou criar uma perpendicular a esse ponto?*

FRANCIELE: *Não, tem que ser perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto H e outra passando pelo ponto A . Acho que é assim... tenta aí.*

Analisamos o arquivo do GeoGebra dessa dupla e verificamos o processo de construção dessa atividade, acionando o recurso *construção passo a passo*. Percebemos um procedimento operacional incorreto na primeira tentativa da dupla em criar a reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto H . Uma das estudantes acionou o recurso reta perpendicular e, posteriormente, clicou no eixo das ordenadas e no ponto H . Assim, foi exibida a reta $y = 0$. A percepção da dupla que tinha algo errado traz evidência dos conhecimentos prévios de Matemática construídos na Educação Básica, bem como da realização dos processos de *interpretação e comunicação* no estabelecimento da relação das tarefas realizadas com conceitos: reta perpendicular, pontos, posições relativas entre reta e ponto, entre outros.

O processo de visualização, por meio dos recursos do GeoGebra, ocupou um lugar privilegiado, como processos cognitivos mobilizados na realização das atividades, pois facilitou, de forma significativa, a compreensão dos estudantes acerca da aproximação da medida da área do Parque, conforme evidenciado pelas falas de Ludimila e Túlio ao realizarem a prática P1.2:

LUDIMILA: *Tem que ir na barra de entrada, olha lá soma dos retângulos.*

TÚLIO: *É verdade o erro que terá. Olha para você ver, se usarmos apenas um retângulo o erro será muito grande. Olha os retângulos sendo criados, que massa!*

Eu sei no quadro, mas estou falando no GeoGebra!

LUDIMILA: *Quanto mais retângulos, mais exata fica a área.*

TÚLIO: *Verdade, usando mais retângulos, a área do Parque fica mais aproximada.*

Evidenciamos que os estudantes percebem a soma das medidas dos retângulos. Ao afirmar “*eu sei no quadro*”, entendemos que Túlio pode ter tido a intenção de expressar que sabe resolver a Integral Definida por meio de um processo de algoritmização e que, nesse caso, a possibilidade da visualização está sendo útil para tornar o contexto gráfico-geométrico acessível, podendo ajudá-lo a esclarecer as relações existentes entre a representação algébrica e a geométrica.

As respostas às tarefas propostas foram produzidas de acordo com a experimentação realizada no GeoGebra, que possibilitou a produção de representações mentais pelos estudantes. Alguns argumentos utilizados nas justificativas das tarefas foram baseados na visualização gráfica, apoiados pela exibição das representações na tela e nos resultados numéricos obtidos na janela de álgebra do GeoGebra nas etapas de resolução da situação-problema. Por exemplo, na realização da prática P1.2, Ludimila diz: “*A medida da base dos retângulos vai diminuindo, à medida que o número de retângulos vai aumentando*”.

Nesse sentido, verificamos que o apoio à visualização gráfica possibilitou a produção de argumentos dedutivos dos estudantes. Nessa atividade, a visualização e a coordenação entre as múltiplas representações – numérica, algébrica e geométrica – proporcionadas pelo uso do GeoGebra se complementaram ao estimular a capacidade de explorar, conjecturar, refutar, concluir, demonstrar, abstrair, entre outros processos cognitivos.

Foram evidenciadas, nessa análise, dificuldades e reflexões relacionadas aos procedimentos realizados no GeoGebra para disposição de pontos na imagem inserida no *software* e a determinação da função polinomial para representar uma das fronteiras do mapa do Parque. Esses procedimentos eram imprescindíveis na prática P1.1. Alguns diálogos atestam essa abordagem, por exemplo, quando Gisele dialoga com seu colega Bruno:

GISELE: *Vai criar tipo uma função de segundo grau ou de algum outro grau?*
BRUNO: *Veja aí, criou uma função de quarto grau. E quando aumentamos o número de pontos e acrescentamos à lista, a aproximação no lado do mapa fica melhor. Veja!*

Em relação aos conceitos, foram evidenciadas, nesta análise, algumas dificuldades de compreensão dos estudantes em relação aos conceitos de geometria plana, como posição relativa entre retas no plano cartesiano, reta perpendicular, localização de ponto no plano cartesiano, entre outros conceitos necessários à realização das práticas matemáticas.

Apresentamos, no Quadro 17, a análise detalhada do sistema de práticas, objetos e processos relacionados à segunda configuração didática da Atividade1, Unidade 1 (CD 1.2).

Quadro 17 – Configuração Didática 1.2 – Atividade 1 da Unidade 1

CD 1.2: Institucionalização dos objetos matemáticos que compõem uma soma de Riemann – 5º passo da Atividade 1 (tarefas 1 a 13).			
Prática	Uso/Intencionalidade	Objetos	Processos
P2.1: Experimentação das medidas dos lados dos retângulos	Fazer experiências no GeoGebra e utilizar o raciocínio intuitivo na construção de argumentos.	Linguagem: ▪ Natural, gráfica, algébrica, computacional. Conceitos: ▪ Partição, amplitude, somatório,	Materialização-Idealização: ▪ Percepção da representação geométrica dos objetos (função,
P2.2: Uso da	Relembrar as notações	soma superior e soma inferior	

<p>notação</p> $\sum_{k=1}^n A_k$ $= A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$	<p>utilizadas para designar somas, necessárias para o entendimento da formalização de uma Soma de Riemann.</p>	<p>Procedimentos operacionais:</p> <ul style="list-style-type: none"> Construir retângulos dispostos sobre os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, que tenha base de medida Δx e altura $f(x_i)$ e adicionar à medida de suas áreas. Movimentar o controle deslizante do GeoGebra, variando o número de retângulos sob uma curva f em um intervalo $[a, b]$. Aproximar a medida da área da região representada pelo mapa do Parque, limitada pela curva f e eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$, usando retângulos inscritos, escolhendo-se pontos tal que: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_{n-1} < x_n = b;$ 	<p>retângulos, superfície)</p> <p>Interpretação:</p> <ul style="list-style-type: none"> Δx designa a amplitude de qualquer subintervalo. Dividir (o intervalo) em n subintervalos significa dividi-lo em n partes desarticuladas. A letra n refere-se ao número finito em que o intervalo é decomposto
<p>P2.3: Institucionalização da expressão algébrica que representa a amplitude</p> $\Delta x = \frac{ b-a }{n}$	<p>Observar as variações nas medidas dos comprimentos da base de cada retângulo, fazendo a generalização dessa medida para Δx.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Aproximar a medida da área da região representada pelo mapa do Parque, limitada pela curva f e eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$, usando retângulos inscritos, escolhendo-se pontos tal que: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_{n-1} < x_n = b;$ 	<ul style="list-style-type: none"> A letra n refere-se ao número finito em que o intervalo é decomposto
<p>P2.4: Escolha das imagens $f(c_i)$ como medidas das alturas dos retângulos.</p>	<p>Fazer uma articulação das medidas das alturas dos retângulos com a imagem da função f</p>	<p>Procedimentos reflexivos verbais:</p> <ul style="list-style-type: none"> O que representa $f(c_1)$? O que a razão $\frac{ b-a }{n}$ representa na figura? Como obter a medida da área do n-ésimo retângulo (A_n)? Como podemos escrever a soma, de forma genérica, usando a notação de somatório (Σ)? 	<p>Generalização das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> Amplitude dos subintervalos: $\Delta x = \frac{ b-a }{n},$ Medida da área dos retângulos aproximantes $A_i = \Delta x * f(c_i)$ Soma das medidas das áreas dos retângulos: $A_n = \sum_{k=1}^n A_i$
<p>P2.5: Institucionalização da representação algébrica da medida da área de um retângulo,</p> $A_i = \Delta x * f(c_i)$	<p>Generalizar a medida da área de uma porção da região considerada.</p>	<p>Propriedades:</p> <ul style="list-style-type: none"> A subdivisão do intervalo $[a, b]$ deve satisfazer a propriedade: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, 3, \dots, n$ existe um ponto c_i em que a função contínua f assume um mínimo ou máximo absoluto. Portanto, podemos considerar os retângulos, cujas medidas da base são representadas por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$. 	<p>Argumentação:</p> <ul style="list-style-type: none"> A medida da área da região que representa o Parque é obtida por meio das somas das medidas das áreas dos retângulos.
<p>P2.6: Institucionalização da soma das medidas das áreas dos retângulos:</p> $R_n = \Delta x * f(c_1) + \Delta x * f(c_2) + \dots + \Delta x * f(c_i)$ $= \sum_{i=1}^n A_i$	<p>Generalizar a soma das medidas das áreas das porções da região considerada.</p>	<p>Argumentos:</p> <ul style="list-style-type: none"> Quando se aumenta a quantidade de retângulos sobrepostos ao mapa do Parque, maior será a aproximação referente à soma das medidas das áreas desses e a medida da área da região que representa o Parque. Quando a quantidade de retângulos tende a infinito, a medida da base desses tende a zero. 	<p>Argumentação:</p> <ul style="list-style-type: none"> A medida da área da região que representa o Parque é obtida por meio das somas das medidas das áreas dos retângulos.

Fonte: A autora, 2021

Considerando a análise *a priori* inerente às práticas da configuração didática 1.2, elas iniciam uma parte da Atividade 1 que requer dos estudantes da Licenciatura em Matemática

melhor reflexão para apresentarem suas respostas, pois são expostos questionamentos de forma a induzi-los a usar a linguagem natural ou simbólica, com base nas reflexões ocorridas durante as experimentações no GeoGebra. Os estudantes foram estimulados a usar o raciocínio intuitivo e experimental de forma autônoma, buscando a solução para a situação-problema proposta, realizando as instruções inicialmente propostas – aumentar a quantidade de retângulos – e dando a significação matemática daquele experimento feito, sendo estabelecidas relações nas quais as generalizações são diretamente observáveis – seja na descrição da atividade, na ação ou na percepção do estudante.

Nas práticas matemáticas, intervêm objetos ostensivos (símbolos, gráficos, dentre outros) e não ostensivos (definições, conceitos, proposições, entre outros, que evocamos ao fazer Matemática) e que são representados em forma textual, oral, gráfica e, inclusive, gestual. Almejávamos que os estudantes percebessem os objetos matemáticos: medidas das bases dos retângulos e a relação entre a medida dessas e as amplitudes dos subintervalos; medidas das alturas dos retângulos e medidas de suas áreas. Nesse ponto, esperávamos que o *software* auxiliasse no desenvolvimento dos processos de *materialidade e idealização* uma vez que os objetos matemáticos geralmente não são perceptíveis, no entanto, eles são usados em práticas por meio das notações, símbolos, gráficos. A representação gráfica, possibilitada pelo GeoGebra, é composta por figuras concretas e ostensivas, uma vez que essas são desenhadas pelo *software* e são observáveis pelo estudante. Como resultado do processo de idealização, existe um objeto (retângulo) não ostensivo, isto é, um objeto matemático que não pode ser apresentado diretamente, senão por meio de certos ostensivos associados. Assim, para manipular objetos não ostensivos, precisamos de representações ostensivas, que são o resultado de um processo de materialização e, também, representação. No EOS, os processos de materialização e idealização são considerados inerentes à atividade matemática.

A sequência de tarefas desta atividade objetivava que os estudantes experimentassem e partissem de situações particulares para a generalização, utilizando o raciocínio intuitivo e experimental para analisar os resultados relativos ao uso das ferramentas do GeoGebra e relacioná-los com conceitos, definições e propriedades de uma Soma de Riemann.

Nessa configuração, estão abordados conceitos relacionados à série de somas sucessivas (P2.2). A atividade matemática requisitada engloba as ações de revisão e familiarização dos estudantes com a notação sigma (Σ), conceito necessário para a estruturação da definição de Soma de Riemann. Na sequência das práticas, o estudante é instruído a escrever um somatório para o contexto proposto. Como discutido por Duval (2009, p. 15), “as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, mas necessárias ao

desenvolvimento da atividade Matemática”. Na realização dessa prática, a notação do somatório é imprescindível para que o estudante compreenda o objeto matemático, responsável por descrever o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, observados na representação geométrica feita no GeoGebra. Essa prática objetiva detalhar o somatório, indicando adição de parcelas referentes às medidas das áreas dos retângulos. O entendimento desse conceito pelos estudantes tem sido discutido em pesquisas, como a de Menoncini (2018), que detalham alguns entraves ocorridos nesse processo.

Conjecturamos que os estudantes aprimorariam a escrita matemática generalizada, partindo das observações das experimentações realizadas no *software* – variação das medidas das alturas dos retângulos, medidas das áreas, observações das somas sucessivas –, embora a expectativa fosse de que eles apresentassem algumas dificuldades no processo de generalização, que é essencial, uma vez que distingue a criatividade matemática da conduta mecanizável ou algorítmica (OTTE, 2003).

A linguagem é a parte ostensiva do conceito relativo à medida de área (a soma das medidas das áreas dos retângulos se aproxima da medida da área da superfície que representa o Parque), proposições (se a medida da base dos retângulos tender a zero e a quantidade de retângulos tender a infinito, haverá uma melhor aproximação para a medida da área do Parque) e dos procedimentos (diminuir a medida da base dos retângulos, fará com que os retângulos se ajustem à superfície representada pelo mapa do Parque). Esperávamos que os estudantes utilizassem tais objetos na elaboração de argumentos potenciais para a decisão de ações que compõem as práticas e para possibilitar respostas satisfatórias às tarefas apresentadas.

Sobre a análise *a posteriori* inerente às práticas da configuração didática 1.2, em sua realização, as duplas observaram as propriedades e argumentos presentes na conceitualização matemática acerca das medidas das bases e das alturas dos retângulos, o que as levou, progressivamente, à abordagem gráfica e teórica de uma Soma de Riemann. Conforme Turégano (1998), a essência na evolução da compreensão do conceito de limite que constitui a Integral de Riemann é a identificação, aqui possibilitada pelo quadro geométrico-gráfico, da altura dos retângulos, situação que convence o estudante de que realmente existe um número que mede a altura dos retângulos e que esse número se relaciona com a imagem da função f considerada.

Foram realizadas pelas duplas a leitura de textos matemáticos para revisão de conceitos e propriedades e a interpretação desses conceitos, no contexto da situação-problema proposta, escrevendo o somatório de forma genérica, como $\sum_{i=1}^n (\Delta x \cdot f(c_i))$, (com $i = 1, 2, \dots, n$).

Em algumas das práticas propostas, os estudantes conseguiram, partindo da

experimentação, migrar de uma particularidade para uma generalização. Isso ficou evidente em alguns processos mentais, percebidos pela descrição de suas falas, como evidenciado na observação do diálogo de Elba e Franciele, ao fazerem as ações relativas à prática P2.3. Foi possível perceber os processos mentais usados por essas estudantes na generalização da amplitude Δx , quando, primeiramente, encontram as medidas das bases de quatro retângulos, dispostos no intervalo $[1,5]$ e, após, aumentam o número de retângulos e observam a medida dos subintervalos que aparecem:

ELBA: *Se utilizamos 4 retângulos no intervalo $[1,5]$, cada retângulo terá base com medida 1 unidade. Olha só na tela...*

FRANCIELE: *Então delta x iria ser igual a um.*

ELBA: *A conta seria $(5-1)$, dividido por 4. E se tivermos $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$ A primeira parte pode ser $x_1 - x_0$. Depois $x_2 - x_1 \dots$ Eu creio que seja assim.*

FRANCIELE: *Aqui seria $x_4 - x_3$. De modo geral, delta x é igual a x superior menos o x inferior do subintervalo. Então, podemos escrever $x_n - x_{n-1}$.*

ELBA: *Mas na atividade fala $\Delta x = x_i - x_{i-1}$*

FRANCIELE: *É a mesma coisa, só trocou o n por i .*

Percebemos que a estudante Elba começa por um processo de particularização, entendendo como se calcula a medida de cada subintervalo, nesse caso específico, para depois identificar a forma genérica de escrever a amplitude dos subintervalos.

No entanto, houve dificuldades na sequência da prática P2.3 realizada por outra dupla, que buscava a generalização da amplitude Δx , considerando o intervalo $[a, b]$ e n retângulos, conforme observado na fala de Bruno dirigida a seu colega:

BRUNO: *Como falo da medida do intervalo de uma forma geral? Eu sei a medida desse subintervalo específico. Para saber a medida de qualquer um é só fazer $x_i - x_{i-1}$ como fala na atividade. Mas, professora, como posso falar da medida de qualquer subintervalo, considerando o intervalo $[a, b]$ todo, com a quantidade de retângulos sendo variada? **Aprendemos muito, mas não sabemos expressar.***

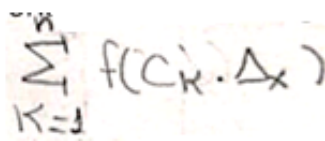
Há uma busca de Bruno por um processo de generalização, ao considerar que a medida do subintervalo poderia ser escrita de uma forma generalizada. Ele tenta encontrar uma regra de construção para os subintervalos, ao se variar a quantidade de retângulos. Ressaltamos, novamente, a dificuldade da linguagem escrita como um mecanismo que atende a complexidade do pensamento.

Alguns outros entraves foram verificados na realização das práticas dessa configuração, conforme sintetizamos:

- estabelecimento da relação da medida das bases dos retângulos sobrepostos à figura

- com a medida da amplitude (Δx) dos subintervalos pertencentes ao intervalo $[a, b]$: dificuldades apresentadas pelas duplas Gisele e Bruno; Ludimila e Túlio;
- disposição de pontos sob a figura que representa o mapa do Parque – a dupla Mariana e Jair havia colocado os pontos sobre a figura, no GeoGebra, em desacordo com as orientações contidas na atividade, gerando uma função cuja representação gráfica não se aproximava dos contornos da imagem do Parque Guimarães Rosa – isso pôde ser verificado no arquivo do GeoGebra da dupla;
 - estabelecimento da medida da altura $f(c_i)$, (com $i = 1, 2, \dots, n$), dos retângulos, escrita de forma genérica e representação da expressão $f(c_i) \cdot \Delta x$ como expressão usada para representar a medida área de um retângulo – dificuldades evidenciadas pelas duplas Mariana e Jair; Elba e Franciele;
 - registro simbólico do somatório. Notamos dificuldades de compreensão e escrita da simbologia relacionada ao somatório nos protocolos realizados pela dupla Elba e Franciele, que cometeu incoerência na escrita algébrica, conforme destacamos na Figura 27.

Figura 27 – Protocolo extraído do Guia de Atividades de uma dupla de estudantes. Prática P2.6 – Atividade 1



$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x$$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

No protocolo destacado na Figura 27, verificamos que as estudantes confundiram a posição dos parênteses ao escrever o somatório $\sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x$ com $c_k \in [a, b]$ para representar, genericamente, a soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos à região do mapa do Parque. Uma das competências matemáticas demandadas ao estudante, no desenvolvimento procedimental, é o uso da linguagem e operações simbólicas de maneira adequada.

É possível perceber, nas primeiras tarefas discursivas dessa Atividade 1, a forma diferenciada que cada dupla teve ao manifestar seus conhecimentos matemáticos. Por exemplo, destacamos as respostas de duas duplas de estudantes, nas Figuras 28 e 29, às tarefas propostas na prática P2.1 – *O que você pode notar a respeito da ocupação física dos retângulos sobre a área do Parque, à medida que aumentamos o número de retângulos?*

Figura 28 – Protocolo da dupla Mariana e Jair, referente à Tarefa 1, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1

Protocolo transcrito: Que ao movimentar o controle deslizante, a ocupação dos retângulos vai diminuindo, obtendo, assim, uma distância menor com mais retângulos nessa área.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Figura 29 – Protocolo da dupla Ítalo e Luiz, referente à Tarefa 1, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1

Protocolo transcrito: Ao aumentar o número de retângulos, estes ocupam a área da figura do parque, de forma que a soma das áreas dos retângulos se aproxima da medida da área do parque.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

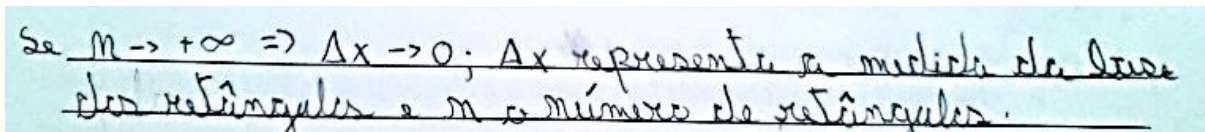
Percebemos, nesses protocolos, que Ítalo e Luiz conseguem estabelecer uma linguagem verbal que expressa corretamente a proposição realizada. As demais duplas também manifestaram respostas similares. A dupla Mariana e Jair não estabelece uma linguagem verbal coerente ao dizer que “a ocupação dos retângulos vai diminuindo, obtendo assim uma distância menor com mais retângulos nessa área”. Embora essa dupla possa ter estabelecido um raciocínio correto, pois na tarefa seguinte responde que “cada retângulo representa uma porção da área desse Parque” e que “o número de retângulos necessários para cobrir toda a área, deve tender a infinito”, é possível que Mariana e Jair não desenvolveram a competência de interpretar o experimento realizado e traduzir as observações alcançadas para uma linguagem natural, com um nível de formalização necessário para a linguagem matemática. Com efeito, recordamos Godino (2017) que diz que para se observar a compreensão pessoal, é preciso analisar as práticas pessoais (significados) estabelecidas, de forma a entender a relação entre as facetas epistêmicas e cognitivas do conhecimento matemático.

Dessa forma, quando se pretende analisar a compreensão de um indivíduo em relação a um dado objeto, as práticas observadas são os indicadores empíricos que permitem efetuar essa avaliação. Outra linha de pensamento possível é que pode ter ocorrido um conflito relacionado à interpretação da tarefa proposta com relação aos termos “ocupação física dos retângulos”.

Analisando os protocolos atinentes às respostas da tarefa “O que acontece com a medida da base de cada um dos retângulos, quando aumentamos a quantidade total desses?”, observamos que, enquanto as duplas responderam corretamente com uma linguagem natural,

apenas Gisele e Bruno fizeram uso da linguagem simbólica, evidenciando a afinidade com essa, mostrando maior preocupação com a linguagem simbólica formal utilizada pela Matemática, conforme explicitado no protocolo apresentado na Figura 30.

Figura 30 – Protocolo da dupla Gisele e Bruno referente à Tarefa 2, 5º passo da Atividade 1, Unidade 1



Se $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$; Δx representa a medida da base dos retângulos e n o número de retângulos.

Protocolo transcrito: Se $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$; Δx representa a medida da base dos retângulos e n o número de retângulos.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Da análise do protocolo dos estudantes expressos na Figura 30, observamos que eles percebem os objetos matemáticos utilizados nas práticas matemáticas e valorizam suas respostas em uma linguagem específica, inerente à Matemática, e usada com frequência no Ensino Superior.

Dessa forma, as práticas matemáticas realizadas na configuração didática 1.2 tiveram o potencial de estimular a habilidade de fluência da linguagem matemática que os estudantes tinham como conhecimentos prévios, além de impulsionar a revisão, ou complementação dessa fluência com representações matemáticas, principalmente, relacionadas à simbolização matemática.

Os estudantes realizaram outros processos matemáticos, além da mobilização de representações, como argumentação e comunicação. Inicialmente, houve a necessidade de representação de um objeto matemático: “*escrever de forma genérica a medida da área de um retângulo*”. Então, esses estudantes partiram para as reflexões necessárias para a identificação dos objetos “*base*” e “*altura*” dos retângulos, e a posterior representação de suas medidas, de forma generalizada, para generalizarem também a medida da área de um retângulo.

Algumas duplas apresentaram dificuldades em identificar esses objetos, como foi observado em algumas ações na implementação da atividade e na representação do somatório das medidas das áreas dos retângulos registradas por elas. Exemplificamos tais dificuldades com o diálogo estabelecido entre Franciele e Elba:

ELBA: *Vamos colocar a área igual a base vezes altura? E vai ser dividido por n. Ou não?*

FRANCIELE: *Não. O n é o número de retângulos que podemos usar, lembra? Já escrevemos a área de um retângulo: delta x vezes altura. Agora temos que somar todas.*

ELBA: *Lembro que delta x é a base. E quem é a altura?*

FRANCIELE: *Aqui é f de c₁. Vamos voltar onde escrevemos a forma geral.*

ELBA: *Escrevemos $A_n = \Delta x * f(c_n)$.*

FRANCIELE: *Então agora temos que fazer um somatório disso, que será a área do Parque que a gente está procurando. Afinal, a área toda é a soma das áreas de todos esses retângulos que aparecem aqui no gráfico, certo?*

Nesse diálogo, podemos observar que as estudantes discutem, inicialmente, como calcular a medida da área dos retângulos que estão sobre a região em estudo. Ao perguntar se o resultado será *dividido por n*, percebemos que Franciele teve dúvidas na compreensão da generalização dessa medida e isso inibe a sua compreensão em relação à soma sucessiva que compõe uma Soma de Riemann. Na fala de Elba, percebemos que essa relaciona a medida da base dos retângulos com a amplitude Δx . No entanto, ao voltar às tarefas respondidas anteriormente, ela conseguiu estabelecer a correspondência manifestando que tinha que fazer um somatório que daria como resultado a medida da área que estavam procurando – isso evidencia um avanço na relação entre as representações gráficas e algébricas.

Essas dificuldades são, também, evidenciadas em outras investigações, como na de Sealey (2014) que desenvolve um quadro de referência para a compreensão da estrutura da Integral de Riemann, indicando a conceitualização de $f(x) \cdot \Delta x$ como a parte mais complexa em relação ao processo de resolução de problemas envolvendo a Integral, apesar da simplicidade das operações matemáticas necessárias nessa etapa. Esse pesquisador distingue quatro níveis de entendimento de objetos matemáticos: produto, soma, limite e função, assim como realizamos no sistema de práticas utilizadas na Atividade 1 desta pesquisa.

Foram evidenciadas, nesta análise, algumas dificuldades de compreensão por algumas duplas de estudantes da Licenciatura em Matemática em relação a alguns conceitos, procedimentos ou propriedades, sendo alguns desses pré-requisitos para a realização das atividades, por exemplo:

- escrever a notação do somatório – dificuldades evidenciadas pelas duplas Mariana e Jair; e Ítalo e Luiz;
- fazer as associações entre o aumento da quantidade de retângulos, a diminuição das medidas das áreas de cada um deles e a diminuição das medidas das bases dos retângulos – dificuldades evidenciadas por Mariana e Jair;
- identificação dos objetos base e altura dos retângulos aproximantes: todas as duplas manifestaram alguma dificuldade na identificação desses objetos.

Os estudantes apresentaram alguns argumentos na realização das práticas relativas à configuração didática 1.2, como exemplificado no diálogo entre Gisele e Bruno ao buscarem a escrita simbólica para a soma das medidas das áreas dos retângulos:

GISELE: Vamos fazer delta x vezes as imagens, e somar cada parcela.

BRUNO: Fazer uma somatória? Por que você colocou $f(c)$?

GISELE: Porque estou considerando a imagem da função.

BRUNO: Mas, a imagem não vai variar? O que fica igual é só a medida das bases dos retângulos, não é não?

GISELE: Entendi o quis dizer. Então está errado.

BRUNO: Então é delta x multiplicado por uma função estrela c. Já sei, coloca C_n igual fala na questão 8, olha só...

Nesse trecho, percebemos as construções dos argumentos dos estudantes. De forma específica, Bruno chama a atenção de Gisele para a variação da medida da altura dos retângulos e da regularidade da medida de suas bases.

As práticas da configuração didática 1.2 iniciam uma estratégia progressiva, na tentativa de que os estudantes cheguem à compreensão sobre a Soma de Riemann. Na terceira configuração didática dessa Atividade 1, as práticas trazem as noções de limite, de aproximações e de somas sucessivas, que conclui a atividade com a aplicação da Integral Definida para cálculo da medida da área da região representada pelo mapa do Parque, conforme está apresentado no Quadro 18.

Quadro 18 – Configuração Didática 1.3 – Atividade 1 da Unidade 1

CD 1.3: Aplicação da Integral Definida para cálculo da medida da área da região representada pelo mapa do Parque – Tarefas 14 e 15 do 5º e 6º passos da Atividade 1.			
Prática	Uso/Intencionalidade	Objetos	Processos
<p>P3.1: Institucionalização da relação do limite com o conceito das somas infinitesimais: Área $= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} [\Delta x * f(c_1)$ $+ \Delta x * f(c_2) + \dots$ $+ \Delta x * f(c_i) + \dots + \Delta$ $* f(c_n)]$</p>	<p>Associar o conceito de limite ao conceito de somas finitas, possibilitando a institucionalização de uma Soma de Riemann. Descrever, simbolicamente, o que está descrito em linguagem natural: A medida da área da região limitada pela representação gráfica da função (que caracteriza um dos lados do Parque), e pelo eixo x, no intervalo $[a, b]$, corresponde ao limite das somas das medidas das áreas dos retângulos, quando o número desses tende a infinito.</p>	<p>Linguagem: <ul style="list-style-type: none"> Natural, simbólica. Conceitos: <ul style="list-style-type: none"> Valor limite de aproximações, somas finitas de parcelas infinitesimais. Definição: <ul style="list-style-type: none"> Limite e Infinitesimal. A medida da área A da região S que está sob a representação gráfica de uma função contínua f é o limite das somas das medidas das áreas dos retângulos aproximantes. Proposições: <ul style="list-style-type: none"> A sequência de estimativas aproxima-se de um único valor limite. </p>	<p>Representação: <ul style="list-style-type: none"> Expressão simbólica das somas sequenciais. Enunciação: <ul style="list-style-type: none"> A medida da área como limite de aproximações. Argumentação: <ul style="list-style-type: none"> Dedutiva com base nas experimentações realizadas no GeoGebra. </p>
<p>P3.2: Associação do conceito de limite ao de Integral, usando a formalização matemática:</p>	<p>Introduzir o conceito de Integral Definida, como o valor limite de um processo em que infinitas parcelas são adicionadas.</p>	<p>Conceito: <ul style="list-style-type: none"> Integral Definida como o valor limite de um processo em que infinitas parcelas são </p>	<p>Enunciação: <ul style="list-style-type: none"> A medida da área como Integral Definida $Área = \int_a^b f(x)dx,$ </p>

<p>Área = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$ para funções contínuas, em que $f(x) \geq 0$, em $[a, b]$.</p>	<p>Usar uma notação sintetizada para descrever, simbolicamente, a notação que representa o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes.</p>	<p>somadas. Definição: ▪ O valor da Integral Definida é o limite das somas das sequências, quando as subdivisões se tornam progressivamente menores.</p>	<p>para funções contínuas, em que $f(x) \geq 0$, em $[a, b]$. Interpretação: ▪ A existência do limite refere-se ao fato de que $\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$ é uma sequência convergente.</p>
<p>P3.3: Realização da proporcionalidade entre a medida aproximada da área da região que representa a superfície do Parque Guimarães Rosa, obtida no GeoGebra, com a medida aproximada da área desse Parque.</p>	<p>Identificar a relação entre a medida da área da região que representa o Parque e o limite das aproximações da soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes.</p>	<p>Procedimentos: ▪ Estabelecer uma escala de proporcionalidade entre as unidades de medidas: centímetros e metros; ▪ Efetuar uma regra de três simples.</p>	<p>Algoritmização: ▪ Comparar e calcular medidas proporcionais.</p>

Fonte: A autora, 2021

Quanto à análise *a priori* inerente às práticas da terceira configuração didática da Atividade 1 da Unidade 1 (CD 1.3), esperamos que o estudante já compreenda o conceito de área como grandeza e tenha algumas intuições acerca dos conceitos relacionados a infinito e limite.

Nesse sentido, esta configuração didática apresenta práticas matemáticas para o estudante aprimorar sua compreensão de que o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, quando o número desses tende a infinito, converge para a medida da área A de uma região S que está sob a representação gráfica de uma função contínua f , em um intervalo específico, ou seja: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x]$.

Durante o desenvolvimento das práticas relativas à configuração didática 1.3 esperávamos que os estudantes revisassem que, frequentemente, usamos a notação de somatório (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira compacta, como em:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x = f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x \text{ com } c_i \in [a, b].$$

Dessa forma, tomando-se o limite quando as subdivisões tendem a ficar cada vez menores, esperávamos que os estudantes compreendessem que a Integral Definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma Soma de Riemann. Se f for positiva, então uma Soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de medidas de áreas de retângulos aproximantes, podendo ser representada, analiticamente por:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx \text{ para } f \text{ contínua, } f(x) \geq 0, \text{ em } [a, b].$$

Em outras pesquisas, constatamos haver dificuldade em associar o limite à Integral. González-Martín (2006), por exemplo, declara que, em alguns casos, falta compreensão do significado de limites e aproximação pelos estudantes. Cargnin (2013) também declara dificuldades da maioria dos estudantes na associação do conceito de limite ao conceito de Integral. Ainda, Contreras e Ordoñez (2006) citam a ação de compreender que uma medida de área “se calcula mediante um processo infinito de soma de retângulos e o resultado seja um número finito” (CONTRERAS; ORDÓÑEZ, 2006, p. 73, tradução nossa), como uma dificuldade relevante. Por isso, estruturamos, detalhadamente, o processo educativo matemático na expectativa de que o estudante aprimore sua compreensão acerca do significado da Integral Definida.

A prática P3.2 aborda a apresentação da medida da área de uma região sob uma curva, escrita como limite de uma soma, o que, geralmente, é apresentado na disciplina de Cálculo mediante uma definição e, muitas vezes, aparece diretamente nos livros didáticos dessa disciplina. O conceito de Integral Definida envolve vários outros conceitos, como o de somatório e convergência, que trazem dificuldades próprias, aumentando a complexidade do conceito. Nessa perspectiva, Burgos *et. al* (2021) expressam que, para o sujeito ler e compreender a definição da Integral Definida, ele deve articular um sistema de conhecimentos prévios para os quais necessita relacionar os diferentes objetos envolvidos nas práticas e reconhecer o papel que cada um desempenha no processo de definição. Por esse motivo, almejávamos que na realização das práticas matemáticas propostas na Atividade 1, os estudantes tivessem contato com esses objetos de forma gradual, coordenando esse sistema de conhecimentos prévios.

A rede de processos reconhecidos nas práticas que compõem as três configurações, de forma específica, os processos de interpretação, representação e enunciação são particularmente fundamentais. Esses processos envolvem conhecimentos que um estudante poderá colocar em ação quando lê, interpreta e compreende a definição da Integral de Riemann.

A prática P3.3 retorna à abordagem da situação-problema, com indicações da realização do cálculo proporcional da medida da área do Parque, considerando a medida encontrada no GeoGebra. Esperávamos que os estudantes realizassem, de forma correta, os seguintes procedimentos referentes a conteúdos de Matemática vistos na Educação Básica: estabelecimento de uma escala de proporcionalidade entre as unidades de medidas (centímetros e metros) e estabelecimento de uma proporção entre a razão de comprimento e a razão de

medidas de área; cálculo de regra de três que relaciona as dimensões contidas nas informações apresentadas no mapa do Parque, com as dimensões relacionadas ao seu tamanho real.

O valor aproximado para a medida da área do mapa do Parque a ser encontrada como solução das práticas realizadas no GeoGebra deveria ser de 12,88 centímetros quadrados. Ao fazer a transformação na escala gráfica, usando uma regra de três simples, os estudantes deveriam encontrar a medida para a área do Parque de, aproximadamente, 32.200 metros quadrados, conforme detalhamos na solução esperada, descrita no Quadro 19.

Quadro 19 – Prática P3.3 – Cálculo da proporcionalidade entre a medida aproximada da área da região que representa a superfície do Parque Guimarães Rosa, obtida no GeoGebra, com a medida aproximada da área desse Parque – CD 1.3 da Atividade 1, Unidade 1

<p>Escala do mapa: $\frac{2cm}{100m}$</p> <p>Transformação da escala gráfica (medida de comprimento para medida de área):</p> $\left(\frac{2}{100}\right)^2 = \frac{4}{10000}$ <p>Efetuada a proporcionalidade:</p> $\frac{4}{10000} = \frac{12,88}{A} \Rightarrow A = 32200m^2$

Fonte: A autora, 2021

Como conclusão das práticas, esperávamos que os estudantes observassem a diferença entre a medida da área encontrada com o suporte do GeoGebra, e a medida da área informada na atividade – *Por informações prévias, obtidas na Web, sabemos que a medida da área do Parque Guimarães Rosa é de, aproximadamente, 35.000m².* O erro, a ser encontrado pelos estudantes seria de, aproximadamente, 8%, conforme apresentamos na solução esperada no Quadro 20.

Quadro 20 – Prática P3.3 – Cálculo do erro encontrado como resultado da proporcionalidade entre a medida aproximada da área da região que representa a superfície do Parque (encontrada no GeoGebra) com a medida da área desse Parque – CD 1.3 da Atividade 1, Unidade 1

<p>Diferença entre a medida da área encontrada no GeoGebra e da medida da área informada por dados da <i>Web</i>:</p> $35000 - 32200 = 2800m^2$ <p>Cálculo da porcentagem do erro: $\frac{2800}{35000} \cdot 100 \Rightarrow x = 8\%$</p>
--

Fonte: A autora, 2021

Ressaltamos que a porcentagem a ser encontrada é considerada uma margem de erro grande. No entanto, justificamos, com uma nota informativa, inserida na atividade, que retrata que, ao longo do tempo, aconteceram invasões de áreas no Parque Guimarães Rosa e, por esse motivo, a extensão atual do Parque é diferente da extensão original.

Assim, a expectativa era de que os estudantes concluíssem as ações relacionadas à configuração didática 1.3, tendo realizado as relações dos conceitos matemáticos trabalhados em um contexto real – cálculo da medida da área de um Parque –, fazendo as interações didáticas necessárias para a resolução da situação-problema. Esperávamos que os estudantes mobilizassem processos cognitivos como enunciação, argumentação, algoritmização, interpretação, entre outros, por exemplo, o de representação, uma vez que foi solicitado que aqueles escrevessem em linguagem natural o que estava sendo verificado, experimentalmente, com o uso do *software*, de forma a dar materialidade ao objeto matemático de estudo.

Em relação à análise *a posteriori* inerente às práticas da configuração didática 1.3, ao utilizarmos a imagem de um Parque, despertamos a atenção para a modelação com base nos resultados advindos da articulação dos conceitos matemáticos, relativos ao cálculo de medida de área, com representações capazes de fazer interações com o mundo, buscando o que propõe Dreyfus (1991), qual seja, utilizar uma estrutura matemática que incorpore as características do objeto, sistema ou processo.

Na implementação das atividades com registros gráficos, foi promovida a interpretação geométrica, de forma a auxiliar na formação das representações mentais e, posteriormente, na tradução dessas representações para outros formatos, como língua natural e simbólica, promovendo também a mobilização do processo de síntese, nas ocasiões em que os estudantes elaboraram e registraram suas respostas na linguagem simbólica.

Na realização das práticas relativas à CD3, ficou evidenciado que algumas duplas de estudantes sintetizaram e formalizaram certos conceitos e definições, como a definição formal de Integral como um limite de uma soma de medidas de áreas de retângulos, com a quantidade de retângulos tendendo a infinito. Conjecturas, reações e hipóteses foram formuladas pelos estudantes acerca dos objetos utilizados, à medida que os retângulos iam sendo colocados na figura, incitando a realização dos processos de enunciação, argumentação, institucionalização e comunicação.

A configuração didática 1.3 trouxe à tona o objeto de estudo *Integral Definida*, nas implementações realizadas pelos estudantes, de forma que, conforme contemplado no EOS, o objeto matemático emergiu das práticas matemáticas. Via de regra, todas as duplas conseguiram fazer emergir a Integral Definida das práticas realizadas, porém, ficou evidente que algumas

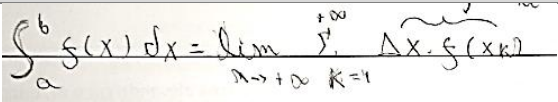
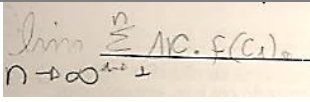
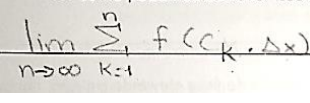
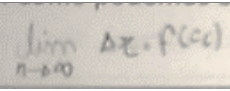
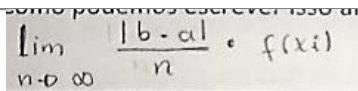
delas tiveram dificuldades e apresentaram alguns conflitos cognitivos relacionados aos objetos que compõem uma Soma de Riemann. Alguns desses conflitos foram observados na realização das práticas inerentes à configuração didática 1.2 e tiveram impacto na resolução das práticas da configuração didática 1.3:

- entender a relação existente entre a amplitude (Δx) dos subintervalos e as medidas de comprimentos das bases dos retângulos;
- identificar as medidas das alturas de cada um dos retângulos, como sendo o $f(c_i)$ com $i = 1, 2, \dots, n$, de forma genérica, utilizando a curva que delimita a área da região;
- fazer a associação entre o aumento da quantidade de retângulos, resultando na diminuição da medida da área de cada um deles, com a diminuição do comprimento de suas bases;
- utilizar a notação adequada para o somatório;
- associar o conceito de limite de um somatório com a soma das medidas das áreas dos retângulos, com o número desses tendendo a infinito, com a definição formal de Integral Definida;
- compreensão insuficiente de alguns pré-requisitos relacionados a conteúdos de Matemática vistos na Educação Básica;
- operacionalizar a mudança de escalas, a resolução de regra de três simples e porcentagem.

Essas dificuldades apresentadas foram minimizadas com a interação entre os estudantes e nas reflexões proporcionadas pelas experimentações realizadas no *software* GeoGebra.

As cinco duplas de estudantes que realizaram as atividades estabeleceram a relação entre a medida da área limitada pela representação gráfica da função polinomial, que representa um dos lados do Parque, e o eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$, e o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos, quando o número desses tende a infinito, conforme foi mencionado anteriormente. No entanto, esses estudantes cometeram alguns equívocos ao articularem o somatório com o limite ou não utilizaram o somatório na escrita algébrica, conforme foi solicitado. Destacamos no Quadro 21, as respostas das duplas à Tarefa 15: *Qual o objeto matemático podemos utilizar para resumir a notação que representa o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, observados na representação geométrica feita no GeoGebra?*

Quadro 21- Protocolos extraídos dos guias de atividades dos estudantes – CD 1.3 da Atividade 1, Unidade 1

Duplas	Respostas apresentadas à Tarefa 15 – Atividade 1 da Unidade 1	Protocolo Transcrito
Gisele e Bruno		$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta x \cdot f(x_k)$
Mariana e Jair		$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(c_i)$
Elba e Franciele		$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f(c_k \cdot \Delta x)$
Ludimila e Túlio		$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \cdot f(c_i)$
Ítalo e Luiz		$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ b-a }{n} \cdot f(x_i)$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

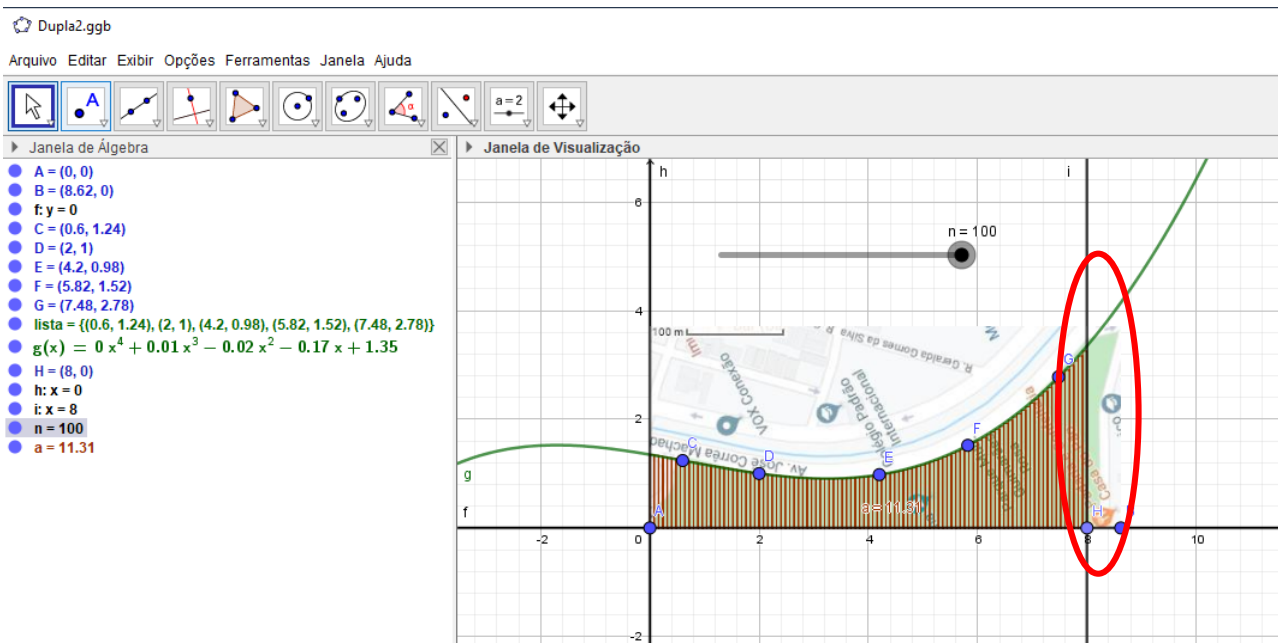
Como podemos observar, Gisele e Bruno, Mariana e Jair, e Elba e Franciele se atentaram para a relação existente entre o limite e o somatório das medidas das áreas dos retângulos, sendo que Gisele e Bruno anteciparam a notação da Integral Definida e Elba e Franciele cometeram algumas falhas nessa escrita algébrica. Já as duplas Ludimila e Túlio, Ítalo e Luiz não apresentaram a relação do limite com o somatório das medidas das áreas dos retângulos em suas notações registradas na atividade e, também, não fizeram menção a essa relação em seus diálogos, conforme verificamos nos áudios. Assim, conjecturamos que as atitudes desses estudantes podem ser provenientes de uma possível incompreensão acerca desse processo matemático.

Todas as duplas registraram que o objeto matemático que podemos utilizar para resumir a notação, que representa o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, é a Integral Definida. As duplas Ludimila e Túlio, Ítalo e Luiz apenas registraram a expressão textual “Integral Definida”, já as demais duplas escreveram a expressão matemática $\int_a^b f(x) dx$ como resposta a essa tarefa.

As cinco duplas resolveram a situação-problema proposta, com aproximações diferentes para a medida da área do Parque, sendo que apenas Mariana e Jair não encontraram um valor aproximado para a medida dessa área – o valor esperado era de, aproximadamente, 32200 m² e

essa dupla encontrou 28275 m^2 . Na análise das resoluções das atividades, tanto pelo protocolo manuscrito quanto pela verificação do protocolo de construção no arquivo do GeoGebra, foi evidenciado que essa dupla não encontrou um valor aproximado porque não dispôs corretamente os pontos na figura – comprovado na exibição da figura do Parque e dos objetos dispostos no *software* que auxiliam no cálculo da medida da área, como pode ser observado na Figura 31, que apresenta a captura da tela do arquivo do GeoGebra dessa dupla.

Figura 31 – Tela do arquivo GeoGebra da dupla Mariana e Jair – Atividade 1 da Unidade 1



Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Observamos na imagem extraída do arquivo GeoGebra dessa dupla que parte do mapa do Parque Guimarães Rosa está fora do intervalo utilizado para o cálculo da soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, o que gerou um resultado muito diferente do esperado para essa soma. Ressaltamos, portanto, que a manipulação incorreta do recurso digital pode causar incoerências e inconsistências, prejudicando o entendimento de um conceito, definição ou propriedade. Isso justifica a importância da configuração dialógica entre professor e estudantes, pois, nesse momento, é imprescindível a orientação do professor.

Os estudantes apresentaram vários argumentos como justificativas para diferentes procedimentos de cálculo realizados por eles na associação da medida da área do mapa no GeoGebra para a medida da área do Parque, conforme exemplo do diálogo entre Gisele e Bruno:

BRUNO: *Quer dizer que cada centímetro aqui vale 100 metros. É uma relação de centímetros para metros. Temos uma unidade aqui que está em centímetros, acho que*

vamos encontrar a área aqui. No caso, precisa converter a escala. (...)

GISELE: Não estou entendendo a pergunta... Ela quer que transforme isso, essa área que está em centímetros. Se estou medindo a área de dois centímetros, ou o comprimento de dois centímetros, você está fazendo dois centímetros virar 100 metros?

BRUNO: Não. Primeiro temos que entender a escala do mapa. Ao medir esse segmento dá 2 cm, que segundo a escala é 100 metros no real, entende?

GISELE: Mas, já está em metros.

BRUNO: O resultado da Integral Definida é a área. Então, temos que fazer a proporcionalidade da escala para área. Entendeu? Por exemplo, de dois centímetros, aí eu passo para uma área de quatro centímetros ao quadrado?

Nesse diálogo em que os estudantes se referem à medida de área, percebemos a argumentação de Bruno para explicar para Gisele a conversão de escala, que apresenta um conflito relacionado às dimensões na escala gráfica. Ao dizer questionar “*essa área que está em centímetros*” podemos inferir que ela, provavelmente, não compreendeu a informação referente à escala gráfica colocada no mapa do Parque no canto superior esquerdo. Ao determinar a medida do segmento no GeoGebra é possível verificar que a escala a ser utilizada é de 2 cm para 100 m. O estudante Bruno apresentou essa explicação para sua colega e realizou o cálculo da proporção de forma correta, como foi verificado no protocolo da dupla.

Assim, em uma análise geral da Atividade 1, verificamos que os estudantes, embora com algumas dificuldades na forma de expressão verbal ou simbólica, alternaram e interpretaram de forma satisfatória as representações, o que evidencia um possível aprimoramento na compreensão conceitual sobre os temas tratados.

Passamos na seção seguinte para a análise das práticas referentes à Atividade 2 da Unidade 1.

b) Práticas operativas e discursivas da Atividade 2 – Unidade 1, analisadas *a priori* e *a posteriori*

No dia 13 de março de 2020, a Atividade 2 foi realizada por nove dos dez estudantes que fizeram a primeira atividade, posto que o estudante Jair realizou a atividade de forma individual, pois a colega de dupla (Mariana) não pôde participar.

Refletindo sobre a indagação de Turégano (1998, p. 234, tradução nossa), “por que não pensamos também na dificuldade das três magnitudes presentes quando definimos a Integral de Riemann: retângulos, os segmentos aos quais são reduzidos e a área curvilínea a ser determinada?”, que traz uma preocupação acerca dos entraves existentes na compreensão pelos estudantes sobre os elementos constituintes de uma Soma de Riemann, trouxemos uma revisão desses conceitos na Atividade 2. A situação-problema proposta tem uma abordagem

intramatemática e apresenta o potencial da familiarização com a notação matemática, ampliando as reflexões acerca dos significados parciais da Integral Definida, de funções contínuas, que apresentam valores numéricos negativos ($f(x) < 0$), em determinado intervalo.

As práticas de manipulação dos objetos matemáticos, apoiadas nas imagens visuais fornecidas pelo GeoGebra, trazem uma possibilidade de progressão da compreensão dos estudantes acerca da seguinte proposição: sendo $f(x) \geq 0$, o valor encontrado para $\int_a^b f(x)dx$ coincide com a definição de medida da área da região compreendida sob o gráfico de f e o eixo Ox , no intervalo $[a, b]$ e que, caso a Integral Definida da função f , em um intervalo $[a, b]$, retorne valores numéricos negativos, a medida da área da região compreendida sob o gráfico dessa função f e o eixo Ox , nesse intervalo, é dada pelo módulo da Integral Definida da função f , naquele intervalo, conforme é detalhado adiante, na análise *a priori*, referente às práticas que estimulam a construção desse significado institucional.

Assim, as práticas dessa atividade aumentam o rol de situações apresentadas na Atividade 1 para que os estudantes se desprendam do conceito geométrico, dando um salto para a expressão analítica, envolvendo a função f . O processo de formação do modelo mental pelo estudante poderá ser alterado por meio de um estímulo que provoca um desequilíbrio cognitivo para ampliação do modelo anterior; e de confronto de conceitos, expandindo, por conseguinte, a definição apreendida anteriormente, como pondera D'Amore (2007), citando Tall e Vinner (1981).

Esperávamos que os estudantes mobilizassem um dos processos cognitivos potenciais: *revisão* e *verificação*, uma vez que as práticas retomam conceitos já vistos na atividade anterior, reafirmando-os; *inclusão*, pois é inserida uma nova situação, diferente da elencada na atividade anterior; *formalização*, *representação*, *tradução* e *generalização*, uma vez que foram apresentadas tarefas nas quais era necessário que os estudantes escrevessem, simbolicamente e de forma generalizada, determinados objetos matemáticos; *visualização* e *materialização*, utilizados nas práticas assistidas pelo *software* GeoGebra; *intuição* e *abstração*, necessários, em várias das tarefas propostas, que incentivavam os estudantes a refletir, observando aspectos relativos aos conhecimentos acerca dos conceitos; *comunicação*, que era um processo frequentemente utilizado, pois os estudantes eram levados a se comunicar com os colegas e a expressar suas respostas, em forma de anotações no guia de atividade; *sintetização*, *definição*, *algoritmização*, *significação*, *enunciação* e *tradução* foram requeridos nas situações em que era solicitado aos estudantes expressar o que foi observado na implementação das tarefas para a formalização matemática (escrita simbólica) e representação conceitual dos aspectos

observados. Alguns desses processos são identificados no Quadro 22, que apresenta a decomposição da Atividade 2 em configurações didáticas, constituídas por um conjunto de práticas matemáticas que resumem as tarefas solicitadas no desenho da atividade, conforme apresentado no capítulo anterior.

Quadro 22 – Configurações Didáticas – Atividade 2 da Unidade 1

<p>Configuração Didática 1 da Atividade 2 (CD 2.1): Manipulações no <i>software GeoGebra</i> para relacionar a Integral Definida com a medida da área de uma região compreendida entre a representação gráfica de uma função f e o eixo das abscissas, num intervalo $[a, b]$, em que $f(x) \geq 0$ – Passos 1 ao 4 da Atividade 2.</p>
<p>P1.1 Partição do intervalo $[0,2]$ em subintervalos e generalização da partição regular de um intervalo $[a, b]$.</p> <p>P1.2 Relação existente entre a soma dos produtos $f(x_i) \cdot \Delta x$ e a medida da área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$.</p> <p>P1.3 Identificação de um método que permita calcular a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,2]$.</p> <p>P1.4 Identificação da expressão analítica usada para representar a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica de uma função f, e o eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$.</p>
<p>Configuração Didática 2 da Atividade 2 (CD 2.2): Manipulações no <i>software GeoGebra</i> a fim de relacionar a Integral Definida com a medida da área de uma região compreendida entre a representação gráfica de uma função f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, em que $f(x) < 0$ – 5º Passo da Atividade 2.</p> <p>P2.1: Experimentação, no GeoGebra, para abordagem dos conceitos relativos à Soma Superior e Soma Inferior, para obtenção de um valor aproximado, por falta ou por excesso, para a medida da área de uma região e pesquisa de outros métodos, usados para se calcular a medida da área de uma região, usando comandos do GeoGebra, fazendo a diferenciação conceitual desses métodos.</p> <p>P2.2: Descrição dos significados de cada termo da expressão $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$.</p>
<p>Configuração Didática 3 da Atividade 2 (CD 2.3): Institucionalização da Integral Definida como ferramenta para medir a área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$ – 6º Passo da Atividade 2.</p> <p>P3.1: Institucionalização dos conceitos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$, em que $R = \{(x, y) \in R^2 a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$ e $f(x) \geq 0$, então: $\text{Área}(R) = \int_a^b f(x)dx$ ▪ Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) < 0$, então: $\text{Área}(R) = \left \int_a^b f(x)dx \right$ ou $\text{Área}(R) = - \int_a^b f(x)dx$ <p>P3.2: Experimentação no GeoGebra – Estabelecimento da relação entre o valor numérico que resulta da expressão $\int_0^3 (x^2 - 9)dx$, com a medida da área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,3]$.</p>

Fonte: A autora, 2021

Apresentamos, nos Quadros 23, 24 e 25, a análise detalhada do sistema de práticas, objetos e processos identificados em cada uma das configurações referidas. Utilizamos para tanto a mesma organização utilizada nas análises da Atividade 1.

Quadro 23 – Configuração Didática 2.1 – Atividade 2 da Unidade 1

CD 2.1: Manipulações no <i>software</i> GeoGebra para relacionar a Integral Definida com a medida da área de uma região compreendida entre a representação gráfica de uma função f e o eixo das abscissas, num intervalo $[a, b]$, em que $f(x) \geq 0$ – Passos 1 ao 4 da Atividade 2.			
Prática	Uso / Intencionalidade	Objetos	Processos
P1.1 Partição do intervalo $[0,2]$ em subintervalos e generalização da partição regular de um intervalo $[a, b]$.	Revisão do processo de generalização da amplitude dos subintervalos, usando partições regulares.	Linguagem: natural, gráfica, algébrica, computacional. Conceitos: amplitude. Procedimentos: cálculo aritmético. Argumentos: Quanto mais se aumenta a quantidade de subintervalos em um intervalo fixo, menor será a amplitude desses.	Algoritmização: Sequência de cálculos aritméticos para dividir o intervalo $[0,2]$ em subintervalos. Generalização: O caso contínuo é inferido a partir dos casos particulares discretos. $\Delta x = \frac{ b-a }{n}$
P1.2: Relação entre a soma dos produtos $f(x_i) \cdot \Delta x$ e a medida da área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo Ox , em um intervalo $[a, b]$.	Revisão da relação entre a medida da área da região compreendida entre o gráfico da função f e o eixo Ox , no $[a, b]$ e a soma dos produtos das medidas dos elementos dos retângulos aproximantes (<i>base · altura</i>).	Conceito: Somas parciais. Procedimento: manipulação dos objetos no GeoGebra e reflexões para responder a cada tarefa proposta.	Significação: as parcelas $f(x_i) \cdot \Delta x$ representam as medidas das áreas dos retângulos, que se ajustam à região compreendida entre o gráfico da função f e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$. Comunicação: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Descrição dos processos, de forma discursiva – utilização de figuras planas ▪ Descrição de resposta simbólica:
P1.3 Identificação de um método que permita calcular a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,2]$.	Representar, em linguagem natural ou simbólica, uma forma para aproximar a medida da área da região em foco.	Procedimento: Utilização de figuras planas, as quais conhecemos a fórmula para o cálculo da medida de suas áreas, na busca de uma aproximação da medida da área da região em foco.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Descrição de resposta simbólica: $\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 4)dx$
P1.4 Identificação da expressão analítica usada para representar a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica de uma função f , e o eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$.	Uso da Integral Definida como ferramenta para o cálculo de medida de área	Conceito: Soma de Riemann	Algoritmização: " <i>Escreva uma fórmula...</i> ", alude a um processo de algoritmização do qual surgirá um procedimento para encontrar medida da área de uma região Representação: $\text{Área} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x,$ $\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 4)dx,$ para $f(x) \geq 0$.

Fonte: A autora, 2021

Quanto à análise *a priori* inerente às práticas da primeira configuração didática referente à Atividade 2, Unidade 1 (CD 2.1), visamos nessas práticas matemáticas possibilitar aos estudantes a formalização do procedimento de usar intervalos infinitesimais, a partir de inspiração em Tall (2002), ao afirmar ser necessário que os estudantes passem por uma

reconstrução cognitiva, em que possam usar adequadamente entidades abstratas, com o objetivo de construir definições formais e deduções lógicas. A abordagem parte, inicialmente, de uma particularização do intervalo $[0, 2]$ para, posteriormente, seguir para a generalização da medida dos subintervalos, quando o intervalo $[a, b]$ é particionado em n partes de mesmo comprimento – esperávamos que os estudantes fizessem a tradução matemática simbólica, que se aproximasse de $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, em que Δx é o comprimento dos subintervalos, ou amplitude.

Almejavamos que os estudantes percebessem, intuitivamente, que as somas das parcelas $f(x_i) \cdot \Delta x$, com $i = 0, 1, \dots, n$ representam a soma das medidas das áreas dos retângulos que se ajustam à região compreendida entre a curva f no intervalo $[a, b]$, existindo certo erro para o valor encontrado.

Para a prática P1.3, presumíamos alguns tipos de posicionamentos dos estudantes: formais, expressando a Integral de f , no intervalo $[0,2]$, para aqueles que apresentam familiaridade com a simbologia matemática; ou a ideia da utilização de figuras planas, das quais conhecemos o cálculo das medidas de áreas, por meio de fórmulas da Geometria Plana, para ajuste dessas à região selecionada – isso para aqueles que não apresentam tanta familiaridade com a escrita formal. A formalização esperada se baseou, como revisão da Atividade 1, na escrita formal da medida aproximada da medida da área da região em tela, como um somatório, como em $\text{Área} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$, ou, de forma específica, para uma melhor aproximação dessa medida, usando a Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$, para $f(x) \geq 0$.

Quanto à análise *a posteriori* inerente às práticas dessa configuração didática (CD 2.1), verificamos que a implementação dessa configuração possibilitou aos estudantes uma revisão dos conceitos e propriedades, como também pôde ser observada nas práticas em que eles foram incitados a escrever um método que permitisse calcular a medida da área sob a curva f e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,2]$. Destacamos o diálogo entre Elba e Franciele:

FRANCIELE: *Aquele dia fizemos os retângulos para calcular a área embaixo, precisava da quantidade de retângulos, aqui teria que usar o mesmo método. Usamos um intervalo bem pequeno aqui, com essas alturas. Podemos usar pequenos retângulos que terão como altura a imagem da função determinada.*

ELBA: *A altura é definida pela função?*

FRANCIELE: *Pelos $f(x)$. A altura é definida pelas imagens de x . E a soma desses intervalos, opa, desses retângulos determinam... Área.*

ELBA: *Abaixo da curva?*

FRANCIELE: *Isso. Tem outra coisa, devia falar que esses retângulos são muito, muito, muito pequeninhos e que são muitos retângulos.*

Apesar da linguagem imprecisa, ficou perceptível no diálogo que as estudantes expressaram observações acerca dos conceitos relativos aos infinitésimos e infinito, ativando processos cognitivos que podem promover o aprimoramento da compreensão desses aspectos.

O sistema de práticas, realizado na implementação da configuração didática 2.1, apoiou-se na representação geométrica, tendo o GeoGebra como suporte, que permitiu inferir que essa implementação impactou os significados pessoais das estudantes, pois elas manifestaram o estabelecimento de uma conexão entre as representações gráficas e geométricas e algébricas solicitadas nas tarefas. Algumas dificuldades surgiram, evidenciadas pela insuficiência de conhecimentos prévios conceituais, o que causou menos fluidez em alguns estudantes na realização de determinadas práticas.

Foi observado que a maioria dos estudantes realizou as práticas propostas de forma satisfatória, mobilizando os conhecimentos acerca dos conceitos essenciais, como, por exemplo, amplitude dos subintervalos, fazendo os procedimentos de forma coerente. É possível perceber que cada dupla de estudante tem uma maneira própria de se expressar, seja de forma verbal ou simbólica, usando linguagem natural ou formal, como descrito por Franciele em diálogo com sua colega Elba, com relação à prática P1.1:

FRANCIELE: *O comprimento do intervalo [0,2] é dividido pelo número de partes. Ele vai diminuir conforme o número de partes aumentar. Ou seja, a amplitude fica menor, quando o número de partes a serem divididas fica maior.*

Na linguagem natural evocada por Franciele, percebemos que ela realizou a associação do comprimento do intervalo à amplitude e que desenvolveu o processo de generalização. A dimensão particular-geral ocupou lugar de destaque nessa primeira prática, em que os estudantes puderam, a começar da fragmentação de processos em ideias menos complexas, partir para a generalização e formalização.

Os protocolos escritos, relativos à prática “*generalização da partição regular de um intervalo [a, b]*” da dupla Elba e Franciele, bem como diálogo similar entre Gisele e Bruno, exemplificam os níveis de formalização: a dupla responde que a amplitude dos subintervalos é dada pela *amplitude* $= \frac{x_2 - x_1}{n}$, em que n é o número dos subintervalos, embora não informem que $[x_2, x_1]$ é o intervalo utilizado. Gisele e Bruno generalizaram, mas ao mesmo tempo particularizaram a expressão referente ao subintervalo, registrando que a amplitude do subintervalo pode ser escrita como *amplitude* $= \frac{2-0}{n}$. Nesse caso, fica explicitado o intervalo [0,2].

Todas as duplas que realizaram a Atividade 2 escreveram usando a linguagem algébrica a expressão relativa à amplitude dos subintervalos de forma coerente, com exceção de Jair, que usou a linguagem natural com algumas imprecisões ao comunicar suas ideias, evidenciando dificuldades na utilização das representações textual, simbólica e algébrica, conforme descrito no protocolo exposto na Figura 32, a qual retrata sua resposta à tarefa: “*É possível escrever, simbolicamente, a amplitude de cada subintervalo? Se sim, escreva*”.

Figura 32 – Protocolo do estudante Jair referente à Tarefa 4, 1º passo da Atividade 2, Unidade 1

Protocolo transcrito: Sim, alguns podemos escrever, outros são muito pequenos.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Quando Jair responde ser possível escrever a amplitude de alguns subintervalos e que alguns são muito pequenos, pareceu-nos ter utilizado a ideia de infinitesimais, percebendo que quanto maior o número de intervalos mais a medida de cada subintervalo diminui, podendo tender a zero.

Observamos, ainda, na análise da interpelação de uma das duplas de estudante feita a nós, professora-pesquisadora, acerca da divisão do intervalo em subintervalos, percebemos a mobilização dos processos de interpretação, comunicação, generalização e formalização ativados por esses.

LUDIMILA: Professora, não entendemos essas questões.

PESQUISADORA: como você relacionaria a amplitude de cada subintervalo com o comprimento total do intervalo? Ou seja, para encontrar a medida do subintervalo, você tem que pegar o intervalo inteiro e fazer o quê com ele?

LUDIMILA: Diminuir.

PESQUISADORA: Diminuir, como?

LUDIMILA: Dividir pelo número de partes?

TÚLIO: A questão está pedindo a amplitude de cada subintervalo?

LUDIMILA: Então, pegamos a amplitude total dividido pelo número de partes.

Quanto à relação entre a soma dos produtos $(f(x_i) \cdot \Delta x)$ e a medida da área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = -x^2 + 4$, definida no intervalo $[0,2]$, e o eixo Ox , solicitada na prática P1.2, verificamos que Elba, Franciele e Jair não apresentaram evidências de compreensão da associação dessa soma à Soma de Riemann. Nos protocolos de resolução das tarefas correspondentes, esses estudantes apresentaram respostas numéricas, como descrito nas Figuras 27 e 28.

Figura 33 – Protocolo das estudantes Elba e Franciele referente à Tarefa 6, 1º passo – Atividade 2 da Unidade 1

6.3) Considere e anote os valores das imagens da função f para cada um desses quatro x_i , nos subintervalos considerados na questão anterior: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$

$f(0,5) = 3,75$ $f(1,5) = 2,75$
 $f(2) = 3$ $f(2) = 0$

7.4) Qual a relação existente entre: A soma dos produtos $f(x_i) \cdot$ amplitude do intervalo e a função considerada nesse intervalo? Explique.

$S = 8,5 \cdot 0,5 = 4,25$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Figura 34 – Protocolo do estudante Jair referente à Tarefa 6, 1º passo – Atividade 2 da Unidade 1

7.4) Qual a relação existente entre: A soma dos produtos $f(x_i) \cdot$ amplitude do intervalo e a função considerada nesse intervalo? Explique.

Todos intervalos tem um valor diferente.

$f(x_1) = 4$ $f(x_2) = 3,75$ $f(x_3) = 3$ $f(x_4) = 1,75$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Observamos na Figura 33 que Elba e Franciele realizaram incorretamente o procedimento de algoritmização, representando por uma sequência de cálculos aritméticos a divisão do intervalo $[0,2]$ em 4 subintervalos de mesma amplitude (solicitado na atividade). Por essa razão, o valor numérico encontrado não se aproximou da medida da área da região especificada, como provavelmente era a intenção do cálculo da dupla. O estudante Jair apresentou apenas os valores das imagens e uma resposta que não expressava uma coerência à pergunta solicitada, conforme ilustrado na Figura 34. Reforçamos, nessa análise, uma dificuldade de interpretação e de comunicação das ideias matemáticas. Inferimos, fundamentando-nos na indicação de Sealey (2014) de que a conceitualização do produto $(f(x_i) \cdot \Delta x)$ pode se apresentar como um aspecto complexo na resolução de problemas envolvendo a Integral Definida, apesar da simplicidade das operações matemáticas. As demais duplas fizeram essa conexão de forma coerente, conforme exemplificamos na Figura 35.

Figura 35 – Protocolo dos estudantes Gisele e Bruno, referente à Tarefa 7– Atividade 2 da Unidade 1

A soma dos produtos representam a medida aproximada da área definida pela função $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[0, 2]$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Na realização da prática P1.3, quatro duplas expressaram uma linguagem simbólica adequada, utilizando-se o modelo matemático $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$. O estudante Jair usou a linguagem natural de que devem ser utilizados retângulos e realizada a operação “*base vezes altura*”. Percebemos, nessa e em outras situações, que, de fato, “a linguagem é uma entidade que desempenha um papel representacional, mas também instrumental”, conforme destaca Godino (2002, p. 245, tradução nossa).

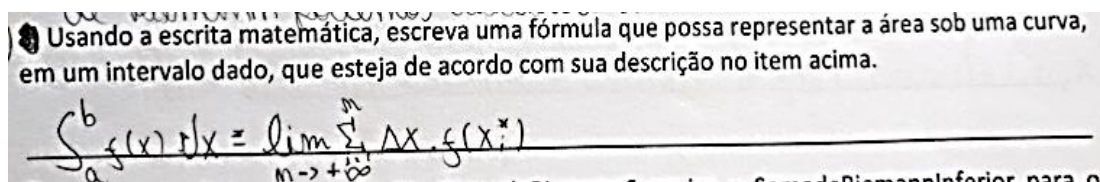
Na formalização, abstração e, conseqüentemente, generalização relativas ao cálculo da medida da área da região em destaque, apenas Jair não conseguiu estabelecer uma formalização coerente. Em resposta à tarefa “*O que você pode concluir a respeito do cálculo da medida da área sob a representação gráfica de uma função, num intervalo dado?*” Esse estudante replicou: “*concluí que a área fica cada vez menor*”. Essa resposta evidencia uma dificuldade de interpretação da tarefa e falha no processo de comunicação. Igualmente, inferimos ser possível que ele tenha realizado uma representação mental, relacionada ao conjunto de representações possibilitada pelo *software* GeoGebra, referente à medida de área de um dos retângulos colocados sob a região. De fato, se a medida da base dos retângulos diminui, a medida da área de cada um tende a diminuir. Concordamos com Dreyfus (1991, p. 38), quando pondera que

há uma dificuldade inerente na abstração: como podemos gerar estruturas mentais, que são frequentemente ligadas a imagens visuais, se elas devem representar relações que são separadas dos objetos concretos aos quais são ligadas originalmente? Se imagens visuais são encontradas, elas provavelmente serão de grande ajuda a estudantes empenhados na abstração. (DREYFUS, 1991, p. 38).

Daí, conjecturamos que Jair se referiu à medida de área de cada um dos retângulos aproximantes, apegando-se à imagem visual de que essa medida diminui conforme a medida da base desses retângulos tende a zero. Parece que, na abstração realizada pelo estudante, ele não realiza a articulação da análise das partes (retângulos aproximantes) com o todo (medida da área de toda a região).

Todos os estudantes realizaram, adequadamente, a escrita matemática solicitada na prática P1.4, aproximando-se do significado institucional proposto, explorando o conceito relativo às somas parciais. A dupla Gisele e Bruno manifestou, com excelência, um significado pessoal ao fazer o registro similar ao significado institucional, proposto para a Integral Definida. Na análise realizada, entendemos que os estudantes desenvolveram habilidades necessárias para o entendimento do conceito da Integral Definida, segundo Riemann, conforme é destacado na Figura 36.

Figura 36 – Protocolo dos estudantes Gisele e Bruno, referente à resolução da Tarefa 11 – Atividade 2 da Unidade 1



Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Nessa prática, a Integral é definida como uma expressão analítica que irá retornar um número, obtido como resultado da aplicação de uma regra, cuja justificação se refere ao sistema de práticas discursivas, operativas e normativas, implementadas ao longo das Atividades 1 e 2.

Alguns argumentos utilizados na validação dos conceitos ou propriedades foram realizados por meio da efetivação de cálculos aritméticos (processo algorítmico) usados nas primeiras práticas relativas a essa configuração, pelas estimativas visuais percebidas na utilização dos comandos do GeoGebra, ou pelas reflexões tomadas em consequência da realização das tarefas propostas. Há de se ressaltar, no entanto, inconsistências na efetivação dessa argumentação pelos estudantes, como no diálogo entre Gisele e Bruno:

BRUNO: *O $f(x)$ é quem? $-x^2 + 4$. E dx ? Posso calcular fazendo isso aqui, é igual a -1 , que sai para fora porque é uma transformação linear. (...)*

GISELE: *É a área que representa a função. É a área da função que representa o intervalo de A até X.*

É notado que a imprecisão da linguagem apresenta possíveis conflitos semióticos que permeiam a realização das práticas. A confusão da área como uma grandeza e como medida, manifestada pela expressão oral “a área que representa a função”, implica um possível conflito semiótico de Gisele; o mesmo ocorrendo com Bruno, ao relacionar o procedimento que deveria ser realizado com uma transformação linear.

Apresentamos, no Quadro 24, a análise detalhada do sistema de práticas, objetos e processos relacionados à segunda configuração didática da Atividade 2 (CD 2.2) que traz manipulações realizadas no GeoGebra.

Quadro 24 – Configuração Didática 2.2 – Atividade 2 da Unidade 1

CD 2.2: Manipulações no <i>software</i> GeoGebra a fim de relacionar a Integral Definida com a medida da área de uma região compreendida entre a representação gráfica de uma função f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, em que $f(x) < 0$ – 5º Passo da Atividade 2.			
Prática	Uso / Intencionalidade	Objetos	Processos
P2.1: Experimentação, no GeoGebra, voltada para abordagem dos conceitos relativos: Soma Superior e Soma Inferior; e pesquisa de outros métodos.	Identificar que existem métodos diferenciados para se obter a aproximação da medida de área de uma região.	Linguagem: gráfica e computacional. Conceitos: Somas de Riemann Superior e Inferior. Procedimentos: Obtenção de aproximações e comparações para as medidas de área, utilizando retângulos inferiores, superiores, ponto médio, aproximação trapezoidal. Proposição: Em geral, formamos as somas inferiores e superiores escolhendo os pontos amostrais x_i , em que $f(x_i)$ é o mínimo (e máximo) valor no i -ésimo subintervalo.	Visualização e Materialização: Percepção visual possibilitada pela análise das representações gráficas, permitidas pelo uso de comandos do GeoGebra – SomaDeRiemannÀEsquerda, SomaRetângulos, SomaTrapezoidal, Integral, Integral e Integral Numérica.
P2.2: Descrição dos significados de cada termo da expressão $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$	Identificação dos termos presentes na expressão analítica em estudo	Conceito: Integral Definida e soma de Riemann como ferramenta para o cálculo da medida de área de uma região	Significação: Descrição dos termos da expressão analítica $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ \int indica o sinal de integração, identificando um limite de somas; ▪ $f(x) = -x^2 + 4$ é o integrando; ▪ 0 (limite de integração inferior), 2 limite de integração superior) e dx o diferencial que representa a medida infinitesimal da amplitude, caracterizada como a medida da base de cada retângulo.

Fonte: A autora, 2021

Quanto à análise *a priori* inerente às práticas da configuração didática 2.2, para elas propusemos o uso dos comandos do GeoGebra que possibilitassem a mobilização do conhecimento relativo às propriedades relacionadas às Somas de Riemann – inferior, superior, ponto médio, trapezoidal. Desejávamos fazer com que os estudantes percebessem, com base em procedimentos operacionais, a diferença geométrica e numérica para o cálculo dessas

somas, e alcançassem a compreensão de que a melhoria das aproximações para o cálculo da medida de área de uma região supõe divisões cada vez menores dos intervalos, de modo que se aproximem, progressivamente, até que as estimativas tomadas por falta e por excesso sejam indistinguíveis.

Procuramos, com o uso do GeoGebra, oportunizar a representação, no registro gráfico dos objetos matemáticos em estudo, de forma a estabelecer relações que auxiliem na resolução das situações-problema. Tais relações se referem às aproximações visuais, numéricas e algébricas, sendo possível analisar os processos cognitivos mobilizados pelos estudantes na utilização do *software*, ao realizarem as conexões entre diferentes representações e funções semióticas. Foram feitas perguntas para motivar os estudantes a formular e discutir questões pertinentes, surgidas ao examinar a situação-problema proposta: “*Escrever um método que permita calcular a medida da área da região entre o eixo Ox até a representação gráfica de uma função contínua f , em um intervalo específico, em que $f(x) < 0$* ”.

As práticas se propõem a conciliar os aspectos técnicos e algorítmicos, possibilitando a mobilização dos processos de visualização e materialização. Na proposição apresentada por Camacho, Depool e Garbín (2008), as *técnicas* também têm um valor epistêmico, uma vez que permitem desenvolver uma série de questões que facilitam a compreensão dos objetos matemáticos que envolvem. Para entendimento dos conceitos, é importante que os estudantes analisem e transformem os resultados produzidos pelo *software*. Ou seja, a *técnica*, mediada ou não pela tecnologia, pode desempenhar não apenas uma função pragmática de resolver tarefas matemáticas mas também uma função epistêmica, o que facilita a construção de conceitos matemáticos (RUTHVEN, 2002 *apud* CAMACHO; DEPOOL; GARBÍN, 2008³⁵).

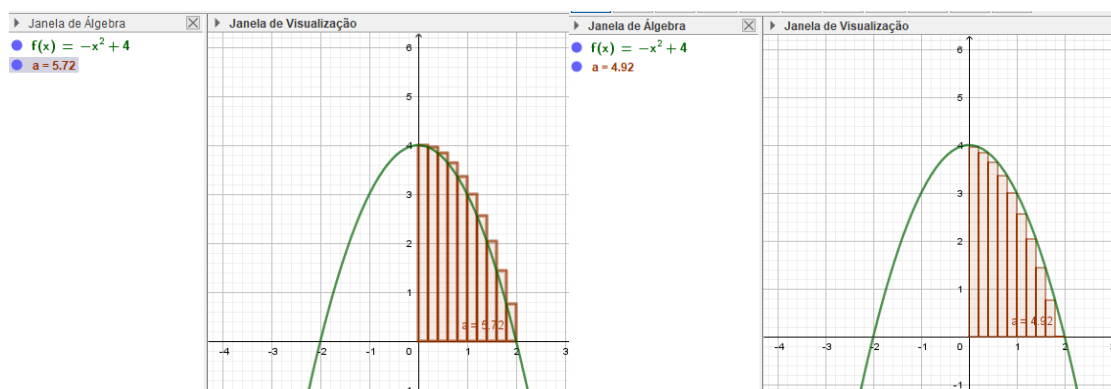
Na prática P2.2, buscamos a compreensão dos estudantes em relação ao resultado da expressão $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$ como um valor numérico, que representa a medida da área de uma região do plano, abaixo da representação gráfica da função $f(x) = -x^2 + 4$, compreendida entre o eixo Ox e as retas $x = 0$ e $x = 2$. Os estudantes deveriam identificar todos os elementos dessa expressão.

Em relação à análise *a posteriori* inerente às práticas da configuração didática 2.2, observamos que os estudantes perceberam que, em decorrência da escolha dos \hat{c}_i em $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, teriam distintos tipos de somas de Riemann – à esquerda, à direita, média, trapezoidal. Isso ficou perceptível na mobilização do raciocínio dos estudantes da pesquisa,

³⁵ RUTHVEN, K. Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 7, n. 3, pp. 275-291, 2002 *apud* CAMACHO; DEPOOL; GARBÍN, 2008.

incitada pela exibição das diferenças numéricas e geométricas, conforme pode ser destacado na Figura 37, que traz as telas dos arquivos gerados no GeoGebra por duas duplas de estudantes.

Figura 37 – Telas de Gisele e Bruno; e de Elba e Franciele referente à realização da Tarefa 12 – Atividade 2 da Unidade 1; utilização dos comandos *Soma Superior* e *Soma Inferior* do GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Nessa construção, o GeoGebra auxiliou os estudantes tanto na percepção da diferença numérica quanto na diferença geométrica, ratificando o que preceitua Dubinsky e Tall (1991) ao detalhar a importância do processo de visualização para o entendimento de conceitos matemáticos. De forma particular, o uso do *software* nos mostrou uma possibilidade de aproximação cognitiva apropriada e, portanto, o aprimoramento do significado pessoal dos estudantes na compreensão de propriedades e conceitos, com métodos dinâmicos de processamento da informação.

Os estudantes apresentaram evidências da ativação dos processos mentais relativos à significação, visualização e materialização dos conceitos, conforme observados em seus diálogos, como na conversa entre Gisele e Bruno ao utilizarem os comandos do GeoGebra (*SomaDeRiemanÀEsquerda*, *SomaDeRiemanÀDireita*, *SomaRetângulos*, *SomaTrapezoidal*):

BRUNO: *Deixa ver se algum valor coincide. Não, aqui, superior deixa os retângulos mais para fora. Então, faz sentido o porquê... O que tá acontecendo é que quando a gente pega daqui para cá, os retângulos ficam mais aqui dentro, então a área fica mais aqui dentro. Olha que legal a soma de Riemann inferior, os valores dão menor do que esse.*

GISELE: *Como fala? A superior está para a direita e a inferior para esquerda. Ou quais outras palavras?*

BRUNO: *Só falar que a soma de Riemann superior sempre vai ter uma área maior em relação à soma inferior. Só que ambos vão para o mesmo lugar, só que essa é maior, ela tende ao infinito então os retângulos tende a ficar abaixo da curva. A soma de Riemann superior sempre é maior em relação ao inferior. A superior deixa espaços acima da curva.*

A análise gráfica, promovida pelo *software*, contribuiu de forma significativa para a

construção dos significados pessoais dos estudantes que, ao terem a ideia formada em suas mentes, se preocuparam “*Como fala?*”, evidenciando a realização do processo de tradução das representações (verbal e formal). Isso se relaciona com o que enfatizam Dubinsky e Tall (1991) ao considerarem que quando uma ideia abstrata é implementada ou representada no computador, infere-se que ela se concretiza na mente.

Quando Gisele diz “*A superior está para a direita e a inferior para esquerda*”, podemos inferir que ela apresenta seu significado pessoal acerca do significado institucional que retrata que as escolhas específicas de c_i , na partição do intervalo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, sendo $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, nos dão diferentes aproximações para a soma de Riemann:

- se $c_i = x_{i-1}$, para todo i , então S é chamado de Soma de Riemann à Esquerda;
- se $c_i = x_i$, para todo i , então S é chamado de Soma de Riemann à Direita;
- qualquer Soma de Riemann, em dada partição – isto é, qualquer soma obtida pela escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – está entre as Somas de Riemann superior e inferior. Uma função é definida como integrável por Riemann se a soma inferior e superior for se aproximando conforme aumenta a partição.

Ao destacar que “*ambos vão para o mesmo lugar*”, Bruno percebeu que a soma superior e a inferior se aproximam, conforme a partição aumenta, ou seja, conforme a amplitude do subintervalo diminui.

Nas reflexões acerca desse diálogo, destacamos, novamente, a importância da interatividade com as tecnologias, concordando com Dubinsky (1991) ao destacar que, por vezes, apenas a verbalização na aula expositiva pelo professor não é suficiente para que o estudante compreenda os conceitos, esse precisa de algum tipo de materialização:

Neste ponto, sobre linguagens, se generalizarmos, nos sugere que a aula tradicional em si, depende amplamente da transmissão linguística, não é muito útil para ajudar os estudantes a adquirirem conceitos matemáticos. Objetos e processos mentais, mesmo existindo na mente do professor, não podem ser transmitidos verbalmente, ou até mesmo através de imagens, a ouvintes. É necessário que o ouvinte interaja em uma construção ativa (DUBINSKY, 1991, p. 121).

Nessa perspectiva, a abordagem dos conceitos matemáticos, com a utilização das tecnologias é uma forma de ativar processos mentais que poderão fazer com que o estudante tenha uma compreensão visual e conceitual.

Os estudantes exploraram o *software* encontrando outros comandos que trouxeram resultados correspondentes ao cálculo da medida de área com as condições citadas. E, nessa

exploração, apresentaram comandos como “*Integral*”.

A linguagem computacional do *software* GeoGebra, em termos dos comandos utilizados, foi usada pelos estudantes com facilidade. Alguns desses comandos utilizados foram novidade, estabelecendo uma comunicação com o *software* que ajudou os estudantes na construção de significados, incorporando processos matemáticos por meio da linguagem utilizada no ambiente, como os comandos: *SomaDeRiemannInferior*; *SomaDeRiemannSuperior*; *SomaDeRiemannÀEsquerda*; *SomaDeRiemannÀDireita*; *Integral*. Isso permitiu uma articulação dinâmica entre os registros gráficos e algébricos, evidenciando o que está proposto por Dubinsky e Tall (1991, p. 243):

[...] o computador é melhor sucedido em processos educacionais quando usado para realçar significados ou através de linguagem de programação incorporando processos matemáticos ou através do uso do ambiente computacional para exploração e construção de conceitos matemáticos (tradução nossa).

Todas as duplas descreveram, na prática P2.2, a expressão $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$ como a Integral da função $f(x) = -x^2 + 4$, no intervalo $[0,2]$, mostrando familiaridade com a simbologia apresentada, ao identificar cada elemento da expressão. Na realização dessa prática, os estudantes puderam detalhar informações particulares em relação a função f , à sua representação gráfica, aos algoritmos de resolução, como observado no diálogo da dupla Elba e Franciele:

ELBA: *Qual o nome disso quando tira a integral? Sempre esqueço.*
 FRANCIELE: *Sem o intervalo, fica integral indefinida.*
 ELBA: *Não, mas tem outro nome.*
 FRANCIELE: *Tem um nome mesmo. Um é soma de Riemann e o outro é...*
 ELBA: *Fala assim, depois que calculava a integral.*
 FRANCIELE: *Para calcular o valor da Integral, usamos o **F grande**.*
 ELBA: ***Não é F grande. É outra coisa.***
 FRANCIELE: *Sim, mas é representada pelo **F grande**. No caso isso aqui a função. E isso aqui é a determinação do intervalo que está procurando.*
 ELBA: *Isso.*
 FRANCIELE: *Então é integral de... **Primitiva**.*

Nesse diálogo, observamos que Elba e Franciele identificam cada objeto da expressão $\int_0^2 (-x^2 + 4)dx$ e lembraram as denominações utilizadas, aproximando-se da definição conceitual de que a Integral Indefinida de uma função pode ser vista como uma família de primitivas da função.

A terceira configuração didática da Atividade 2 (CD 2.3), detalhada no Quadro 25, contempla práticas que preveem a mobilização dos processos de institucionalização/enunciação

de conceitos matemáticos trabalhados na Atividade 2.

Quadro 25 – Configuração Didática 2.3 – Atividade 2 da Unidade 1

CD 2.3: Institucionalização da Integral Definida como ferramenta para medir a área da região compreendida entre a representação gráfica da função f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$ – 6º e 7º passos da Atividade 2.			
Prática	Uso / Intencionalidade	Objetos	Processos
<p>P3.1: Institucionalização dos conceitos: Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$, em que $R = \{(x, y) \in R^2 a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ e $f(x) \geq 0$, então: $\text{Área}(R) = \int_a^b f(x)dx$.</p> <p>Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) < 0$, então: $\text{Área}(R) = \left \int_a^b f(x)dx \right$ ou $\text{Área}(R) = - \int_a^b f(x)dx$</p>	<p>Institucionalização da função Área – Generalizar a Integral Definida como um processo para o cálculo de medida de área.</p>	<p>Definição: Integral Definida.</p> <p>Conceito: Integral Definida como ferramenta para o cálculo da medida de área.</p>	<p>Enunciação/ Institucionalização: emergência de um novo conceito: Se $f: [a, b] \rightarrow R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) < 0$, então: $\text{Área}(R) = \left \int_a^b f(x)dx \right$ ou $\text{Área}(R) = - \int_a^b f(x)dx$</p> <p>Visualização: Permite a relação entre o visual e analítico.</p> <p>Síntese: identificação de relações, denominação de métodos, realização de conclusões e escrita formal em linguagem matemática.</p>
<p>P3.2: Experimentação no GeoGebra – Estabelecimento da relação entre o valor numérico que resulta da expressão $\int_0^3 (x^2 - 9)dx$, com a medida da área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,3]$.</p>	<p>Comparar o valor da Integral Definida com o valor da medida da área de uma região.</p>		

Fonte: A autora, 2021

Em relação à análise *a priori* inerente às práticas da configuração didática 2.3, a proposta didática, presente nesta investigação, pressupõe a interferência mínima do professor na realização das tarefas pelos estudantes. Sendo assim, as práticas contemplam a autonomia dos estudantes no processo de institucionalização dos conceitos matemáticos. Ao oportunizarmos a exploração das propriedades da Integral Definida, pretendíamos verificar se os estudantes alcançariam o estabelecimento da conexão entre as representações gráfica e numérica, bem como sua expressão simbólica.

A prática P3.1 buscava a ampliação da compreensão da utilização da Integral Definida. Nessa prática, os estudantes foram questionados quanto ao resultado numérico da Integral Definida, considerando $f(x) < 0$. O ponto de vista apresentado na Atividade 1 utilizou uma função positiva em todo o seu intervalo, garantindo parcelas negativas, que não apareceria no somatório, portanto, destituídas de significados referentes à medida de área.

Entretanto, do ponto de vista processual, o limite se calcula sobre uma soma e não há nenhuma restrição analítica que comprometa a existência dele, caso apareçam parcelas negativas nessa soma. A existência do limite está vinculada à continuidade da função e a uma particularidade na subdivisão do intervalo em pauta.

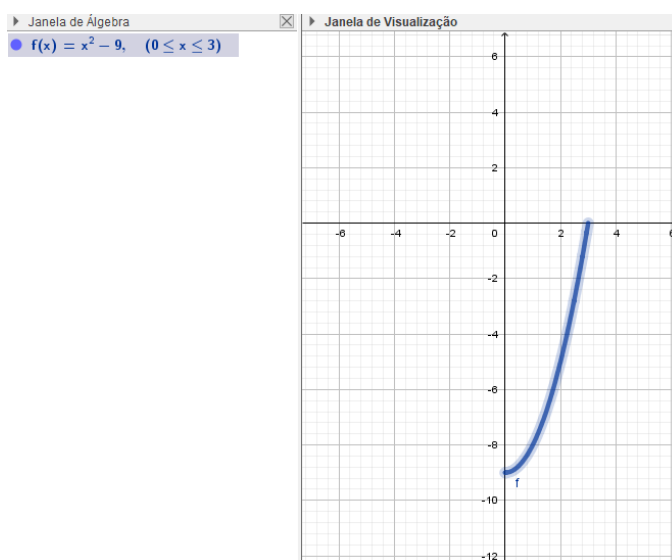
Dessa forma, tínhamos como motivação, na implementação dessa prática, a expectativa de que os estudantes pudessem observar e refletir sobre: *Considerando uma função f , contínua, em que $f(x) < 0$, em dado intervalo, o resultado numérico para $\int_a^b f(x)dx$ será negativo.* Desse modo, deveriam abstrair que: sendo negativo o sinal da Integral Definida, em um intervalo específico, esse valor não pode ser dado como medida de área.

Rasslan e Tall (2002), que também incluíram em sua investigação uma questão envolvendo Integral Definida de funções com valores não positivos em determinados intervalos, verificaram que alguns estudantes não sabiam calcular a medida de área quando a função mudava de sinal. Nessa ocasião, esses autores descobriram que o conhecimento do estudante era limitado a procedimentos algorítmicos, uma vez que eles eram bons em calcular a Integral, mas tinham dificuldade em explicar os valores negativos tidos como resultados, ao conectar as diferentes representações da Integral Definida.

Assim, a expectativa era de poder analisar qual inferência os estudantes da Licenciatura em Matemática teriam fundamentados em um problema similar. Esperávamos, nessa perspectiva, que alguns conflitos semióticos ficassem evidentes e que fossem superados, ou seja, tínhamos a expectativa de que os participantes da pesquisa alcançassem ou aprimorassem a compreensão de que a medida da área A da região compreendida entre a curva que representa a função f , o eixo x , no intervalo $[a, b]$, em que $f(x) < 0$, é o módulo do valor encontrado na Integral Definida utilizada, ou seja, quando $f(x) < 0$, tem-se $A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

Na prática P3.2, almejávamos que os estudantes observassem as imagens da função plotadas no GeoGebra, verificando que essas apresentavam valores negativos para algum intervalo de seu domínio, e que refletissem sobre por que o resultado encontrado em $\int_0^3 (x^2 - 9)dx$ tinha sinal negativo, questionando esse resultado com o auxílio visual permitido pelo GeoGebra, ao realizarem os procedimentos operacionais – o comando *Função* (*<Função>*, *<Valor de x Inicial>*, *>Valor de x Final>*) do GeoGebra deveria ser usado e o resultado previsto é o que está apresentado na Figura 38.

Figura 38 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 9$, no intervalo $[0,3]$



Fonte: A autora, 2021.

Na sequência, a expectativa era a de que os estudantes percebessem a necessidade de utilização do módulo desse valor, ou o valor oposto para esse resultado, ao se referirem à medida da área da região em estudo, fazendo, assim, uma ressignificação do conceito trabalhado na Atividade 1.

Dessa forma, ao concluir a Atividade 2, esperávamos que eles aprimorassem, de forma consistente, a institucionalização dos conceitos relacionados às Integrais Definidas, de funções contínuas, em intervalos fechados e limitados, agregando novos conceitos à definição, sendo capazes de entender que o valor negativo, no caso em que $f(x) < 0$, não corresponde à medida de área, mas ao valor da Integral da função em um determinado intervalo. A imagem da função em um determinado ponto estava associada à altura do retângulo sobreposto à região do plano, no entanto, essa imagem poderia ter valor negativo, tornando a Soma de Riemann também negativa – por consequência do produto $f(x_i) \cdot \Delta x$ – sendo necessária, portanto, a utilização do módulo desse valor para o cálculo da medida de área. Tínhamos a expectativa de que as dificuldades dessa atividade estivessem relacionadas a essa nova significação do conceito de Integral Definida, estando agora enunciada, também, para funções com imagens negativas em alguma parte de seu domínio.

Sobre à análise *a priori* inerente às práticas da terceira configuração didática da Atividade 2, Unidade 1 (CD 2.3), o componente visual, novamente, desempenhou um papel fundamental na compreensão da natureza dessas práticas, que permitiu a formulação de conjecturas pelos estudantes, enquanto o componente analítico desempenhou um papel fundamental na generalização e justificação das soluções apresentadas. O EOS considera que

os processos de materialização e idealização são inerentes à atividade matemática, pois sem a materialização em símbolos não é possível realizar a atividade matemática e, por outro lado, no discurso sobre esses símbolos, sugere-se explícita ou implicitamente que esses símbolos materiais estejam em representação de objetos ideais.

A prática P3.1 possibilitou a reflexão dos estudantes de que se a função f não é necessariamente positiva, em um intervalo $[a, b]$, ainda assim a Integral de f pode ser definida pelo mesmo procedimento aplicado às práticas anteriores. No entanto, há de se ter precaução em relação à interpretação geométrica. Todos os estudantes que realizaram essa prática, perceberam que, caso $f(x) < 0$, em um intervalo $[a, b]$, ter-se-ia o valor da Integral dessa função, nesse intervalo, com sinal negativo.

Ao serem questionados se o resultado de $\int_a^b f(x)dx$, quando $f(x) \geq 0$, teria a mesma interpretação geométrica para $f(x) < 0$, tivemos as seguintes respostas dos estudantes: Gisele e Bruno, Jair, e Ludimila e Túlio responderam que “*sim*”, sendo que essa última dupla, anotou “*sim, será a representação da área*”. Manifestaram, portanto, uma incoerência conceitual ao relacionar o resultado da Integral Definida com a medida de área de uma região, pois, nesse caso, não se tratava da mesma interpretação, uma vez que o valor numérico da Integral de uma função f que tem valores não positivos, em um intervalo $[a, b]$, não corresponde à medida da área da região compreendida entre a representação gráfica dessa função e o eixo das abscissas, nesse intervalo. A dupla Elba e Franciele respondeu que “*não*” e o estudante Ítalo não respondeu a tarefa. Esses protocolos indicam uma tendência dos estudantes de considerarem a Integral Definida sempre como uma medida de área, independente da função, consoante assegura outros pesquisadores, como Almeida (2017), citado no Estudo Preliminar desta tese.

Ao darem sequência a essa mesma prática sobre quais alterações poderíamos realizar na expressão $\int_a^b f(x)dx$, com $f(x) < 0$, para que pudéssemos alcançar a mesma representação para $f(x) \geq 0$, os estudantes Gisele e Bruno, Jair, e Ludimila e Túlio responderam coerentemente: “*que poderia ser usado Área = $-\int_a^b f(x)dx$, caso $f(x) < 0$* ” ou, ainda, “*o valor da área deve ser em módulo*”. A dupla Elba e Franciele respondeu de forma inconsistente que o resultado de $\int_a^b f(x)dx$, com $f(x) \geq 0$ terá a mesma representação de $\int_a^b f(x)dx$, com $f(x) < 0$, mas respondeu em seguida que “*o valor da área deve ser em módulo*”. Ficaram evidenciadas, portanto, algumas incoerências na construção do significado pessoal desses estudantes, sendo percebida uma falta de articulação entre esses significados e a apresentação de um possível conflito semiótico, do tipo cognitivo, já que existe uma discordância entre as

articulações apresentadas acerca da representação da Integral Definida nos contextos de funções positivas e negativas, e na algoritmização apresentada por essa última dupla nas respostas manifestadas.

Na fala de Bruno, percebemos que, ao realizarem essa prática, os estudantes relembrou conceitos e propriedades – “*teremos o resultado da integral negativo. Então, coloca menos integral de f de A a B . Tem uma propriedade que fala que isso*”.

Foi possível evidenciar, ainda, os argumentos instaurados pelos estudantes ao justificarem o procedimento para representação da medida área. Observamos que eles utilizam um sentido heurístico em suas argumentações, refletindo acerca do que pode e não pode acontecer, conforme evidenciamos nas falas de Bruno, e no diálogo entre Elba e Franciele:

BRUNO: *O resultado da Integral dá negativo. Não existe área negativa, mas a integral existe. Eu lembro porquê... Se nós fazermos x^3 (...) calcula a área entre 0 e 2, tem uma área aqui, calcula a área entre esse e esse, dá uma área aqui. Só que quando se soma isso e isso dá zero. A soma das integrais não é a área.*

ELBA: *Ele está negativo. Mas é como uma área, considera positivo.*

FRANCIELE: *Isso que pensei: a área não pode ser negativa. A representação seria a área? Mas a mesma representação não tem.*

ELBA: *Sim, vai voltar a ser positivo quando for representar a área.*

FRANCIELE: *Que quando você faz aquilo é módulo né? É isso aqui né?*

ELBA: *É o módulo. Tem que considerar positivo.*

Quando os estudantes afirmam que “*não existe área negativa, mas a Integral existe*” ou “*isso que pensei: a área não pode ser negativa*”, embora com imprecisão de linguagem, pois deveriam se referir à medida da área, eles demonstram ter um significado pessoal coerente associado ao conceito de Integral Definida. Ainda, percebemos a importância das trajetórias cognitivas dos estudantes permeadas pelas experiências vividas, como contribuintes para a formação de seus significados pessoais, quando expressam: “*eu lembro porquê...*” e citam um exemplo já estudado, reafirmando que os significados pessoais são construídos, progressivamente, ao longo do processo educativo, partindo dos significados iniciais e se aproximando de certos significados (alcançados ou pretendidos) (GODINO *et al.*, 2006).

Na prática P3.2, ao plotarem no GeoGebra a função $f(x) = x^2 - 9$, no intervalo $[0,3]$, todos os estudantes que realizaram essa prática perceberam o valor negativo para o resultado da Integral Definida $\int_0^3 f(x)dx$, e apresentaram justificativas coerentes para esse valor, realizando uma ressignificação da relação da Integral Definida dessa função f , com a medida da área da região plana, compreendida entre a representação gráfica de f e o eixo Ox , no intervalo citado, informando que a medida dessa área seria o módulo do valor encontrado. No entanto, ao formalizarem, simbolicamente, essa interpretação para responderem ao

questionamento: “*Usando a notação de Integral como você poderá representar a medida da área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,3]$* ”, algumas duplas cometeram incoerências na escrita da simbologia matemática referente a essa tarefa.

A complexidade da linguagem matemática ficou evidenciada nas dificuldades dos estudantes no processo de generalização, por exemplo, quando o Jair respondeu que deve representar a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função $f(x)=x^2 - 9$, e o eixo Ox , no intervalo $[0,3]$, usando a notação $\int_a^b |f(x)dx|$. Percebemos o erro na colação do módulo que deveria englobar toda a expressão e não apenas a função f , expressando o módulo da Integral de f no intervalo $[a, b]$. Com base nisso, não se pode evidenciar o desenvolvimento do significado pessoal desse estudante como coerente, pois devemos considerar que outros aspectos de um objeto matemático que antecedem o produto final, como a notação e a manipulação dos símbolos presentes, comumente são realizados sem a compreensão dos seus significados.

Na reflexão sobre o que a função $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ representa, a estudante Ludimila faz as seguintes interpelações:

LUDIMILA: *Professora, aqui está perguntando o que representa $A(x)$. Isso é a área? A área do quê? Do conjunto?*

PESQUISADORA: *Como assim, área do conjunto? Conjunto tem área?*

LUDIMILA: *Quis dizer a área da função neste intervalo.*

PESQUISADORA: *Mas, pense: a função tem área? Vocês estão tentando estabelecer uma relação entre medida de área e qual objeto matemático?*

LUDIMILA: *Acho que $A(x)$ será a área sobre a função?*

PESQUISADORA: *E essa área é limitada?*

LUDIMILA: *Sim. Pelo eixo x .*

PESQUISADORA: *Em qual intervalo?*

LUDIMILA: *De 0 até 2. Só que no caso, está falando disso aqui.*

PESQUISADORA: *Então, o que podemos concluir?*

LUDIMILA: *Que $A(x)$ é área [compreendida entre a representação gráfica] da função sobre o eixo das abscissas, variando no intervalo de 0 a 2.*

Quando a estudante pergunta “*A área do quê? Do conjunto?*”, essa fala aponta para conflitos cognitivos existentes, por exemplo, de identificar os objetos matemáticos e a relação entre eles e, ainda, imprecisões na forma de comunicar as ideias matemáticas. Ao ser questionada por nós “*conjunto tem área?*”, essa estudante passou a refletir acerca das denominações e a pergunta a deixou em um estado de incômodo. Na sequência, a pergunta “*Vocês estão tentando estabelecer uma relação entre medida de área e qual objeto matemático?*” certamente fez com que Ludimila reorganizasse seus pensamentos e refletisse

acerca dos objetos matemáticos presentes naquela situação, para que pudesse realizar o processo de enunciação e institucionalização dos conceitos presentes nessa prática, quando se aproxima do enunciado de que A representa a medida da área da região compreendida entre a representação gráfica da função e o eixo das abscissas, no intervalo de 0 a 2.

Essa prática promove a mobilização da *configuração epistêmica intuitiva* proposta por Crisostomo (2012), com destaque para funções não positivas, em determinado intervalo. Os estudantes tiveram a possibilidade de acionar a intuição para a compreensão dos conceitos que relacionam o resultado da Integral Definida com a medida da área de uma região, conforme é destacado no diálogo entre Gisele e Bruno:

BRUNO: *Ela é maior ou igual a zero, ótimo, ainda bem. Então $\int_a^b f(x)dx = \text{Área}$. Quer dizer que o x está nesse intervalo $[a, b]$ e o y ? Porque é maior ou igual a zero, então está aqui, ele vai até a função. Então o y varia até $f(x)$. Assim definimos $A(x)$ como uma integral.*
 GISELE: *Aqui é a função $A(x)$.*
 BRUNO: *Coisa estranha. Estou tentando entender.*

Quando Bruno diz: “*Ela é maior ou igual a zero*”, entendemos que ele se referia aos valores das imagens da função dada em um intervalo. Destacamos, em negrito, alguns trechos dessas falas de forma a evidenciar os processos mentais realizados pelos estudantes. Percebemos algumas inconsistências matemáticas nessa linguagem oral, evidenciando a complexidade da notação matemática e o desejo do estudante de entender a notação matemática proposta na tarefa, mobilizando os processos de comunicação e significação.

Algumas dificuldades foram evidenciadas pelos estudantes na institucionalização dos conceitos por não associarem, coerentemente, as representações da Integral Definida com a medida da área, no caso de funções em que $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 0$, em intervalos específicos, conforme destacado no diálogo entre Bruno e Gisele:

BRUNO: *É a área? Mas uma função não pode ser uma área. Aliás, pode.*
 GISELE: *É a área que representa a função. É a área da função que representa o intervalo de A até X .*

Percebemos o conflito cognitivo apresentado por Bruno ao questionar se uma função não pode ser uma área. Gisele tentou responder ao colega com um argumento que, para ela, era convincente “*É a área que representa a função*”. Aqui percebemos uma inversão de conceitos, quando na verdade a argumentação correta seria *a função $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ pode representar a medida de uma área*. É possível perceber que os estudantes utilizaram elementos linguísticos

para discutirem soluções, elaborarem respostas, exporem argumentos e que esses elementos também evidenciaram conflitos semióticos, por exemplo, nas falas em que há impedimento na codificação, tradução e interpretação adequada das definições matemáticas. Essa dificuldade poderia ser minimizada pela disponibilização de outras atividades que agreguem essas reflexões, conforme abordado por Vinner (1991, p. 80, tradução nossa): “conceitos matemáticos deveriam ser adquiridos em um modo de formação de conceitos cotidiano e não em um modo técnico. A pessoa deveria começar com vários exemplos e contraexemplos pelos quais a imagem conceitual é formada”.

Na análise dos protocolos dos estudantes, bem como em suas falas, entendemos que eles intuíram, abstraíram e ressignificaram o conceito relativo à associação da Integral Definida como medida de área de uma região.

O processo de síntese também esteve presente nas práticas realizadas na configuração didática 2.3, pois eles manifestaram ter potencial para, partindo de situações específicas, identificarem relações, denominarem métodos, fazerem conclusões e escreverem matematicamente, embora algumas duplas tenham apresentado dificuldades.

A visualização, assistida pelo *software* GeoGebra, foi realizada pelos estudantes e os auxiliou no desenvolvimento da abstração dos conceitos, conforme assegura Eisenberg (1991, p. 148, tradução nossa): “quando é dada ênfase no desenvolvimento visual, há maior retenção do que se os conceitos fossem desenvolvidos de forma analítica”. Pelos protocolos das falas dos estudantes e das respostas no Guia de Atividades, essa retenção ficou evidenciada.

Todas as duplas realizaram as práticas matemáticas propostas, embora com algumas inconsistências já relatadas. Apenas Ítalo, por ter começado a Atividade 2 com atraso, não concluiu as práticas relativas à configuração didática 2.3.

Assim sendo, foi possível verificar que os estudantes efetivaram de forma satisfatória, nas condições cognitivas de cada uma das duplas, traduções e conversões de representações entre diferentes registros, como nas situações em que tiveram que escrever matematicamente o que haviam concluído nas reflexões sugeridas. As tarefas propostas motivaram os estudantes ao processo de mudança de representações e alternância entre elas, ou seja, transitaram por mais de uma representação para os objetos matemáticos em estudo, buscando alcançar maior familiaridade com essas – em língua natural, em linguagem matemática – e reforçando o que foi disposto por Dreyfus (1991), que o processo de aprendizagem está relacionado com o uso de mais de uma representação que ative processos cognitivos e que a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, artefatos que podem ser materialmente percebidos pelo sujeito.

Os estudantes utilizaram-se de diferentes argumentos para validar e/ou explicar as proposições trabalhadas, sendo valorizado o encadeamento de argumentos matemáticos. A argumentação, a abstração e a generalização são processos que possuem forte conexão, por isso a argumentação dos estudantes esteve presente em todas as vezes em que esses mobilizaram os processos de abstração e generalização.

7.4 Descrição da trajetória didática referente ao desenvolvimento da Unidade 2: Aplicações da Integral Definida em Contextos Extramatemáticos

Considerando o que propõe o EOS, que um objeto matemático emerge de um sistema de práticas, cada situação permite a origem de novas representações e práticas, possibilitando a ampliação dos significados do objeto em estudo.

Destacamos, na seção seguinte, as práticas matemáticas e didáticas propostas para a Atividade 3 da Unidade 2, a qual aborda aplicações da Integral na Física com problemas de movimento.

7.4.1 Práticas Matemáticas e Didáticas referentes à Unidade 2

A Atividade 3 foi incluída na proposta didática como forma de relacionar a noção de Integral com outros objetos matemáticos, buscando avaliar a construção do conhecimento e a compreensão dos significados parciais pelos estudantes dessa noção matemática em contextos extramatemáticos.

Godino (2002) afirma que o estudante compreende determinado objeto quando o usa de maneira competente em diversas práticas. A expectativa, na implementação dessa atividade, era de que os estudantes se desprendessem da ideia de a Integral Definida representar apenas um valor de medida de área, relacionada à superfície geométrica, para, assim, associar o resultado numérico encontrado a conceitos relacionados a outras ciências, como, por exemplo, à Física. Nessa perspectiva, a situação-problema retomada no Quadro 26 intenta promover um trabalho intuitivo, com o uso do recurso de visualização permitido pelo GeoGebra, para relacionar a Integral Definida com as grandezas distância, deslocamento, velocidade e tempo.

Quadro 26 – Situação-problema 3, proposta na Atividade3 da Unidade 2

Situação-Problema 3: Um móvel se move em linha reta, com velocidade v , dada em metros por segundo, de acordo com a função $v(t) = 6 - t$, onde t é dado em segundos. Utilizando o *software* GeoGebra, seguindo os passos propostos, responda:

- Qual o deslocamento do móvel, no intervalo de 0 a 12 segundos.
- Qual a distância total percorrida, no intervalo de 0 a 12 segundos.

Fonte: A autora, 2021

O contexto da situação-problema, relacionado à Cinemática, deixa implícito que se trata de um caso de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), pois a aceleração é constante. São colocados dois questionamentos, que são a chave do desenvolvimento da ideia central da atividade – *a) Qual o deslocamento do móvel, no intervalo de 0 a 12 segundos? b) Qual a distância total percorrida, no intervalo de 0 a 12 segundos?* – em que é abordada a diferença dos conceitos físicos de distância percorrida e deslocamento.

Em geral, se tivermos um móvel que se desloca com velocidade modelada por $v = f(t)$, em que $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$ (o objeto move-se sempre no sentido a favor da trajetória retilínea), registramos as velocidades nos instantes $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$, de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então, entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo expresso pela amplitude $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Durante o primeiro intervalo de tempo, a velocidade é, aproximadamente, $f(t_0)$ e, portanto, o espaço percorrido pelo móvel e o seu deslocamento coincidem entre os instantes a e b , tendo como resultado aproximado o produto $f(t_0) \cdot \Delta t$.

De forma análoga, o deslocamento durante o segundo intervalo de tempo pode ser aproximado por $f(t_1) \cdot \Delta t$. Assim, o deslocamento total durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de, aproximadamente, $f(t_0) \cdot \Delta t + f(t_1) \cdot \Delta t + \dots + f(t_{n-1}) \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \Delta t$.

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas, em vez das extremidades esquerdas, a estimativa para o deslocamento total ficará expressa por: $f(t_1) \cdot \Delta t + f(t_2) \cdot \Delta t + \dots + f(t_n) \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$.

Quanto mais diminuirmos o intervalo de tempo, mais precisa ficará a estimativa, então é plausível que o deslocamento do móvel é o limite de tais expressões:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t.$$

Assim, a soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica da função v e o eixo das abscissas, em um determinado intervalo, pode ser interpretada como o valor aproximado da mudança de posição ou deslocamento do

móvel, uma vez que as alturas dos retângulos utilizados estão relacionadas às velocidades instantâneas, e às larguras desses estão associadas ao tempo.

Destacamos, na seção seguinte, o detalhamento das práticas previstas e implementadas na Atividade 3 da segunda Unidade de Estudo.

a) Práticas operativas e discursivas da Atividade 3 – Unidade 2, analisadas *a priori* e *a posteriori*

Como já mencionado no Capítulo 4, referente à estrutura metodológica utilizada nesta investigação, a Atividade 3 foi aplicada aos estudantes da Licenciatura em Matemática, colaboradores da pesquisa, de forma remota devido à pandemia da COVID-19, no dia 1 de junho de 2020. Como mencionado anteriormente, seis dos dez estudantes que iniciaram a realização da proposta didática manifestaram a disponibilidade em realizar a Atividade 3 de forma remota. Os outros justificaram a impossibilidade de participação por não terem os recursos digitais necessários (computador e conexão à internet). Assim, as duplas foram reorganizadas da seguinte forma: Gisele e Bruno, Ítalo e Luiz; permanecendo juntos como nas atividades anteriores; e Franciele e Túlio formando uma nova dupla, uma vez que seus pares não puderam participar da realização desta Atividade 3.

O encontro virtual foi agendado por meio do aplicativo *WhatsApp*. No dia e horário agendado, em uma sala virtual, com o suporte tecnológico do aplicativo *Google Meet*, foi aberto o encontro com a presença dos estudantes. As orientações da atividade foram comunicadas de forma coletiva. O guia de atividades foi enviado, no momento da realização da reunião virtual, aos *e-mails* dos estudantes. Foram criadas, em um segundo momento, salas virtuais para cada dupla, conforme já descrito nos procedimentos metodológicos utilizados. Participamos, simultaneamente, das três salas virtuais geradas. As reuniões foram gravadas no *Google Drive*. As respostas, inseridas digitalmente no Guia de Atividades, foram encaminhadas pelos estudantes para o nosso *e-mail* ao final da reunião.

Tendo consciência da importância da intervenção oportuna do professor durante a implementação da proposta, consideramos necessário incorporar no início de cada encontro presencial ou remoto um espaço para um *feedback* em relação à atividade anterior, a fim de promover a discussão e a institucionalização dos resultados observados nas respostas dadas pelos estudantes. Desse modo, destacamos o papel do professor como gerente de uma situação de ensino e de aprendizagem, cujo objetivo é fazer com que o significado institucional seja, efetivamente, construído pelo estudante, como consequência de sua interação didática.

Iniciamos a reunião virtual realizando um *feedback* com os estudantes acerca dos conceitos/definições, proposições/propriedades que esses mobilizaram nas atividades anteriores, solicitando a descrição dos procedimentos que utilizaram e suas percepções acerca da realização das atividades. Os estudantes expuseram informações acerca da interpretação geométrica da Integral Definida e valorizaram as práticas realizadas com o recurso de visualização proporcionado pelo GeoGebra.

Nessa conversa preliminar, perguntamos se já haviam realizado alguma atividade que relacionasse o Cálculo Integral com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a Física. Uma das duplas comentou ter estudado aplicações de Derivadas na Física, mas não se recordava de aplicações usando a Integral. Outra dupla se recordou de ter trabalhado uma aplicação que fazia uma relação entre Integral e movimento, mas não se lembrava de como isso ocorreu. A terceira dupla não se manifestou. Nesse processo, retomamos o que dispõe Cargnin (2013) ao afirmar a necessidade de se associarem conceitos do Cálculo Diferencial e Integral aos seus possíveis usos fora do contexto da Matemática.

Destacamos no Quadro 27 a decomposição da Atividade 3 em configurações didáticas, que resumem as tarefas solicitadas no seu desenho, como apresentado no Capítulo 6.

Quadro 27 – Configurações Didáticas – Atividade 3 da Unidade 2

<p>Configuração didática 1 da Atividade 3 (CD 3.1): Manipulações no <i>software GeoGebra</i> para esboço da representação gráfica da velocidade, em função do tempo e início das primeiras reflexões que relacionam uma soma de Riemann com aspectos do movimento – Tarefas 1 a 5 da Atividade 3.</p>
<p>P1.1: Representação e análise gráfica, no GeoGebra, de v em função de t e identificação do movimento realizado pelo móvel.</p> <p>P1.2: Partição do intervalo de tempo e construção de retângulos, sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica de v, no tempo $[0,12]$.</p> <p>P1.3: Estabelecimento de relação aproximada entre a medida da área de um retângulo e a distância percorrida, pelo móvel, em um subintervalo de tempo.</p> <p>P1.4: Associar os valores encontrados ao deslocamento do móvel (no sentido a favor ou no sentido contrário a trajetória).</p> <p>P1.5: Estabelecimento da relação da medida da área da região com a distância percorrida e o deslocamento do móvel, considerando um número maior de partições do intervalo de tempo.</p>
<p>Configuração didática 2 da Atividade 3 (CD 3.2): Espaço em função do tempo e da velocidade – Tarefas 6 a 22 da Atividade 3.</p>
<p>P2.1: Institucionalização da velocidade como taxa de variação da posição do móvel, em função do tempo e significação, com contexto na Física, da expressão matemática $\int_0^{12} v(t)dt$.</p> <p>P2.2: Cálculo da distância percorrida pelo móvel, utilizando uma Integral Definida.</p> <p>P2.3: Generalização do cálculo do deslocamento e da distância percorrida, conhecendo-se v, em função de t, de um móvel, em movimento retilíneo.</p> <p>P2.4: Sintetização dos conceitos trabalhados.</p>

Cada prática realizada para resolver uma situação-problema, que pode ser intra ou extramatemática, desempenha um papel no processo de resolução. O Quadro 28 resume o uso ou significado operacional/pragmatista das práticas propostas na Atividade 3, destacando aspectos relativos aos objetos primários.

Quadro 28 – Configuração Didática 3.1 – Atividade 3 da Unidade 2

CD 3.1: Manipulações no software GeoGebra para esboço da representação gráfica da velocidade, em função do tempo e início das primeiras reflexões que relacionam uma soma de Riemann com aspectos do movimento – Tarefas 1 a 11 da Atividade 3.			
Prática	Uso/Intencionalidade	Objetos	Processos
P1.1: Representação e análise gráfica, no GeoGebra, de v em função de t e identificação do movimento realizado pelo móvel.	Identificar a mudança do sinal da velocidade do móvel no intervalo de tempo dado.	Linguagem: natural, gráfica, algébrica, computacional. Conceitos: Movimento uniforme, grandezas distância, deslocamento, tempo, velocidade, função.	Percepção e Visualização: Identificar que a situação-problema se trata de um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV).
P1.2: Partição do intervalo de tempo e construção de retângulos, sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica de v , no tempo $[0,12]$.	Considerar subintervalos de tempo de 1 segundo e calcular, para um caso particular, a distância aproximada percorrida, considerando um movimento uniforme, por partes.	Procedimentos: Traçar retângulos, cujas alturas são as velocidades iniciais (ou finais) para cada subintervalo de tempo, considerado nas partições.	Particularização: Para o cálculo da distância aproximada no primeiro segundo, o movimento é suposto ser uniforme, a velocidade é constante.
P1.3: Estabelecimento de relação entre a medida da área de um retângulo e a distância percorrida, aproximada, pelo móvel, em um subintervalo de tempo.	Considerar subintervalos de tempo cada vez menores e relacionar a medida da área de um retângulo – com medida de base infinitesimal – com a distância percorrida, naquele subintervalo, considerando uma velocidade específica.	Argumento: A medida da área do primeiro retângulo é uma estimativa para a distância percorrida ao final do primeiro segundo. No movimento uniforme $d = v \cdot t$.	Argumentação: Em movimento uniforme, a região compreendida entre a representação gráfica da função v , sendo $v(t) > 0$, e o eixo Ox , em um intervalo específico, é obtido por meio de $v \cdot t$.
P1.4: Associar os valores encontrados ao deslocamento do móvel – nos sentidos a favor ou contrário à trajetória.	Considerar subintervalos de tempo cada vez menores e relacionar a medida da área de um retângulo – com medida de base infinitesimal – com a distância percorrida, naquele subintervalo, considerando uma velocidade específica.	Argumento: A medida da área do primeiro retângulo é uma estimativa para a distância percorrida ao final do primeiro segundo. No movimento uniforme $d = v \cdot t$.	Argumentação: Em movimento uniforme, a região compreendida entre a representação gráfica da função v , sendo $v(t) > 0$, e o eixo Ox , em um intervalo específico, é obtido por meio de $v \cdot t$.
P1.5: Estabelecimento da relação da medida da área da região com a distância percorrida e o deslocamento do móvel, considerando um número maior de partições do intervalo de tempo.	Obter valores aproximados de distância percorrida (subestimada ou sobrestimada). Diferenciar distância e deslocamento do móvel, relacionando com o sinal da velocidade.	Quanto menores forem os intervalos, mais exata será a aproximação à distância percorrida, que é obtida observando as infinitas aproximações cada vez melhores.	Argumentação: Em movimento uniforme $d = v \cdot t$; a distância percorrida é uma grandeza aditiva.

Fonte: A autora, 2021

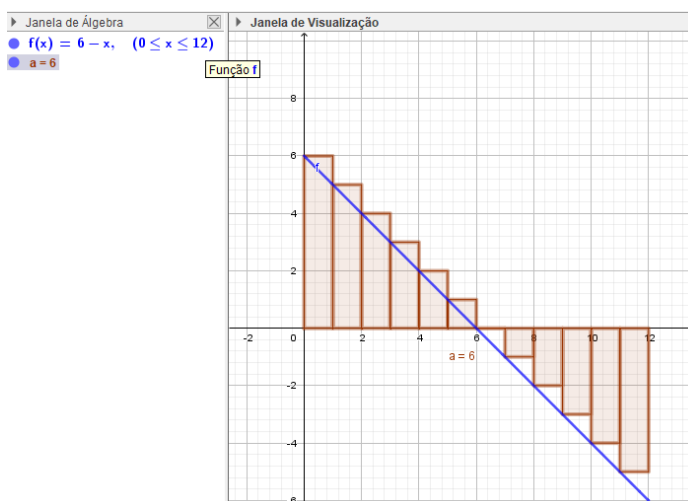
Em relação à análise *a priori* inerente às práticas da primeira configuração didática da Atividade 3, Unidade 2 (CD 3.1), destacamos que essas práticas motivam reflexões acerca da velocidade em função do tempo e articulação dessa com o cálculo do deslocamento e da distância percorrida por um móvel. É solicitada a representação gráfica da função v pelo GeoGebra. Na sequência, os estudantes são provocados a verificar o sinal da velocidade do móvel no intervalo de tempo dado. Esperávamos que eles fizessem a análise da representação gráfica e identificassem a variação da velocidade v , sendo $v > 0$ no tempo $[0,6[$ e $v < 0$ no tempo $]6,12]$. A expectativa era de que lembrassem que, na sequência das práticas, o sinal da velocidade implica o deslocamento do móvel – no sentido a favor ou no sentido contrário à trajetória –, e que os estudantes intuíssem que haveria uma diferença para os valores de distância percorrida e deslocamento do móvel no intervalo de tempo citado.

Ao dividir o intervalo de tempo $[0,12]$ em subintervalos de 1 unidade, na prática P1.2, esperávamos, em um primeiro momento, que os estudantes empregassem os comandos do GeoGebra utilizados na Unidade 1 – *SomadeRiemannÀEsquerda*, *SomadeRiemannInferior*, *SomadeRiemannSuperior* ou *SomaRetângulos* – considerando a função v , no intervalo $[0,12]$ e a utilização de 12 retângulos. Os estudantes teriam a possibilidade de perceber que a medida da área de cada retângulo, em um subintervalo específico, conseguida pelo produto *base* · *altura*, guarda relação com a distância percorrida por um móvel, considerando a velocidade constante em um determinado intervalo de tempo (*tempo* · *velocidade*).

Segundo Hughes-Hallett *et al.* (2009), quando não sabemos a velocidade do móvel, a cada instante, não podemos calcular exatamente a distância percorrida, mas podemos fazer uma estimativa. É a partir dessa premissa que esperávamos que as duplas, usando o cálculo da medida da área dos retângulos sobrepostos à região em estudo, conseguissem determinar a distância total percorrida pelo móvel no intervalo $[0,12]$. As práticas, portanto, pretendiam levar os estudantes a mobilizar seus processos intuitivos e reflexivos, compreendendo a natureza da medida da área desse retângulo que pode ser descrita como $A_i = v(t) \cdot \Delta t$.

Almejavamos que os estudantes percebessem que os procedimentos do cálculo aritmético da distância percorrida aproximada poderiam ser realizados, de forma local, considerando cada subintervalo de tempo, assumindo que a velocidade seria constante naquele subintervalo. A representação gráfica, ilustrada na Figura 39, deveria ser plotada nas primeiras práticas da CD 3.1.

Figura 39 – Representação gráfica da função $v(t) = 6 - t$, no intervalo $[0,12]$ e operacionalização do comando *SomadeRiemannÀEsquerda* do GeoGebra



Fonte: A autora, 2021

Baseados nas construções relativas às práticas P1.3, P1.4 e P1.5, os estudantes poderiam identificar, na primeira unidade de tempo permitida pela divisão do intervalo em subintervalos, o deslocamento ou distância percorrida pelo móvel, mobilizando os processos cognitivos de visualização e percepção, além da compreensão dos objetos matemáticos abordados, buscando a conversão de representações entre os registros (linguagem visual para verbal e, posteriormente, analítica). Todavia, há de se considerar que esse é um cálculo aproximado, por sobra ou falta, tanto em relação à medida das áreas dos retângulos sobrepostos à região considerada quanto em relação ao valor da velocidade que, para a particularização da distância ou deslocamento no primeiro segundo, é considerada constante. Era esperado que eles identificassem o deslocamento do móvel, no sentido a favor ou na direção contrária à trajetória, sendo, para tanto, possível identificar analítica ou visualmente os intervalos de tempo em que a velocidade é positiva ou negativa.

À medida que processassem essa informação, os estudantes poderiam fazer as devidas alterações no comando utilizado no GeoGebra para gerar os retângulos sobrepostos à região de interesse, de modo a construí-los para os subintervalos de $[0,6]$ e $[6,12]$, em que $v(t) \geq 0$ e $v(t) \leq 0$, respectivamente, obtendo, dessa forma, a medida aproximada da distância percorrida no sentido a favor da trajetória e contrário à trajetória. Era esperado, também, que os estudantes refletissem acerca dos resultados retornados que seriam apresentados com valores positivos ou negativos.

Na prática P1.5, ao aumentar a quantidade de partições utilizadas, os estudantes teriam o potencial de mobilizar o processo de generalização. Era esperado que fossem capazes não

somente de realizar as adaptações nas construções do GeoGebra mas também de intuir que, ao aumentar a quantidade de retângulos, as aproximações para as medidas de áreas, nos dois subintervalos $[0,6]$ e $[6,12]$, iriam convergir para um mesmo valor em módulo, havendo o mesmo erro para ambos.

A compreensão dos conceitos relativos à Integral de Riemann é a base do desenvolvimento cognitivo dos estudantes na proposta didática desta pesquisa. Sendo assim, referenciamos em Tall (1995) o qual considera que as ações sobre as percepções de objetos permitirão o desenvolvimento das estruturas cognitivas à medida que essas ações e percepções são pensadas, analisadas, conceituadas e suas propriedades são testadas. Por isso, enfatizamos, novamente, a construção das Somas de Riemann nessa atividade, fazendo essa aplicação com a Física, seguindo a orientação de Tall (1995, p. 3, tradução nossa): “Para minimizar a tensão cognitiva, é essencial fazer duas coisas: comprimir o conhecimento adequadamente para o pequeno foco de atenção, construir vínculos com outros dados mentais para facilitar o uso”.

A diferença entre deslocamento e distância percorrida é considerada um fator essencial de observação na realização dessas práticas. A idealização da diferença entre esses conceitos passa pelo entendimento do significado da Integral Definida da função v (velocidade), tendo como variável independente o tempo t , considerando velocidades com valores positivos e negativos em seu domínio; e, no caso do intervalo em que a velocidade tem valor negativo, que o ajuste pode ser realizado de forma analítica para a obtenção da medida da área dos retângulos aproximantes, conforme foi observado na Atividade 2 da Unidade 1. É provável que, para obtenção desses valores, os estudantes realizem procedimentos operacionais distintos no GeoGebra, de forma a gerar construções diferentes, podendo ser realizadas duas Somas de Riemann, considerando, primeiramente, o subintervalo para o qual $v > 0$ e, posteriormente, o subintervalo para o qual $v < 0$. Todavia, também é possível que parte dos estudantes utilize uma única construção no GeoGebra, considerando o intervalo $[0,12]$, resultando em uma Soma de Riemann, cujo resultado seja próximo de zero. Nesse caso, esperávamos que os estudantes, com base em suas inferências, elaborassem o argumento de que o valor encontrado – aproximadamente, zero – se justifica pelo fato de o móvel ter se deslocado, primeiramente, no sentido a favor da trajetória e, logo em seguida, contrário à trajetória e não necessariamente que esse móvel não tenha se movido. Assim, aguardávamos esse discernimento na interpretação dos conceitos e definições da Física em estudo.

Considerando a análise *a posteriori* inerente às práticas da configuração didática 3.1, percebemos que foi proporcionado aos estudantes uma interpretação de um modelo relacionado à Física, de caráter experimental, que trouxe uma materialidade para a Integral Definida de uma

função $f: [a, b] \rightarrow R$, sendo f representada por uma função v que relaciona velocidade e tempo t , conforme a lei de formação: $v(t) = 6 - t$, no intervalo de 0 a 12 segundos. Nas práticas presentes nessa atividade, o conceito de Integral Definida foi mobilizado para estabelecer uma lei que governa o comportamento do fenômeno em investigação.

Nas práticas iniciais, realizadas com o suporte do *software* GeoGebra, os estudantes esboçaram de forma correta a função da velocidade no intervalo específico, assim como identificaram de maneira satisfatória os intervalos em que a velocidade do móvel tinha valores positivos ou negativos. As três duplas relacionaram os comandos relativos à Soma de Riemann do GeoGebra, com a ação de dividir o intervalo de tempo em subintervalos e plotaram a representação gráfica, conforme foi ilustrado, anteriormente, na Figura 39.

No entanto, percebemos, nas análises referentes aos primeiros diálogos, conflitos cognitivos relacionados às grandezas presentes na representação gráfica da função, como destacado no diálogo entre Ítalo e Luiz:

ÍTALO: *O deslocamento é o x ou o y?*

LUIZ: *Deslocamento? Como assim? O deslocamento é a área do triângulo abaixo.*

ÍTALO: *Tenho dificuldades com Física. Acho que o eixo x é o tempo.*

No diálogo, ficou evidenciado que Ítalo não havia compreendido quais as grandezas estavam em ação no estudo da situação-problema. Embora tenha solicitado a representação gráfica da velocidade em função do tempo no GeoGebra, ele buscou, incorretamente, uma relação do deslocamento com a variável dependente ou com a variável independente, representadas no sistema cartesiano. Corretamente, Luiz o advertiu, informando que o deslocamento do móvel seria dado pela medida da área da região gerada e fez esclarecimentos acerca da diferença entre as grandezas distância e deslocamento, conforme o seguinte diálogo:

LUIZ: *Você sabe qual é a diferença de deslocamento e distância?*

ÍTALO: *Não.*

LUIZ: *A distância, é, por exemplo, você sai da porta da sua casa e dá a volta no quarteirão e para na porta da sua casa, seu deslocamento foi zero, porque você saiu e voltou para o mesmo lugar. Só que a distância é a quantidade que você andou. Só que às vezes o deslocamento e a distância vão ser iguais. Se você vai da porta da sua casa na esquina, o deslocamento e a distância nesse caso, foram iguais. Não sei se nesse caso aí tem diferença ou não.*

ÍTALO: *Tem diferença. O problema é que tem valores negativos aqui, isso me atrapalha.*

Interessante perceber, pela análise do diálogo, que Luiz elucidou algumas dúvidas de seu colega. Ressaltamos, por conseguinte, o quanto é importante no desenvolvimento das

atividades a interação entre os estudantes, como possibilidade de aprimorar a compreensão dos conceitos envolvidos nas situações-problema. Percebemos uma contextualização nos argumentos, utilizada pelo estudante Luiz para explicar o significado de deslocamento para o seu colega, promovendo uma interação didática entre eles. No entanto, em seguida, percebemos um conflito de significados:

LUIZ: *Não sei se nesse caso o deslocamento vai ser zero.*

ÍTALO: **Zero não vai ser.** *No caso, o deslocamento é do 0 a 6, até o -6 e 12?*

LUIZ: **Eu acho que o deslocamento vai ser 0.**

ÍTALO: *Por que 0?*

LUIZ: *Por que ele inicia no 0, o $t(0)$ não é o 6?*

ÍTALO: *Sim.*

LUIZ: **Então, ele está indo a favor da trajetória.** *Quando ele passa do 6, que vai do 6 ao 12, está indo contra a trajetória. (...) É como se do 0 a 6, você vai a algum lugar e de 6 a 12 você está voltando desse lugar. Você sai e chega ao mesmo lugar. Ou seja, o deslocamento é 0.*

Percebemos que Luiz fez um delineamento de ideias com uma sequência lógica apresentada a seu colega. A impressão é de que Ítalo considerou como deslocamento o movimento do móvel de 0 a 6 segundos e, quando diz “até o -6 e 12”, provavelmente, considerava que o movimento do móvel finaliza, graficamente, no ponto $(12, -6)$. Aqui percebemos incoerências na interpretação gráfica, geométrica e na comunicação analítica desses dados – o fato é que Ítalo mostrou dificuldades na interpretação gráfica. Pela explicação, entendemos que o Luiz dividiu o intervalo $[0,12]$, em dois subintervalos e considerou a velocidade com valores positivos (movimento no sentido a favor da trajetória) e negativos (movimento na direção contrária à trajetória), concluindo que o deslocamento no intervalo $[0,6]$ e $[6,12]$ é nulo.

Ressaltamos, ainda, que as interpretações realizadas pelos estudantes convergem para as significações propostas pelas configurações geométrica e tecnológica da Integral, segundo Crisostomo (2012), no que tange à representação e visualização que promovem uma aproximação do conceito de Integral, possibilitando a realização de conjecturas pelos usuários dos *softwares*.

Na prática que tem como objetivo encontrar, com a utilização do GeoGebra, a soma das medidas das áreas dos retângulos, cuja base de medida é uma unidade que cubra toda a região compreendida entre a representação gráfica da função v e o eixo das abscissas, no intervalo $[0,12]$, apenas a dupla Franciele e Túlio responderam corretamente que o resultado seria aproximadamente $36u^2$. A dupla Ítalo e Luiz responderam incorretamente $-6u^2$; e a dupla Gisele e Bruno responderam $6u^2$. Verificando o arquivo GeoGebra das duas últimas duplas,

percebemos que elas usaram, respectivamente, os comandos *SomaDeRiemannInferior* e *SomaDeRiemannSuperior* no intervalo $[0,12]$, ou seja, não subdividiram o intervalo de forma a considerar, distintamente, $v(t) > 0$ e $v(t) < 0$, incorrendo no erro de não verificarem que esse comando do GeoGebra adiciona os valores positivos e negativos referentes ao resultado numérico da Integral Definida naquele intervalo, e não corresponde à soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos à região em estudo.

Percebemos, nessa última análise, que essas duas duplas não se apropriaram do conceito relativo ao resultado numérico da Integral Definida, relacionado à interpretação gráfica da função, apresentando um conflito cognitivo. Do contrário, teriam se atentado a fazer uma subdivisão no intervalo, considerando as imagens da função velocidade. De forma direta, a dupla Ítalo e Luiz apresentou o resultado mais incoerente – medida de área com um valor negativo –, o que mostra a ausência de compreensão de um dos significados parciais da Integral Definida.

Fazemos aqui uma relação com o que considera Crisostomo (2012), em sua pesquisa, a respeito dos significados da Integral para aproximação e somatória e na compreensão de que, enquanto a medida de área é sempre um número real não-negativo, o valor da integral pode ser qualquer número real. No diálogo entre Bruno e Gisele, percebemos a construção desse significado, com destaque para a fala de Bruno: “*Você lembra o que estudamos? A integral não é necessariamente área*”, ao responder à pergunta de sua colega: “*A área seria a integral, ou não?*”

As práticas P1.3 e P1.4 foram devidamente realizadas por duas duplas que relacionaram a medida da área do primeiro retângulo com o deslocamento ou com a distância aproximada percorrida pelo móvel (uma vez que $v > 0$), no intervalo $[0,1]$. Apenas a dupla Túlio e Franciele informaram que a medida de área corresponderia à posição inicial do móvel, não fazendo relação, portanto, com o movimento realizado nesse intervalo de tempo. Essa dupla também não inferiu corretamente o movimento do móvel nos sentidos a favor ou contrário à trajetória, retornando valores que não condizem com os valores referentes à distância ou deslocamento e não estabeleceram a relação entre a medida da área da região em estudo, no intervalo de $[0,12]$, com a distância e o deslocamento do móvel, considerando um número maior de partições do intervalo de tempo (prática P2.5), o que foi alcançado pelas outras duas duplas.

Na implementação da primeira configuração didática da Atividade 3 (CD 3.1) há evidências de que os estudantes perceberam que as práticas realizadas são carregadas de conceitos “adjacentes” à Integral de Riemann. A visualização pelo GeoGebra proporcionou a inferência de conceitos, sobretudo relacionados às grandezas em estudo.

Na configuração didática 3.2, buscamos a institucionalização do espaço em função do tempo e em função da velocidade, de forma generalizada e formal, consolidando as ideias desenvolvidas nas práticas da configuração didática 3.1, trazendo a discussão da integração como operação inversa da diferenciação. Trazemos nas práticas dessa configuração, identificadas no Quadro 29, o trabalho com significados das construções geométricas realizadas e suas interpretações.

Quadro 29 – Configuração Didática 3.2 – Atividade 3 da Unidade 2

CD 3.2: Espaço em função do tempo e da velocidade – Tarefas 12 a 22.			
Prática	Uso/Intencionalidade	Objetos	Processos
P2.1: Institucionalização da velocidade, como taxa de variação da posição do móvel, em função do tempo e significação, com contexto na Física, da expressão matemática $\int_0^{12} v(t)dt$.	Relacionar a integral definida da função v , no intervalo de $[0,12]$ com o deslocamento do móvel.	Linguagem: natural, numérica, simbólica e gráfica. Conceitos: movimento uniformemente variado; grandezas distância, velocidade e tempo; função Definição $\Delta s = \int_a^b v(t)dt$, sendo Δs o deslocamento.	Generalização: Da velocidade constante, por partes, passa à velocidade linear (contínua). Algoritmização: Cálculo da distância e do deslocamento do móvel.
P2.2: Cálculo da distância percorrida pelo móvel, utilizando uma Integral Definida.	Obter uma aproximação para a distância percorrida, realizando duas subdivisões para o intervalo $[0,12]$, sendo $[0,6]$ e $[6,12]$. Identificar que, se conhecermos a velocidade do móvel em intervalos de tempo cada vez menores, então a integral de v , em função de t , para o qual $v(t) > 0$ nos dá a distância percorrida ou deslocamento do móvel durante esse intervalo. Já se $v(t) < 0$, então utilizamos $\int_{x_i}^{x_j} v(t) dt$, e, por fim, somamos os resultados.	Conceito: Velocidade inicial, velocidade final, mudança de velocidade descontínua; intervalo de tempo; medida do intervalo; valor limite de aproximações. No intervalo $[x_i; x_j]$ com $i = 0, 1, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, n$ e $i < j$ em que a função $v(t) > 0$ utilizamos $\int_{x_i}^{x_j} v(t)dt$, já se $v(t) < 0$, então utilizamos $\int_{x_i}^{x_j} v(t) dt$, e por fim, somamos os resultados.	Particularização: Obtenção da distância percorrida para duas subdivisões dos intervalos. Enunciação: A distância percorrida como limite de aproximações. Algoritmização: Cálculo da distância percorrida e do deslocamento do móvel. Generalização: O caso contínuo é inferido a partir do caso discreto, quando se considera o intervalo de tempo dividido em 12 partições.
P2.3: Generalização do cálculo do deslocamento e da distância percorrida, conhecendo-se v , em função de t de um móvel, em movimento retilíneo.	Institucionalizar o uso da Integral Definida para o cálculo de distância percorrida ou deslocamento, dada a função velocidade, dependendo do tempo.	Definição: * Se $v(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$, então o espaço percorrido pelo móvel e seu deslocamento coincidem entre os instantes a e b , e são iguais à $\int_a^b v(t)dt$. * Se $v(t) < 0$, em algum	Problematização: Encontrar a distância percorrida em função do tempo. Algoritmização: Regular os passos para calcular o valor da integral.

		subintervalo de $[a, b]$, então a distância percorrida será: $\int_a^b v(t) dt$ $= \int_a^c v(t) dt - \int_c^b v(t) dt$ Conceitos: velocidade instantânea.	Representação: Expressão simbólica das somas sequenciais das quantidades cobertas de espaço.
P2.4: Sintetização dos conceitos trabalhados.	Descrever todo o processo de uma forma discursiva. Descrever, simbolicamente, as fórmulas de soma para encontrar a distância percorrida e o deslocamento em qualquer intervalo de tempo finito.	Conceitos: valor da integral; limite, fórmula. Procedimento: produto de velocidades instantâneas para pequenos intervalos de tempo; soma de produtos; cálculo do limite.	Síntese: os conceitos e definições inerentes à atividade em estudo são descritos de forma simplificada.

Fonte: A autora, 2021

Sobre a análise *a priori* inerente às práticas da configuração didática 3.2, ressaltamos que essa traz uma relação entre os significados das construções geométricas com as grandezas físicas velocidade, distância e deslocamento, com a convicção de que o estudante possa formalizar os conceitos trabalhados na configuração didática anterior (CD 3.1). O estudante é estimulado a observar as aproximações infinitas, permitidas pela observação das medidas de áreas dos retângulos aproximantes, sendo que a melhoria dessas supõe divisões cada vez menores dos intervalos, progressivamente, até que as estimativas, tomadas por falta ou por excesso, sejam indistinguíveis. Assim, emerge dessas práticas a ideia da utilização da Integral Definida. Os estudantes Ítalo e Luiz manifestaram a compreensão de que, para o cálculo da distância percorrida, em intervalo de tempo com velocidade variável, é possível que se tome “uma variação do tempo, tão curta quanto se queira”.

Na prática P2.1, buscávamos fazer com que os estudantes relembassem conceitos de derivação, por meio da definição da velocidade como taxa de variação, e estabelecessem uma relação com a integração para o estudo do movimento do móvel, ao refletirem acerca da pergunta *O que significa a expressão matemática $\int_0^{12} v(t) dt$?*, objetivando instigar o estudante a analisar a linguagem simbólica, interpretá-la e redigi-la, usando linguagem natural, de forma a apresentar significado pessoal sobre esse objeto matemático. Nossa conjectura era de que, ao refletirem acerca do sinal da velocidade e sua relação com a trajetória do móvel, os estudantes tivessem a compreensão de que essa expressão daria o deslocamento do móvel. É importante,

para a construção do conhecimento de estudante, observar que o deslocamento depende do sentido do movimento, sendo encontrado pela diferença entre a posição final e a posição inicial do móvel no intervalo de tempo específico. Já a distância percorrida pelo móvel é o comprimento do caminho descrito por ele, desde sua posição inicial até a sua posição final. Essa prática pretendia possibilitar aos estudantes a mobilização do conhecimento acerca dessas grandezas, dando possibilidade para que pudessem distinguir a forma de se calcularem a variação da posição (deslocamento) e distância de um móvel, utilizando a notação adequada. No entanto, esperávamos que fossem evidenciados pelos estudantes alguns conflitos cognitivos, que tendem a confundir essas duas grandezas por fazerem referência à posição do objeto.

As práticas P2.2 e P2.3 tiveram por finalidade a potencialização da compreensão do estudante acerca da relação existente entre as funções velocidade e posição por meio da relação entre a integração como operação inversa da diferenciação. A decomposição do processo de integração em processos matemáticos mais elementares, desde calcular as imagens da primitiva da função velocidade, para os limites dos intervalos analisados, é solicitada nessas práticas. Esperávamos que, ao adicionar esses valores parciais, os estudantes encontrassem os mesmos valores da prática no GeoGebra, evidenciando que esse método é uma forma decomposta do cálculo da Integral Definida da velocidade, em função do tempo.

Por fim, a prática P2.4 buscou a sintetização dos conceitos trabalhados, de modo que os estudantes pudessem formalizá-los com abrangência da linguagem visual para a simbólica, tendo como intermédio a linguagem verbal. Foi esperado que, ao finalizar a Atividade 3, a significação para os resultados da Integral Definida de uma função, em intervalos em que ora têm imagens positivas, ora têm imagens negativas, seja percebida e que o estudante mobilizasse a compreensão dos processos de derivação e integração, assim como a relação entre as equações do deslocamento e velocidade de um móvel, no decorrer do tempo. Assim, os processos de particularização, enunciação e algoritmização são mobilizados à medida que são possibilitadas reflexões acerca da equivalência do valor obtido por meio da construção no *software* GeoGebra, com o cálculo da Integral Definida, envolvendo a função velocidade no intervalo de tempo em estudo. Foi solicitado que os estudantes fizessem os cálculos algebricamente. Nesse ponto, era possível que comparassem os resultados encontrados de forma computacional e algébrica.

Ressaltamos que a Atividade 3 tem caráter interdisciplinar e utiliza situações para, partindo de um caso específico, propiciar aos estudantes a mobilização de processos de construção e generalização, abstração e síntese. Esperávamos que, ao realizar essas reflexões, o estudante pudesse ativar esses processos mentais e aprimorar os significados pessoais acerca dos conceitos em tela.

Considerando a análise *a posteriori* inerente às práticas dessa configuração didática (CD 3.2), as duplas Ítalo e Luiz, Bruno e Gisele, ao responderem o significado da expressão $\int_0^{12} v(t)dt$ na situação-problema proposta, expressaram a relação dessa com o deslocamento do móvel no tempo $[0,12]$. Apenas Túlio e Franciele indicaram que a expressão se tratava da Integral Definida da função v , variando de 0 a 12, sem estabelecer nenhum significado para o contexto extramatemático proposto.

Ao se referir, de forma específica, ao cálculo da distância percorrida, as três duplas fizeram relação com a Integral da função v . No entanto, Túlio e Franciele não consideraram, de forma diferenciada, os intervalos em que a velocidade tem valores negativos, conforme verificamos nas respostas registradas no Guia de Atividades e que reproduzimos no Quadro 30.

Quadro 30 – Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 14 – Atividade 3 da Unidade 2

Duplas	Registro realizado
Ítalo e Luiz	$\int_0^6 v(t)dt - \int_6^{12} v(t)dt$
Túlio e Franciele	Calcular a primitiva e substituir os valores de t .
Bruno e Gisele	Basta dividir o intervalo em dois (ou seja $\int_0^6 v(t)dt$) e multiplicar a integral por dois

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Percebemos que Ítalo e Luiz, Bruno e Gisele consideraram a subdivisão do intervalo $[0,12]$ em dois subintervalos. Sabemos que a resposta de Túlio e Franciele foi incoerente, uma vez que ao calcular a primitiva da função v e substituir os valores de t , considerando o intervalo $[0,12]$, encontraremos um valor nulo, pois se trata do deslocamento e não da distância percorrida pelo móvel, ou seja, $\int_0^{12} v(t)dt = 0$. Percebemos que, para essa dupla, ainda se encontrava obscura a relação da velocidade com a distância ou o deslocamento do móvel.

Quanto ao processo de generalização proposto na prática P2.3, apenas a dupla Bruno e Gisele generalizou o cálculo do deslocamento e da distância de forma coerente e completa. As outras duas duplas apenas especificaram a expressão $\int_a^b v(t)dt$, sem identificar a qual grandeza essa expressão se referia. Na análise do diálogo entre Ítalo e Luiz percebemos que houve, entre eles, uma argumentação coerente que, no entanto, não culminou no discurso correto:

LUIZ: O cálculo do deslocamento é a integral de a à b de $v(t)dt$. Em que a e b é o intervalo total analisado. Da distância percorrida varia.

ÍTALO: Então o deslocamento seria Integral de $v(t)dt$. Só isso?

LUIZ: É. A integral de a até b , de $v(t)dt$. Só que a de distância tem diferença, porque vai de acordo a trajetória do módulo. **Tem uma forma generalizada de distância, mas não lembro.**

ÍTALO: Por exemplo, estamos colocando de a até b , coloca a mesma coisa, de a até c e de c para b , como se c fosse a divisão dos dois.

Observamos que os estudantes argumentaram haver uma diferença no processo de algoritmização, especialmente, na afirmação “*tem uma forma generalizada de distância, mas não lembro*”. Ítalo sugeriu que o intervalo de tempo fosse dividido em dois, mas não expôs, nem apontou como essa divisão deveria ser realizada. Percebemos que o discurso na língua natural se aproximou do que deveria ser realizado para que a resposta fosse coerente. No entanto, essa linguagem natural necessita ser substituída por uma linguagem própria da Matemática, que não foi estabelecida pela dupla, embora possa ter intuído corretamente o que se propôs.

Verificamos, nas análises dos protocolos no Guia de Atividades e na análise dos diálogos dos estudantes, que a intuição e a dedução estiveram presentes na realização das práticas da Atividade 3. Falas como a do estudante Bruno, “*Se você tem a posição que descreve o deslocamento, ao derivar essa função, encontramos a velocidade. Então se temos a função velocidade, a integral nos dá o deslocamento*”, nos faz pensar que ele estava mobilizando esses processos.

O processo de algoritmização foi realizado pelos estudantes ao registrarem a resposta da tarefa: *Escreva a integral indefinida, ou seja, a primitiva da função $v(t) = 6 - t$* . Embora as duplas tenham aplicado corretamente as técnicas de integração para a função polinomial proposta ao resolver $\int(6 - t)dt$, percebemos incoerências na notação das respostas registradas, conforme foi verificado no Guia de Atividades de cada dupla e reproduzido no Quadro 31.

Quadro 31- Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 16 – Atividade 3 da Unidade 2

Duplas	Registro realizado
Ítalo e Luiz	$\int 6t - \frac{t^2}{2}$
Túlio e Franciele	$\int_0^{12} 6t - \frac{t^2}{2} dt$
Bruno e Gisele	$V(t) = 6t - \frac{t^2}{2}$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Apenas a dupla Bruno e Gisele retiraram da expressão o sinal da integração de forma coerente, uma vez que a operação de integração foi realizada. Ao finalizar o cálculo da integral indefinida da função velocidade, duas duplas mantiveram a forma incorreta com o sinal de integração, mas uma das duplas ainda manteve o dt . Apenas uma dupla chegou mais próximo da escrita formal correta, esquecendo apenas da presença da constante C . Ao manipularem algébrica e algoritmicamente as fórmulas, os estudantes não associaram o cálculo de uma integral indefinida a uma operação, mas como uma mudança na fórmula que se desenvolve e

muda apenas a equação. Evidencia-se o quanto a não atribuição de significados a uma representação, para um determinado objeto matemático – no caso, a Integral Indefinida – pode prejudicar a compreensão do significado desse objeto.

Muitas vezes, os estudantes conseguem realizar o processo de algoritmização de maneira técnica, mas não compreendem o que de fato significa aquilo que estão fazendo; ficando evidenciadas as dificuldades deles com a linguagem simbólica, própria da Matemática, o que pode evidenciar uma incompletude de significados pessoais. Porém, a questão da sintaxe das expressões algébricas pode ser desenvolvida após o trabalho com a produção e a negociação de significados, ou concomitantemente. Na implementação dessa atividade, trabalhamos as sintaxes ao mesmo tempo com as definições conceituais, propriedades e procedimentos relacionados ao objeto de estudo, ao solicitar a escrita formal nas práticas propostas.

Os estudantes manifestaram dúvidas na generalização proposta pela prática P2.3 e solicitaram explicações à tarefa: *se tivermos uma função que descreve o deslocamento de um móvel, como poderíamos encontrar a equação que descreve a sua velocidade?* – retratado no diálogo entre Ítalo e Luiz:

ÍTALO: Professora, seria a derivada da função mesmo?

PESQUISADORA: Você tem dúvida que seja isso? Pense bem: Qual a função está expressa na situação-problema? E o que você quer encontrar?

LUIZ: Já sabemos que o deslocamento do móvel é a área; e a velocidade é a função, é a reta. A minha dúvida é se você fizer a derivada da área, você acha a reta.

Percebemos, no diálogo analisado, a tentativa dos estudantes de estabelecerem as relações necessárias; ao mesmo tempo, percebemos conflitos cognitivos relacionados aos objetos matemáticos em utilização. Quando o estudante diz “já sabemos que o deslocamento do móvel é a área”, provavelmente queria explicitar a relação já empreendida de que o cálculo do deslocamento poderia ser realizado pelo cálculo correspondente à soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos à região compreendida entre a representação gráfica da função v e o eixo Ox , no intervalo $[0,12]$. Também na fala “a velocidade é a função, é a reta” fica explícita a interpretação geométrica mobilizada pelo estudante. Quando diz “a minha dúvida é: se você fizer a derivada da área, você acha a reta?”, sugere que queria entender se, ao derivar a função posição, o resultado seria a função velocidade – representada, graficamente, pela reta. Nesse ponto, também percebemos uma dificuldade no processo de comunicação, pela imprecisão tanto na linguagem natural quanto na linguagem formal.

A atividade, em um contexto geral, incentiva que os estudantes expressem em

linguagem natural ou simbólica suas percepções sobre os objetos. Concordamos com Tall (1995, p. 6, tradução nossa) quando menciona que “o simbolismo verbal também pode, é claro, ser falado, mas a palavra escrita tem grande valor como registro permanente que pode ser explorado e refletido”. O fato de o estudante ter que registrar suas percepções o faz melhorar sua percepção acerca de suas ações, como observado na fala de Ítalo: “*Entendi o conceito, mas não sei como expressar. Vou expressar com palavras*”.

Assim como nas outras atividades, os objetos matemáticos mobilizados nesta atividade se manifestam pelo uso de uma linguagem própria, que se expressa de vários tipos: natural, simbólica, algébrica e computacional. Desse modo, a atividade é composta por tarefas que mobilizam o processo de aquisição da fluência matemática em que as linguagens próprias da Matemática se fazem presentes por meio das inferências, deduções, institucionalizações e generalizações realizadas no desenvolvimento das tarefas por um passo a passo que requer comunicação entre o estudante e a atividade.

Em conjunto com o processo de generalização, a sintetização compõe a abstração. Para Dreyfus (1991, p.35, tradução nossa), o processo de sintetização designa “combinar ou compor partes de tal maneira que elas formem um todo, uma entidade”. Nesse sentido, percebemos que os estudantes mobilizaram, cada dupla com um nível específico, o processo de sintetização evocado pela prática P2.4, uma vez que nos registros realizados, há composição dos significados pessoais alcançados, como registrados por esses no guia de atividades, conforme apresentado no Quadro 32.

Quadro 32 – Protocolos dos estudantes referentes à Tarefa 21 – Atividade 3 da Unidade 2

Duplas	Registro apresentado pela dupla
Ítalo e Luiz	<i>O deslocamento e a distância de um móvel podem ser calculados com a função velocidade, utilizando a Integral.</i>
Túlio e Franciele	<i>A Integral Definida nos dá a posição de uma função em determinados instantes. Podemos usar a soma de Riemann para termos uma aproximação dessa posição.</i>
Bruno e Gisele	<i>Determinação da função posição com Integrais. Percebemos a diferença de utilização da Integral para encontrar a posição e a distância (de um móvel). Conceito de área com soma de Riemann.</i>

Fonte: Dados da Pesquisa, 2021

Nessa análise, ficou evidenciado que a Atividade 3 proporcionou aos estudantes da Licenciatura em Matemática um aprimoramento da compreensão da aplicação da Integral Definida em contextos extramatemáticos, potencializando as reflexões acerca de que a Integral Definida não pode ser caracterizada apenas como medida de área, mas que existem outros significados para o valor numérico, encontrado como resultado. Dessa forma, possibilitou-se a

compreensão da natureza abstrata que caracteriza esse objeto do Cálculo Integral, sendo que o desafio de alcançar esse objetivo pôde se dar na mobilização de uma situação-problema que, em primeira mão, possui um viés de materialidade que redundou em atividade experimental.

A situação-problema 3, presente nessa atividade, intenta potencializar o entendimento do estudante de que a grandeza obtida em uma Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ será uma medida de “área” no conceito geométrico de área, quando na Integral Definida a função do integrando f estiver relacionada a um comprimento e a diferencial da variável de integração dx também se referenciar a um comprimento. Assim, o produto $f(x)dx$ tem unidades de comprimento ao quadrado, que se refere à unidade de medida de área. Na situação-problema em estudo, relacionada à Física, a função v é a velocidade e a diferencial dt é o intervalo infinitesimal de tempo. Nesse caso, o produto, $v(t)dt$ tem dimensão de velocidade *versus* tempo, que é deslocamento. Assim, a Integral Definida faz a soma, no contínuo, desses valores infinitesimais.

Na seção seguinte, discutimos a valoração da adequação da proposta didática, considerando a implementação das atividades.

7.5 Avaliação da Adequação da Proposta Didática sobre Integral Definida

Em relação à implementação da proposta didática apresentada nesta pesquisa e, conforme prescreve o EOS, o quarto nível de análise corresponde à avaliação da adequação didática.

Apresentamos uma abordagem da análise da proposta didática revelada nesta tese, considerando a implementação das três atividades que a compõem, partindo dos pressupostos teóricos da valoração da adequação didática do processo formativo. Utilizamos, para tanto, os aspectos contidos no marco teórico do Enfoque Ontossemiótico (GODINO *et al.* 2006, 2007, 2012; GIMÉNEZ; FONT; VANEGAS, 2013). Consideramos como elementos da análise didática, conforme descrito no Capítulo 7, a articulação das facetas do EOS com indicadores propostos por Godino *et al.* (2013): epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva, instrucional (mediacional-interacional).

A análise referente à faceta epistêmica-ecológica e ao aspecto cognitivo foi detalhada nas seções anteriores, que descreveram as práticas realizadas pelos estudantes em cada uma das atividades da proposta didática implementada. Nesta seção, apresentamos uma sintetização dessa análise e abordamos os aspectos afetivos, constitutivos da faceta cognitiva-afetiva e os aspectos da faceta instrucional. Conforme Godino (2011), realizamos a valoração das facetas

como: *baixa (0)*, *média (1)*, *alta (2)*, sendo essas designações puramente didáticas. Consideramos, para essa avaliação, as práticas realizadas pelas duplas Gisele e Bruno e Ítalo e Luiz, que realizaram as Atividades 1, 2 e 3.

7.5.1 Adequação epistêmica-ecológica

Esse critério busca avaliar o grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos) em relação aos significados institucionais de referência e, ainda, o grau de adequação do processo de estudo ao projeto educativo da escola e da sociedade, em que se considera o condicionamento do ambiente no qual se desenvolve (GODINO, 2011). Como consequência do desenho da proposta didática, a atenção foi direcionada à implementação de um sistema de práticas que promovesse a construção significativa da definição da Integral Definida, partindo de aspectos intuitivos até a formalização, considerando os aspectos curriculares da Licenciatura em Matemática, em que os participantes da pesquisa são matriculados.

Os elementos de referência para avaliar essa adequação correspondem ao significado institucional sobre Integral Definida e sobre seu ensino. No capítulo referente ao Estudo Preliminar, apontamos investigações como, por exemplo, a de Crisostomo (2012), que trazem significados parciais da Integral Definida, por meio de configurações epistêmicas, que foram consideradas no desenho da proposta didática. Os significados institucionais pretendidos, elencados no desenho das atividades, estiveram presentes nas práticas matemáticas realizadas pelos estudantes de forma progressiva.

A proposta didática implementada buscou explorar os conhecimentos comum, especializado e ampliado do futuro professor de Matemática.

A mobilização do *conhecimento comum do conteúdo*, foi destacada a partir da proposição de resolução de tarefas que buscaram contribuir para a formalização gradual de conceitos em definições e, mobilização de procedimentos para o estudo da Integral Definida, considerando o proposto na estrutura curricular da licenciatura em Matemática em que os estudantes estão matriculados.

O *conhecimento especializado do conteúdo* foi motivado pela articulação das configurações, relacionadas aos objetos e processos, colocadas em ação na realização das práticas, bem como pela utilização de contextos extramatemáticos, o que possibilitou a emergência de alguns significados parciais do objeto em estudo.

A partir da resolução da proposta didática e socialização com o grupo, os objetos matemáticos envolvidos foram retomados: a identificação de variáveis, conceitos e propriedades, realização de processos de particularização e generalização, dentre outros.

Os argumentos apresentados identificaram possíveis generalizações, caracterizando o *conhecimento ampliado do conteúdo*.

As situações-problema propostas permitiram a mobilização dos conhecimentos acerca dos tópicos matemáticos relacionados à Integral Definida, além de aspectos relacionados à manipulação algébrica e permitiram aos estudantes gerar ou negociar definições, propostas ou procedimentos e fazer argumentações.

Foi percebido, ao longo do desenvolvimento das atividades pelas duplas, que as tarefas poderiam ter sido apresentadas de forma menos diretiva e instrumental, com questões abertas que motivassem maior reflexão dos estudantes. Nesse sentido, seria possível aprimorar a abordagem dos significados parciais da Integral Definida, considerando o desenvolvimento das práticas. No entanto, ressaltamos que o desenho proposto possibilitou reflexões essenciais para o aprimoramento dos conceitos em estudo.

As definições, procedimentos, declarações, explicações, verificações e demonstrações, abordados para o processo de ensino da Integral Definida, foram claros e corretos e estiveram adaptados ao nível de ensino para que foram propostos. O conteúdo, sua implementação e avaliação corresponderam às diretrizes curriculares propostas no PPC da licenciatura em que os estudantes estão matriculados. Os objetos matemáticos estiveram interligados entre si, sendo que os vários significados desses, nas práticas matemáticas, foram identificados e articulados.

Conjecturamos que a proposta didática trouxe contribuições que vão além do ensino e da aprendizagem da Integral Definida, pois, implicitamente, os estudantes da Licenciatura em Matemática puderam verificar que o formato das atividades, presente neste estudo, pode ser adaptado e aplicado para estudantes em qualquer nível de ensino, fazendo a adaptação para o conteúdo matemático a ser trabalhado. No desenho utilizado, destacam-se o uso de situações-problema que envolveram contextos reais, a interdisciplinaridade e a realização de práticas experimentais com o suporte de tecnologias digitais.

Nessa perspectiva, consideramos que houve contribuição em um grau aceitável, o que justifica classificar a adequação epistêmica-ecológica como *Média*.

7.5.2 Adequação cognitiva-afetiva

O principal indicador da adequação cognitiva da proposta didática implementada se referiu ao resultado efetivo das expectativas de aprendizagem sobre o conteúdo didático-matemático referente à Integral Definida, ou seja, este critério procurou avaliar se o que se pretendeu mobilizar, em termos de conhecimento, foi considerado razoavelmente próximo ao que os estudantes manifestaram ter alcançado. A avaliação realizada, considerando esses indicadores, contou com diferentes níveis de compreensão e competência dos estudantes ao serem analisados os protocolos de resolução das tarefas, áudios, ações dos estudantes, de forma que as práticas pessoais (significados) foram evidenciadas.

A proposta didática trouxe um sistema de práticas orientado principalmente para o estabelecimento, pelos estudantes, de um conjunto de funções semióticas para o aprimoramento das definições acerca da Integral Definida, como o limite de uma Soma de Riemann, abordando aspectos algébricos, geométricos e analíticos.

As sessões de *feedback* e institucionalização realizadas com os estudantes tornaram possível aproveitar algumas respostas para gerar discussões produtivas sobre a Integral Definida. Os estudantes perpassaram por obstáculos, principalmente relacionados à escrita e interpretação da simbologia matemática, que estão relacionados à mudança de representações e à interpretação geométrica, que foi atenuada pelo uso do *software* GeoGebra.

As diversas representações – linguagem verbal, algébrica, geométrica, computacional – utilizadas na atividade incentivaram os estudantes a se expressarem matematicamente, bem como de fazerem interpretações matemáticas. Assim, o reconhecimento da importância da linguagem e da fluência matemática e suas representações foi evidenciado. Esses diversos modos de representação das práticas matemáticas apoiaram a mobilização dos processos matemáticos, da argumentação e comunicação sobre os conceitos, definições e propriedades manipulados. Uma das principais dificuldades de entendimento que esteve presente nas concepções dos estudantes foi a compreensão da Integral Definida como limite de somas infinitesimais. O trabalho com os limites e com os somatórios mostrou entraves cognitivos pelos estudantes.

Pela análise dos dados da pesquisa, foi possível verificar que os estudantes, embora com algumas dificuldades, apropriaram-se de conhecimentos e desenvolveram competências, ou seja, os significados pessoais manifestados por eles estão em suas zonas de desenvolvimento proximal.

O significado institucional pretendido/implementado: “a definição de área, como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes, chegando até a Soma de Riemann e a relação do valor numérico da Integral Definida, com a medida da área”, esteve presente nas práticas matemáticas implementadas, de forma progressiva. Os objetos matemáticos estiveram interligados entre si, por meio das práticas matemáticas propostas.

Os significados pessoais manifestados/mobilizados pelos estudantes sobre a Integral Definida foram retratados nas análises *a posteriori* das práticas realizadas. Tais significados se articularam, de forma satisfatória, com os significados institucionais pretendidos/implementados, que foram destacados nas análises *a priori*.

Ficou evidenciado que os estudantes realizaram manipulações com elementos linguísticos. Houve uma identificação argumentada da expressão analítica relacionada à Integral Definida, como uma Soma de Riemann, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$. Além disso, ao longo do desenvolvimento das atividades, por meio da participação discursiva nas sessões de *feedback* e institucionalização, pôde-se observar uma familiaridade aceitável dos estudantes com os objetos primários que emergiram das práticas. Consideramos que o sistema de prática promovido pela proposta didática alcançou os significados pessoais dos estudantes, colaboradores desta investigação.

Foi possível revelar alguns conflitos semióticos deles no que refere aos objetos matemáticos presentes na definição da Integral Definida, conforme exposto nas análises *a posteriori* de cada atividade. No entanto, foi possível evidenciar que chegaram a uma compreensão favorável à definição estudada, de forma que as dificuldades foram gerenciadas pelas interações entre eles com a atividade proposta e com o *software* utilizado.

Em relação aos aspectos afetivos, o objetivo foi o de avaliar o grau de interesse ou motivação dos colaboradores da pesquisa em relação ao processo de estudo. As atitudes e motivações positivas dos estudantes foram evidenciadas nos encontros ocorridos, presenciais ou remotos, bem como nos diálogos analisados, em que foi percebido que a utilização de situações-problema em contextos reais os fizera sentir motivados a realizar as atividades, bem como a utilização das tecnologias digitais. Falas como da dupla Ítalo e Luiz confirmam essas evidências – “*bem didático, né?*”; “*Até agora está bem legal fazer*”. As práticas reflexivas que a realização das atividades propiciou mostram a sintonia entre teoria e prática, o que agradou os estudantes. A perseverança e responsabilidade foram motivadas entre eles de forma que a argumentação foi favorecida em situações de igualdade, uma vez que trocaram informações e

tentaram “convencer” um ao outro com argumentos válidos, o que foi percebido nas análises *a posteriori*, destacadas nas seções anteriores.

Vale ressaltar que alguns estudantes comentaram que, em princípio, tiveram dificuldade em se expressar por escrito, mas, à medida que progrediam nas atividades, achavam que estavam se saindo cada vez melhor.

Isso posto, em relação ao processo de construção da compreensão da Integral Definida, pode-se dizer que os significados construídos responderam ao que era esperado, pelo menos em um nível aceitável. Avaliamos que a proposta didática descreveu estratégias que possibilitaram diferentes experiências aos estudantes e que foram implementadas de forma a encorajá-los a se envolver na resolução das tarefas. Dessa forma, consideramos que tal proposta atendeu as expectativas de ampliação dos conhecimentos sobre a Integral Definida, visto que as análises das práticas realizadas nas três atividades pelas duas duplas trazem evidências que justificam considerar *Alta* a adequação cognitiva-afetiva.

7.5.3 Adequação instrucional (mediacional e interacional)

Para que a adequação mediacional seja considerada alta, segundo o EOS, deve-se fazer uso de materiais manipuláveis e tecnológicos e, ainda, uma abordagem por meio de um conjunto articulado de situações-problema. Godino *et al.* (2013) salientam que o uso de recursos manipulativos e tecnológicos, de maneira apropriada para a aprendizagem de temas matemáticos específicos, é um componente do *conhecimento especializado do conteúdo* e melhora as expectativas de aprendizagem. Buscando atender a esses pressupostos, utilizamos, em cada atividade, uma situação-problema motivadora para a aprendizagem dos conceitos em estudo e tarefas a serem resolvidas com o apoio do GeoGebra. Os recursos – guias de atividades impressos e digitais, GeoGebra, gravadores, aplicativos usados nas reuniões remotas – foram apresentados e utilizados de forma equilibrada, possibilitando aos estudantes justificarem, intuitivamente, e visualizarem a convergência dos resultados para a resolução da situação-problema proposta.

Foi perceptível que os recursos tecnológicos contribuíram para a autonomia dos estudantes na resolução das atividades propostas, sendo o GeoGebra suporte no desenvolvimento dos processos cognitivos dos estudantes.

O ambiente de estudo – laboratório de informática –, nos encontros presenciais, estava adequado para o desenvolvimento da proposta didática. No entanto, quatro estudantes não puderam participar dos encontros remotos, pela falta de infraestrutura básica, quais sejam,

computador e acesso à internet. Os fatores relacionados à disponibilidade de equipamentos também influenciaram na realização das atividades das duplas que participaram do encontro remoto, pois um dos estudantes teve problemas com conexão de internet durante o desenvolvimento da Atividade 3, outro não tinha câmera disponível no computador, se comunicando com sua dupla apenas pelo áudio. Ficou evidenciado que o tempo inicialmente destinado à realização das atividades foi insuficiente, por isso, tivemos que ampliar, em algumas atividades, o tempo pré-determinado.

No aspecto interacional foi avaliada a interação ocorrida com os participantes da pesquisa permitindo identificar possíveis conflitos semióticos e resolver aqueles que ocorreram durante o processo de instrução. Dessa forma, o desenvolvimento de competências comunicativas e do trabalho autônomo dos estudantes foi considerado no desenho e na implementação da proposta didática.

As respostas manifestadas no primeiro encontro presencial mostraram a necessidade da implementação de uma sessão de *feedback* ao final da realização de cada atividade e no início da atividade seguinte. Assim, foram realizadas discussões, em grupo, sobre os significados alcançados. O trabalho em duplas, e os momentos específicos de *feedback* e institucionalização foram favoráveis à construção de significados. A forma de interação principal, implementada nos encontros presenciais e remoto, foram a dialógica e cooperativa. As duplas de estudantes realizaram as atividades, com discussões e compartilhavam ideias e soluções e, vez outra, solicitavam a intervenção da professora-pesquisadora ou do bolsista de Iniciação Científica que acompanhou a atividade. No entanto, percebemos que, na Atividade 3, que foi implementada remotamente, a comunicação perdeu um pouco a intensidade. Na reunião geral com todo o grupo, os estudantes tiveram pouca participação, por mais que tentássemos fazer uma abordagem dialógica.

Nas práticas realizadas pelos estudantes, reconhecemos alguns conflitos ocorridos e tentamos, por meio de perguntas apropriadas, levá-los à resolução desses conflitos, com base na análise de argumentos próprios que pudessem trazer foco ao que deveria ser analisado.

Esses elementos possibilitaram considerar a adequação da mediação instrucional (mediacional e interacional) como *Média*.

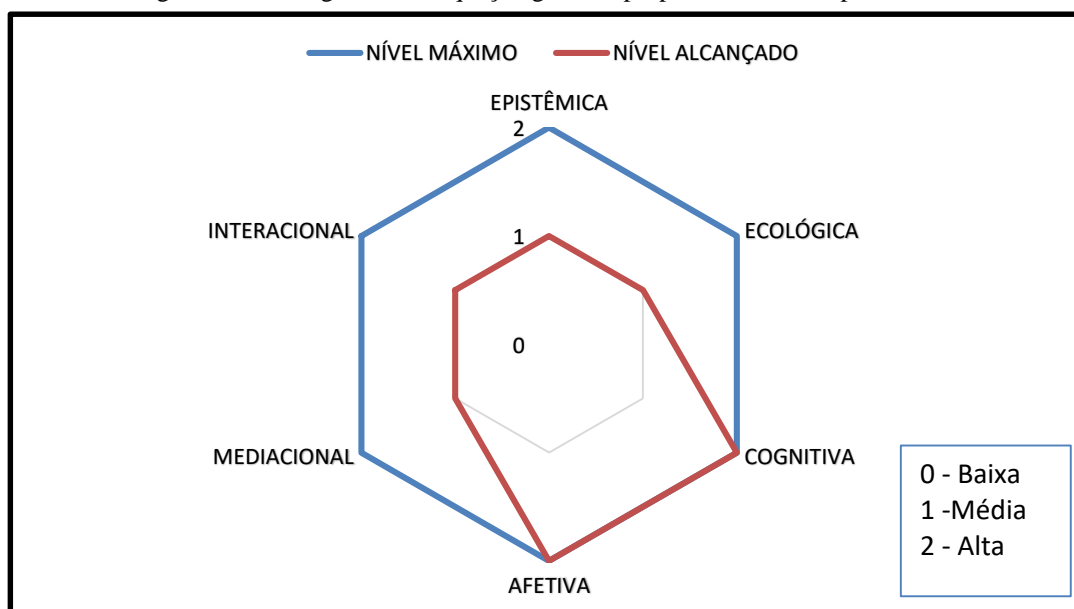
7.5.4 *Perspectiva Geral da Adequação Didática*

Assim como em Breda, Font e Lima (2014), analisamos cada uma das facetas propostas pelo EOS na implementação da proposta didática desta investigação. Criamos uma

categorização, de caráter didático, com o objetivo de apresentar a avaliação da adequação da proposta didática implementada. Nessa categorização foram incluídos três níveis, conforme já destacado anteriormente, seguindo a sugestão de Godino (2011): *Baixa (0)*, *Média (1)*, *Alta (2)*. Com base nessa categorização, construímos uma representação gráfica para exibição das adequações avaliadas.

Utilizamos o hexágono regular proposto por Godino (2011) para representarmos a avaliação da adequação geral da proposta didática presente nesta investigação, correspondente ao processo de estudo planejado em que um grau máximo de adequação parcial foi assumido *a priori*, conforme explicitado na Figura 40. O hexágono interno corresponde à adequação didática empírica do processo de estudo investigado, considerando as respostas manifestadas pelas duas duplas que realizaram as três atividades propostas.

Figura 40 – Hexágono da adequação geral da proposta didática implementada



Fonte: A autora, 2021

Em um processo de estudo ideal, todos os indicadores de instrução da didática da Matemática, elencados anteriormente no Quadro 13, deveriam ser cumpridos em conjunto e um hexágono regular poderia ser obtido. Consideramos, para a valoração da proposta didática, o detalhamento dos componentes e indicadores de adequação didática previstos em Godino *et. al* (2013). No entanto, ao implementar um processo de estudo, podem ocorrer situações em que uma das facetas avaliadas não obtenha um grau máximo de avaliação. Isso aconteceu, conforme disposto, no processo de estudo implementado nesta investigação, por isso, obtivemos um hexágono representando essa avaliação. Desse modo, enquanto a distância do centro a cada um

dos vértices do polígono regular representa a pontuação máxima em relação à adequação correspondente, o hexágono interno reflete, portanto, a avaliação do processo de estudo implementado.

CAPÍTULO 8 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nossas considerações acerca da pesquisa realizada, ressaltando o percurso feito e entendimentos para a compreensão dos resultados alcançados.

Ao iniciarmos esta investigação, motivada por indagações, elaboradas a partir das reflexões construídas ao longo de nossa trajetória profissional, relacionadas à necessidade de aprimoramento de nosso conhecimento profissional docente quanto aos conhecimentos didático-matemáticos, tínhamos como premissa a problematização referente ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e às dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes e, também, alusivas ao planejamento dos professores que lecionam disciplinas em cursos de graduação relacionadas à Matemática. Esse contexto de estudo tem despertado o interesse de diferentes pesquisadores, dentre os quais destacamos Tall (2002); Alves (2012); Almeida e Iglioni (2013); e Vieira, Silva e Nascimento (2017) que abordam aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos, entre outros citados nos trabalhos presentes no Estudo Preliminar desta pesquisa.

A imersão na leitura de obras científicas que abordam essa temática, reforçada pela nossa prática como professora da disciplina Cálculo, fez-nos perceber a necessidade de identificar lacunas que justificassem a investigação em torno dos conhecimentos mobilizados acerca dos objetos matemáticos do Cálculo.

Perquirindo em nossas leituras, em González-Martin (2006), Apolinar (2014), Menoncini (2018), encontramos pesquisas que trazem apontamentos acerca das dificuldades e possibilidades de promoção da aprendizagem da Integral Definida, considerada uma ferramenta interdisciplinar útil na resolução de situações-problema que descrevem aspectos da realidade.

Identificamos, em nossa experiência docente e nas pesquisas realizadas, que, comumente, nas aulas cujo conteúdo de Cálculo Integral é abordado, há predomínio de aspectos procedimentais, cálculos operacionais e trabalho com algoritmos. Assim, foi possível propor uma investigação em que o objeto de estudo se relaciona à associação de aspectos formais de generalização, representação, permitindo reflexões acerca da mobilização de competências e desenvolvimento de conhecimentos e processos cognitivos de estudantes de Matemática na aprendizagem da Integral Definida, o que nos motivou a empreender estímulos didáticos para se potencializar a aprendizagem de conceitos relativos à Integral Definida.

A esse aspecto acrescenta-se a preocupação com o fato de os estudantes, por vezes, não conseguirem estabelecer conexões entre teoria e prática, o que nos motivou a abordar contextos

intramatemáticos – conexões estabelecidas apenas entre objetos matemáticos – e extramatemáticos – inclui elementos externos que influenciam a interpretação e a solução, estabelecendo relações com conceitos abordados – na construção de uma proposta didática, assistida pelo *software* GeoGebra, que abordou conhecimentos acerca da Integral Definida de funções reais de uma variável real.

Ao delimitarmos os caminhos da pesquisa, a temática da formação didático-matemática de professores nos chamou atenção pela relevância na mobilização de conhecimentos matemáticos e didáticos, inerentes à profissão docente, e desenvolvimento de competências dos estudantes de Licenciatura em Matemática.

Dessa forma, a proposta didática desenvolvida e implementada visou mobilizar competências específicas desses estudantes, necessárias ao aprendizado do Cálculo, tais como criar hipóteses, mobilizar o raciocínio intuitivo e dedutivo, generalizar, resolver situações-problema, utilizar diferentes tipos de registros de representação como, por exemplo, linguagem natural, algébrica, gráfica, analítica ou computacional. Ressaltamos que o papel da representação não foi assumido exclusivamente pela linguagem nesta investigação, mas pelas situações-problema, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos que podem ser expressão ou conteúdo das funções semióticas, conforme destacado por Godino, Batanero e Font (2008).

Entendemos que a estrutura dos cursos de Licenciatura em Matemática vem passando por avanços consideráveis na organização curricular por meio do desenvolvimento de disciplinas específicas da Matemática, Educação Matemática, Educação, entre outras, em que se busca a formação de professores a fim de ampliar seus conhecimentos científicos e profissionais, resignificando-os a partir da atribuição de novos sentidos, e de criar condições para que possam oportunizar situações de aprendizagem socialmente significativas. Com esse entendimento, a formação didático-matemática de professores foi considerada nesta pesquisa, desenvolvida a partir da questão: *De que forma uma proposta didática sobre a Integral Definida, com suporte de tecnologias digitais, pode contribuir para a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de estudantes de Licenciatura em Matemática?*

A partir dessa questão, “*analisar como um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática mobiliza competências e desenvolve conhecimentos didático-matemáticos, durante a implementação de uma proposta didática que aborda significados da Integral Definida, envolvendo tecnologias digitais*” constituiu-se o objetivo da pesquisa, a qual foi realizada por meio do referencial teórico Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução

Matemática – EOS (GODINO, 2002, 2012; GODINO; BATANERO; FONT, 2008) e Conhecimento Didático-Matemático do professor de Matemática (GODINO, 2009; PINO-FAN; GODINO, 2015).

Na metodologia, aspectos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996, 2011) foram utilizados da forma como o EOS (GODINO *et al.*, 2013, 2014) recomenda. As fases da Engenharia Didática foram articuladas às facetas do EOS – epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva, instrucional –, sendo denominadas: Estudo Preliminar, Desenho, Implementação da Trajetória Didática, Avaliação.

Na fase do Estudo Preliminar, a noção de significado de referência proposto no EOS possibilitou uma orientação específica para a epistemologia do conteúdo. Tal fase permitiu perceber o cenário pertencente às contribuições das investigações que abordam aspectos teóricos, conceituais, metodológicos e práticos, relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. Identificamos as convergências das investigações selecionadas, com ênfase para:

- a) a utilização de situações-problema, com o objetivo de contextualizar as aplicações da Integral Definida – o que reforçou a nossa concepção de que tal estratégia tem o potencial de trazer maior dinamicidade aos processos educativos;
- b) a realização da interlocução entre teoria e prática;
- c) o desenvolvimento da autonomia dos estudantes e conhecimento dos estilos de aprendizagem;
- d) a evolução dos conhecimentos e das habilidades dos estudantes na relação entre conceitos, significados e procedimentos de Cálculo;
- e) aspectos da semiótica, utilizados como constructo teórico, evidenciando a compreensão do conceito matemático estudado, com base no uso das múltiplas representações;
- f) o aspecto tecnológico como contribuição para renovação das práticas de ensino, e consequentemente, o aprimoramento da compreensão de conceitos matemáticos.

Identificamos, também, algumas dificuldades para a aprendizagem dos estudantes, de conhecimentos relativos à Integral Definida, como carência de conhecimentos prévios, sobretudo aqueles referentes a conteúdos de Matemática vistos na Educação Básica; falta de compreensão na articulação da Integral, como o limite de uma adição de medidas de áreas de retângulos, com medidas de bases infinitesimais; conceitualização da Integral Definida, baseada unicamente na noção de área; tendência de excessiva algebrização e/ou algoritmização; carência da abordagem gráfica; dificuldades com a notação simbólica e com os registros de representação. Nessa fase, também foi possível refletir acerca das indicações para pesquisas

futuras, o que auxiliou na delimitação de possíveis caminhos para a pesquisa. Consideramos esses elementos que emergiram da análise feita nessa Fase como relevantes para a compreensão de aspectos relativos aos processos de ensinar e de aprender Integral Definida, os quais implicam as práticas dos professores ao planejar e realizar aulas, bem como implicam os conhecimentos dos estudantes de Licenciatura em Matemática acerca das práticas docentes.

A construção da proposta didática, realizada na Fase do Desenho, assumiu como princípio que ao estudante poderia ser oportunizada maior responsabilidade quanto ao processo de aprendizagem, além de possibilitar uma fonte para o diálogo entre professor, estudante e teoria, promovido pelas interações entre os estudantes que realizaram as atividades em duplas; entre os estudantes e a professora-pesquisadora, que possibilitou o desencadeamento de discussões referentes ao conhecimento abordado, potencializando o progresso da compreensão dos estudantes; entre os estudantes e os recursos didáticos; além das interações professora-recursos-estudantes.

A proposta didática, organizada em duas unidades – 1) Institucionalização do conceito de Integral Definida e 2) Aplicações da Integral Definida em contextos extramatemáticos – foi composta por três atividades: a) introdução à definição de Integral de Riemann; b) aprimorando a compreensão do conceito de Integral Definida; e 3) Aplicações da Integral Definida na Física – problemas de movimento. Cada uma dessas atividades trouxe uma situação-problema como ponto de partida para a realização de uma sequência de tarefas que buscaram dar sentido e significado aos conhecimentos implícitos nelas. Tais situações compuseram uma amostra de situações-problema que envolveram contextos intramatemáticos – os elementos constitutivos da Soma de Riemann – e extramatemáticos – conceitos relacionados ao movimento em Física.

As atividades que compõem o desenho da proposta didática previram, sistematicamente, um sistema de objetos e processos que a resolução das tarefas envolvendo Somas de Riemann trouxe em ação como forma de identificação de possíveis conflitos de aprendizagem e possibilidade da mobilização de competências e construção ou aprimoramento de conhecimentos didático-matemáticos, uma vez que foram apresentadas situações-problema relacionadas à Integral Definida, para as quais foram mobilizados aspectos ontossemióticos, relacionados à interdisciplinaridade, tecnologias digitais e configurações didáticas que buscaram contribuir para com a compreensão dos estudantes acerca dos significados dos objetos matemáticos em estudo.

O discurso teórico, desenvolvido ao longo das atividades, possibilitou aos estudantes realizá-las, mobilizando processos cognitivos como generalização, particularização, comunicação, visualização, argumentação, dentre outros, necessários ao desenvolvimento de

competências e conhecimentos. Além da análise da aprendizagem da Integral Definida, consideramos que o desenvolvimento da proposta didática e o processo de solução das situações-problema contribuíram para o conhecimento profissional dos estudantes, participantes da pesquisa, conforme os resultados alcançados, mencionados adiante.

Compreendemos o Desenho da proposta didática como potencializador para promover o ensino da Integral Definida e possibilitar sua aprendizagem significativa, uma vez que a análise ontossemiótica, realizada em cada uma das atividades, ao considerar os objetos primários emergirem na implementação das atividades, pode orientar o processo pelo qual são construídos os conhecimentos em torno da Integral Definida; os aspectos relacionados às facetas do EOS – epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional – utilizados na fase do Desenho possibilitaram:

- a) a abordagem de alguns significados parciais da Integral Definida, considerando as configurações epistêmicas propostas por Crisostomo (2012);
- b) a análise da diversidade de contextos de aplicação e utilização desse tema;
- c) a análise dos aspectos cognitivos-afetivos e instrucionais relacionados ao ensino e à aprendizagem da Integral Definida, que tem o potencial de possibilitar a compreensão de dificuldades apresentadas pelos estudantes; e
- d) a indicação de mobilização de processos cognitivos que também pode orientar o processo educativo.

Na fase da Implementação da Trajetória Didática, as atividades foram aplicadas, inicialmente, a dez estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, em dois encontros presenciais e um encontro remoto, com duração de, aproximadamente, três horas/aula cada encontro. O padrão de interação em ação nesta fase teve evidência da configuração dialógica representada pela autonomia dos estudantes na busca por estratégias de resolução das atividades propostas. As configurações didáticas e os processos cognitivos mobilizados nessa fase nos ajudaram a identificar fatos didáticos significativos, como experimentações realizadas no GeoGebra; institucionalização da representação algébrica dos objetos matemáticos que compõem uma Integral de Riemann, tais como limite, somatório; associação e institucionalização do conhecimento relativo à Integral Definida, usando a formalização matemática, entre outros que orientaram a análise dos conhecimentos didático-matemáticos dos estudantes sobre esse tópico da Matemática.

As discussões ocorridas nos encontros presenciais e remotos nos fizeram perceber dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação a conhecimentos matemáticos, tais como dificuldades de compreensão em relação a conceitos da Matemática Básica, por exemplo,

conceitos de Geometria Plana, Funções, Transformação de Escalas de Medida; dificuldades da transição da particularização para generalização de conceitos relacionados à Soma de Riemann, dificuldade na linguagem escrita como um mecanismo que atende a complexidade do pensamento, entre outras.

Consideramos que, por meio da problematização e da realização das atividades propostas, os estudantes foram envolvidos em um ambiente o qual possibilitou uma postura de autonomia, provocação de indagações, reflexões e comparações, integrando as informações obtidas e descobertas em um processo de construção de seus próprios conhecimentos. Compreendemos que a estruturação desse ambiente didático configurou-se como importante para oportunizar a formação de conceitos e aprendizagens relativas à Integral Definida, em especial, criou oportunidades para que os estudantes da Licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa, ressignificassem seus conhecimentos e refletissem sobre aspectos a serem considerados em suas (futuras) práticas docentes, em vários sentidos: a) epistêmico, aprimorando conhecimentos; b) competência matemática, na resolução de problemas; e c) didático, ao se depararem com experimentos com *software*, interdisciplinaridade, argumentação e comunicação.

Conjecturamos que quando os participantes da pesquisa foram colocados na vanguarda das práticas matemáticas, promovidas no desenvolvimento das tarefas da proposta didática, esses (re)construíram e ampliaram seus conhecimentos nas dimensões interpretadas pelo modelo CDM. Esses conhecimentos vão além dos necessários para resolver problemas, pois aqueles envolvem justificativas e argumentações matemáticas para a abordagem e apresentação de conteúdos matemáticos, mobilização de diferentes representações, entre outros.

Nesse contexto, destacamos: a progressão alcançada no *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que os estudantes ampliaram seus conhecimentos em torno dos objetos matemáticos que compõem uma Soma de Riemann; ampliação do *conhecimento especializado do conteúdo*, potencializado pelo uso de diferentes representações e significados parciais da Integral Definida, na busca por apresentar respostas condicentes e formalmente elaboradas em contextos extramatemáticos, com a utilização de tecnologias digitais; aperfeiçoamento do *conhecimento ampliado do conteúdo*, potencializado pela realização de processos de particularização e generalização e conexões com objetos matemáticos mais avançados presentes nos programas de ensino.

Foi possível justificar tais afirmações pelo fato de que foi identificado, nas análises das práticas realizadas, que os estudantes desenvolveram processos cognitivos como generalização, particularização, representação, visualização, institucionalização, comunicação, interpretação,

enunciação, argumentação, entre outros. Ao desenvolverem esses processos, perceberam que deve haver uma compreensão do conhecimento em torno dos objetos matemáticos e não somente de aspectos relacionados à capacidade de memorização das propriedades relacionadas a esses, de forma a articular, com maior qualidade, suas relações, proposições, justificativas e argumentações.

A compreensão dos conhecimentos da Dimensão Matemática, proposta pelo modelo CDM, possibilita o conhecimento das ideias matemáticas, desenvolvimento das relações necessárias entre os objetos matemáticos, trabalho com as múltiplas representações dos objetos matemáticos, apresentação de uma coerência longitudinal em relação a esses objetos. Identificamos que as atividades presentes nesta pesquisa buscaram o desenvolvimento de tais competências.

Na fase de Avaliação, realizamos uma análise detalhada das práticas realizadas na implementação da proposta didática sobre Integral Definida. As ferramentas, bem como as noções de objeto matemático e configuração de processos do EOS tornaram possível descrever, sistematicamente, nas análises *a priori*, os significados institucionais que se esperavam ser colocados em ação na solução das tarefas e os significados pessoais que os estudantes poderiam ampliar.

Dessa forma, foram identificadas configurações didáticas — como, por exemplo, manipulações no GeoGebra, institucionalização dos objetos matemáticos que compõem uma Soma de Riemann — e práticas, correspondentes a um conjunto de tarefas — como preparação da imagem do mapa do parque no GeoGebra, realização da aproximação da medida da área da região que representa a superfície do parque — que permitiram verificar o quanto os estudantes institucionalizaram os conhecimentos em torno dos objetos matemáticos em estudo, aprimorando a familiarização com a simbologia matemática e as manipulações algébricas, necessárias ao cálculo da Integral Definida de funções reais de uma variável real, contínuas, em determinado intervalo.

Foram explicitados as trajetórias didáticas e os elementos de análise utilizados *a priori* e *a posteriori*, concluindo com a avaliação da adequação didática proposta pelo EOS, em que foram analisadas questões relacionadas à problematização da Integral Definida, ao currículo e fatores condicionantes — aspecto epistêmica-ecológico; processos de aprendizagem — aspecto cognitivo-afetivo; uso de recursos e modos de interação — aspecto instrucional. Observamos que a aplicação desse modelo de análise didática sistemática para a descrição, explicação e avaliação de trajetórias didáticas nas aulas de Matemática se constituíram potencializadoras para as práticas de ensinar tópicos matemáticos, uma vez que a análise desenvolvida

possibilitou respostas conexas às questões: *O que aconteceu aqui e por quê?* Ainda, o estudo detalhado de aspectos descritivos e explicativos da aplicação da proposta didática permitiu estabelecer avaliações fundamentadas, que servem de orientações para a melhoria das implementações subsequentes.

Na avaliação *a posteriori* da aplicação da proposta didática, foi possível perceber que, quando o estudante entende o significado dos objetos matemáticos, o professor pode trabalhar com argumentos aprimorados que contribuem para o desenvolvimento da habilidade de formalização e o rigor matemático, pois terá partido de ideias já amadurecidas por eles, posto que tiveram oportunidade de fazer manipulações algorítmicas e estabelecer relações conceituais, potencializando a compreensão dos significados, que aos poucos pôde ser construída. Foram identificados fatos didáticos significativos que nos fizeram perceber alguns conflitos semióticos, os quais constituem a falta de consistência dos significados pessoais dos estudantes em relação aos significados institucionais. Os pontos fortes e as limitações associadas aos diferentes aspectos avaliados tornaram-se evidentes e estão destacados de forma sintetizada no Quadro 33:

Quadro 33 – Abordagem de pontos fortes e entraves manifestados pelos estudantes na implementação da proposta didática

Principais pontos que implicaram positivamente os significados pessoais dos estudantes acerca de conhecimento relativo à Integral Definida que contribuíram para a mobilização de competências e desenvolvimento dos conhecimentos didático-matemáticos de estudantes de Licenciatura em Matemática	Dificuldades manifestadas pelos estudantes em momentos específicos na realização da proposta didática
<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolvimento de habilidades, na realização de experimentos com o GeoGebra, utilizado como ferramenta auxiliar para a resolução de problemas que envolvem a Integral Definida. • Ampliação dos conhecimentos relativos à Integral Definida, em contextos intra e extramatemáticos, com o uso de aplicações que evidenciaram a definição geométrica. • Desenvolvimento de autonomia. • Expressão de materialidade ao objeto matemático em estudo, partindo para a formalização e generalização desse conceito em contextos extramatemáticos. • Mobilização de processos cognitivos, tais como: visualização, intuição, generalização, particularização, representação, argumentação, comunicação, síntese, entre outros. • Produção de argumentos dedutivos. • Coordenação entre as representações numérica, algébrica, geométrica e computacional. 	<ul style="list-style-type: none"> • Dificuldades de compreensão em relação aos conhecimentos referentes à Matemática estudada na Educação Básica. • Dificuldades da transição da particularização para generalização de conhecimentos relacionados a uma Soma de Riemann. • Dificuldades na linguagem escrita como um mecanismo que atende a complexidade do pensamento. • Apresentação de alguns conflitos cognitivos relacionados aos objetos matemáticos que compõem uma Soma de Riemann – retângulos, segmentos, área, somatório, tais como: <ul style="list-style-type: none"> ✓ relacionar as medidas das áreas dos retângulos ao processo de somatório, permitindo adicionar quantidades infinitamente pequenas; ✓ generalizar a medida da altura $f(c_i)$ (com $i = 1, 2, \dots, n$) dos retângulos e compreender a expressão $f(c_i) * \Delta x$ usada para representar a medida área de um

<ul style="list-style-type: none"> • Estimulação à capacidade de explorar, conjecturar, refutar, concluir, demonstrar, abstrair. • Aprimoramento do uso da linguagem simbólica, estimulando a habilidade de fluência na linguagem matemática. • Utilização do raciocínio intuitivo e experimental, • Revisão e aprimoramento de conceitos e propriedades referentes a conhecimentos da Matemática estudada na Educação Básica e do Cálculo Integral. • Aprimoramento e compreensão de conhecimentos relativos aos infinitésimos e infinito. • Realização de atividades interdisciplinares, com destaque para a interpretação de um modelo relacionado à Física, envolvendo movimento. 	<p>retângulo;</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ entender a lógica dos infinitésimos, na compreensão da amplitude dos intervalos considerados em uma Soma de Riemann, na referência de Integral como limite de uma soma finita. ✓ associar o conceito de limite de um somatório, com a soma das medidas das áreas dos retângulos, com o número desses tendendo a infinito, com a definição formal de Integral Definida. • Dificuldades de compreensão e escrita da linguagem matemática relacionada às somas sucessivas e, também, na interpretação gráfica. • Dificuldades na interpretação das tarefas. • Tendência dos estudantes a não relacionar a Integral Definida a outros contextos, além de medida de área de superfícies.
---	---

Fonte: A autora, 2021

Realizamos a avaliação do processo educativo, promovido pela aplicação da proposta didática, com base nos resultados de duas duplas que fizeram as três atividades propostas. Foi identificado um nível *satisfatório* de adequação didática, a partir da perspectiva do modelo de Análise Didática proposto pela Abordagem Ontossemiótica, uma vez que, na categorização de caráter didático, tivemos quatro facetas avaliadas como nível *médio* de adequação (epistêmica, ecológica, mediacional, interacional) e duas facetas avaliadas com *alta* adequação (cognitiva, afetiva). Dessa forma, entendemos que a proposta didática apresentada formou um viés de condições favoráveis para o ensino e a aprendizagem do conhecimento da Integral Definida.

No entanto, embora a adequação didática tenha sido considerada como *satisfatória*, as aptidões epistêmica-ecológica e instrucional (mediacional e interacional) não foram tão bem avaliadas como *a priori*. Os estudantes perpassaram por dificuldades, principalmente relacionadas à escrita e interpretação da simbologia matemática, referentes à mudança de representações e à interpretação geométrica, que foram atenuadas pelo uso do GeoGebra. O trabalho com os limites e com os somatórios também evidenciou dificuldades cognitivas dos estudantes, como, por exemplo, a compreensão da associação dos infinitésimos na referência da Integral como limite de uma soma finita, assim como a identificação e generalização dos três elementos essenciais presentes na Integral de Riemann (retângulos, segmentos e área).

Ainda, os fatores relacionados à disponibilidade de equipamentos influenciaram na realização das atividades das duplas que participaram inicialmente dos encontros presenciais, pois algumas duplas não possuíam computadores em suas residências, muito menos conexão à *internet* disponível, não conseguindo participar do encontro remoto.

Algumas limitações identificadas sugeriram possíveis modificações, adaptações ou reorganizações que possibilitarão melhor adequação. Por exemplo, as tarefas poderiam ter sido apresentadas de forma mais sintetizada e menos instrumentalizada, com questões dissertativas que motivassem maior reflexão dos estudantes.

Ficou evidenciado, no encontro que ocorreu remotamente, que o diálogo entre os participantes da pesquisa perdeu um pouco a intensidade em razão da indisponibilidade de recursos tecnológicos. Ressaltamos, ainda, que o tempo necessário para a implementação da atividade de forma remota foi maior do que o tempo previsto. Consideramos, portanto, que o contexto da pandemia da COVID-19 limitou, de certa forma, a coleta de dados para essa investigação. Aqui, refletimos que outros resultados poderiam ter sido obtidos com a implementação da proposta didática – e, como consequência, da pesquisa realizada – em encontros presenciais, conforme previsto inicialmente. Nesse sentido, outros estudos podem ser realizados e contribuir com seus resultados.

Identificamos que esta pesquisa colaborou com aspectos para o ensino da Integral Definida por meio de aplicações, trazendo a oportunidade de se trabalhar de maneira interdisciplinar e de forma mais dinâmica com o apoio das tecnologias digitais, representada pelo GeoGebra. A nossa compreensão é que a utilização dos recursos tecnológicos possibilitou aos estudantes participantes da pesquisa ressignificarem seus entendimentos acerca de conceitos relativos à Integral Definida. Algumas pesquisas presentes no Estudo Preliminar desta tese, como Reis (2015), Cometti (2018) e Menoncini (2018), já ressaltavam tal importância.

Este estudo atende às indicações de alguns pesquisadores, como Almeida (2017) e González-Martin (2006), que sugerem a utilização dos dados apresentados em suas investigações como forma de contribuição para outros estudos, a fim de viabilizarem um equilíbrio entre as situações didáticas e a-didáticas e menos defasagens nas análises *a priori* e *a posteriori*, dando ênfase à formulação e aplicação de materiais que abordam o ensino de Cálculo Integral. Também na produção de materiais didáticos proposto por Apolinar (2014) que inclua o desenvolvimento de competências algébricas, manipulação de objetos, explicação e modelação matemática de fenômenos envolvidos em situações-problema; desenvolvimento de pesquisas que utilizam tecnologia nos processos educativos, proposto por González-Martin (2006) e Oliveira (2016); inclusão de tarefas que envolvam a Integral Definida, proposto por Miranda (2018); adequação do estudo de objetos do Cálculo que articulam aulas teóricas e práticas com o uso de recursos tecnológicos, proposto por Crisostomo (2012), Brandão (2015) e Cargnin (2013) – a proposta didática desenvolvida e aplicada aos estudantes abarcam essas compreensões.

Para responder à questão: “*De que forma uma proposta didática sobre a Integral Definida, com suporte de tecnologias digitais, pode contribuir para a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de estudantes de Licenciatura em Matemática?*”, retomamos de forma sintética os apontamentos elencados aqui nas Considerações. Para tanto, ponderamos acerca dos conhecimentos matemáticos mobilizados ou construídos na resolução das atividades, também observamos as competências mobilizadas com o apoio do GeoGebra:

- a) o estabelecimento de conexões entre teoria e prática promovidas pelo uso de situações-problema representativas permitiu aos estudantes se sentirem motivados no processo de aprendizagem dos conhecimentos relativos à Integral Definida;
- b) a utilização de contextos extramatemáticos trouxe materialidade ao objeto teórico da Integral Definida, partindo para a formalização e generalização desse conceito;
- c) foram mobilizadas competências específicas, necessárias ao aprendizado do Cálculo, tais como: criação de hipóteses, mobilização do raciocínio intuitivo e dedutivo, generalização e utilização dos conhecimentos construídos na resolução de situações-problema;
- d) a institucionalização do conceito da Integral Definida possibilitou a familiarização do estudante com a simbologia matemática referente a esse conceito;
- e) o desenvolvimento da autonomia do estudante potencializou ações que facilitaram a compreensão da definição formal da Integral de Riemann, de uma função contínua f ;
- f) a interdisciplinaridade promovida por meio de práticas que relacionaram o conhecimento relativo à Integral Definida às ideias de movimento em Física contribuiu para o entendimento das aplicações desse objeto matemático em contextos extramatemáticos;
- g) o uso de diferentes tipos de registros de representação como, linguagens natural, algébrica, gráfica, analítica ou computacional foi observado por expressões verbais, quando os estudantes responderam às questões discursivas propostas em língua natural e, ainda, ao discutirem entre si sobre a resolução das tarefas e, também, ao sintetizarem as expressões usando a linguagem simbólica matemática ou a linguagem discursiva;
- h) a mobilização de processos cognitivos como generalização, particularização, institucionalização, representação, materialização, comunicação, enunciação, argumentação, algoritmização e problematização que estiveram presentes na realização das práticas matemáticas potencializaram a construção dos conhecimentos matemáticos inerentes à Integral Definida.

- i) por meio de experimentações com o uso do *software* GeoGebra realizadas nas atividades, os estudantes puderam associar, em um sistema cartesiano, a representação da medida da área de uma região, sob uma curva, definida em um intervalo fechado $[a, b]$, limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$, à medida da área de uma superfície específica, revisando a definição formal da Integral Definida e fazer relações dessa medida de área com grandezas relacionadas à distância e deslocamento na Física.

Quanto aos conhecimentos didáticos, conjecturamos que as experiências vividas pelos estudantes, na resolução das atividades, contribuíram para a formação desses, pois puderam verificar que o desenho das atividades, que abordou situações-problema em contextos intra e extramatemáticos, interdisciplinaridade, tecnologias digitais, pode ser adaptado e aplicado para estudantes em qualquer nível de ensino, fazendo a adaptação para o conteúdo matemático a ser trabalhado. Ainda, a interação oportunizada entre estudantes, estudantes e professor, estudantes e recursos instrucionais pode ser tomada como experiência para práticas futuras.

Encerramos nossas considerações, apontando algumas sugestões para estudos futuros. Quando as atividades envolvem contextos que trazem sentido e significado aos conhecimentos em torno do objeto matemático em estudo, os estudantes tendem a compreendê-lo melhor, nesse sentido, esta investigação sinalizou para a necessidade da realização de novas pesquisas que tratem da implementação de propostas didáticas com tarefas que envolvam o conhecimento relativo à Integral Definida em outros contextos intramatemáticos, como em situações que envolvem o cálculo da medida do comprimento de arco e medida do volume de superfícies de revolução e extramatemáticos, como em outros tópicos da Física, como Termodinâmica, além de contextos em outras áreas, como Biologia, Estatística, Probabilidade, Economia.

Esta investigação suscita futuras pesquisas envolvendo objetos matemáticos fundamentadas nos subsídios da teoria EOS com professores de Matemática em atividade, em que possam ser analisadas as adequações didáticas de processos educativos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação Gráfica das Derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, v.15, n.1, 2002, pp. 193-219. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37415110>. Acesso em 16 abr. 2021.
- ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, set./dez., 2013.
- ALMEIDA, M. V. **Material para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche**. 2017. 259f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2017.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ALVES, F. R. V. Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a Várias Variáveis. In: CONFERENCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 2012, Montevideo. **Actas...** 2012, p. 484-491.
- ANDERSEN, E. **As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**. 2011. 128f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2011.
- APOLINAR, E. S. **Significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en una institución educativa de Nivel Superior**. 2014. 239f. Tese (Doctorado en Innovación Educativa) - Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Monterrey, 2014.
- APOSTOL, T. M. **Calculus**. One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. v.1. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 167-198.
- ARTIGUE, M. L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 18, n. 2, p. 231-262, mai/août. 1998.
- ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En: **En amont et en aval des ingénieries didactiques** — XVe École d'Été de Didactique des Mathématiques. Grenoble: Editions La Pensée Sauvage, 2011, p. 225-237, 2011.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique, In: BRUN, J. **Didactiques des Mathématiques**, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-264.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1988.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. Knowing Mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, Washington, v. 29, n. 1, pp. 14-17, 20-22, 43-46, 2005.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; SCHILLING, S. G. Mathematical knowledge for teaching: adapting U.S. measures for use in Ireland. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 3. p. 372-400, jul. 2008.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dec. 2008.

BERRY, J. S., NYMAN, M. A. Promoting student's understanding of the Calculus. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 22, n. 4, p. 481-497, 2003.

BEZERRA, C. A. **Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o software GeoGebra**. 2015. 87f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

BISHOP, A. J. Mathematics Education as a field of study. In: CLEMENTS, M. A.; BISHOP, A. J.; KEITEL-KREIDT, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. (Ed.). **Third International Handbook of Mathematics Education**. Nueva York: Springer International, 2013, p. 265-271.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução a teorias e aos métodos**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRANDÃO, A. K. D. C. **Integral Definida: um signo a compreender**. 2015. 204f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2015.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. Parecer CNE/CP nº 2/2015. **Diário Oficial da União**, Brasília, Seção 1, p. 13, de 25 de junho de 2015.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education**, v. 8, n. 2, 2014.

BURGOS, M.; BUENO, S.; GODINO, J.D.; PÉREZ, O. Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus REDIMAT – **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 10, n. 1, pp.4-40, 2021. doi: 10.17583/redimat.2021.6778

CAMACHO, M.; DEPOOL, R.; GARBÍN, S. Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. **Educación Matemática**, Distrito Federal, v. 20, n. 3, p. 32-57, dec. 2008.

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da Integral de Riemann de funções de uma variável real**: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 417f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2013.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: UBUZ, B.; HASER, C., et al (Ed.). **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education** (CERME 8). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, 2013. p. 2985-2994.

CARVALHO, J. I. F. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de Probabilidade com professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental**. 2017. 347f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2017.

CIBOTTO, R. A. G.; OLIVEIRA, R. M. M. A. TPACK — Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo: uma revisão teórica. **Imagens da Educação**, Maringá, v. 7, n. 2, p. 11-23, jan./abr. 2017.

COMETTI, M. A. **Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis**: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem. 2018. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2018.

CONTRERAS, A.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. **Educación Matemática**, Distrito Federal, v. 16, n. 1, p. 59-87, abr. 2004.

CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ, L. Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. **Relime**, Volv. 9, Núm.n. 1, marzo, 2006, pp. 65-84, 2006.

COONEY, T. J. Research and teacher education: In search of common ground. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 25, n. 6. 1994.

CRISOSTOMO, E. **Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de profesores de Matemáticas**: una aproximación desde la investigación em Didáctica del Cálculo y el conocimiento profesional. 2012. 546f. Tese (Doctorado en Didáctica de la Matemática) - Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada, 2012.

CRISOSTOMO, E; MOTA, J. F; BRITO, A. B.; FERREIRA, R. D. A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da Integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1, 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: IGISP, 2012, p. 129-143.

CZARNOCHA, B.; LOCH, S.; PRABHU, V.; VIDAKOVIV, D. The concept of definite

integral: Coordination of two schemas. **Anais do PME** 25, 2, p. 297-304, 2001.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007.

DOUADY, R. A Universidade e a Didática da Matemática. **Caderno da RPM**, v.1, n.1, 1993.

DOUADY, R. **L'ingenierie Didactique**: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. Paris: Université Paris Diderot - Paris 7, 1993.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On difficulties with diagrams: theoretical issues. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 14, México. **Proceedings of the PME-14**. México: IGPME, 1990, p. 27-33.

DUBINSKY, E.; TALL, D. Advanced mathematical thinking and the computer. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 231-243.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 9.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2002.

EVITTS, T. **Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop While Solving Problems from Reform Curricula**. 2004. 308f. Tese (Doctor of Philosophy) –Pennsylvania State University College of Education, Pennsylvania, 2004.

FIGUEIREDO, E. B.; SIPLE, I. Z.; LONGEN, L. G.; BOEING, F. K. Integral Definida: um recurso tecnológico para o professor. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013, Canoas, RS. **Actas del VII CIBEM**. Canoas: Biblioteca Nacional de Uruguay, 2013. p. 6579-6589.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, p. 139-162, feb., 1993.

FLORES, C.; GARCIA, J. G. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el Nivel Superior. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 158-180, jan./abr. 2017.

FONT, V. Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria. **Unión**, San Cristóbal de La Laguna, v. 7, n. 26, p. 9-25, jun. 2011.

FONT, V. M.; CONTRERAS, A. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, 33-52. 2008.

FONT, V.; GODINO, J.; CONTRERAS, A. From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. *In*: L. RADFORD, G. SCHUBRING; F. SEEGER (eds.). **Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Historicity, Classroom, and Culture**. (pp. 157- 173). The Netherlands: Sense Publishers, 2008.

FONT, V. M.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 1, 97-124, 2013. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/23434841>. Acesso em: 02 mar. 2021.

FONT, V. M.; PLANAS, N. Y; GODINO, J.D. Modelo para a análise didático en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v. 33, n. 2, 2010. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf. Acesso em: 02 mar. 2021.

FONT, V., RUBIO, N., GIMÉNEZ, J.; PLANAS, N. Competencias profesionales en el máster de profesorado de Secundaria. **UNO**, Barcelona, n. 51, p. 9-18, abr. 2009.

FONT, V.; RUBIO, N. V. Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En: CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2, 2017, Granada. **Actas del CIVEOS**. Granada: Universidad de Granada, 2017, p. 1-21.

FROTA, M.C.R.; NASSER, L. Introdução. *In*: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009, p. 7-10.

GARNICA, A. V. M. **História oral em Educação Matemática**: outros usos, outros abusos. Guarapuava: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2007.

GIMÉNEZ, J.; FONT, V.; VANEGAS, Y. Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. *In*: Margolinas, C. (Ed.), **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22: Oxford, 2013.

GODINO, J. D, CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico: semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 26, n. 1, 39-88, jan./avr. 2006.

GODINO, J. D. BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, sep./déc. 1994.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. **Unión**, San Cristóbal de La Laguna, v. 5, n. 20, p. 13-31, dec. 2009.

GODINO, J. D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la Educación Matemática. En: CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2, 2017, Granada. **Actas del CIVEOS**. Granada: Universidad de Granada, 2017, p. 1-20.

GODINO, J. D. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Actas del XIII CIAEM**. Recife: UFPE/IACME, 2011, p. 1-20.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 16, 2012, Jaén. **Actas del XVI Simposio de la SEIEM**. Jaén: SEIEM, 2012, p. 49-68.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Granada: Universidad de Granada, 2014.

GODINO, J. D., BATANERO, C., CONTRERAS, A., ESTEPA, A., LACASTA, E.; WILHELMI, M. R. Didactic engineering as design-based research in Mathematics Education. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8, 2013, Manavgat-Side. **Proceedings of CERME8**. Manavgat-Side: ERME, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en Didáctica de las Matemáticas. **Revemat**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 46-74, jan./jun. 2013.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D., FONT, V.; WILHELMI, M. R. **Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática**. Documento no publicado del Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. Tradução de Edson Crisostomo. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p. 7-37, jul./dez. 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V.; GIACOMONE, B. Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 16, 2012, Jaén. **Actas del XVI Simposio de la SEIEM**. Jaén: SEIEM, 2012, p. 288-297.

GODINO, J. D.; FONT, V., WILHELMI, M. R.; CASTRO, C. Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 27, n. 1, p. 59-76, ene./abr. 2009.

GODINO, J. D.; FONT, V.; CONTRERAS, A.; WILHELMI, M. R. Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 9, n. 1, p. 117-150, mar. 2006.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de Matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, jan./abr. 2017.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico: semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 34, n. 2-3, p. 167-200, mai/déc. 2014.

GODINO, J. D.; RIVAS, M.; CASTRO, W. F.; KONIC, P. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 07, n. 2, p. 1-21, 2012.

GODINO, Juan. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 22, n. 2.3, pp.237-284, 2002.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. **La generalización de la Integral Definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos**. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. 2006. 498f. Tesis (Doctorado en Ciencias y Tecnologías). Universidad La Laguna. Laguna, 2006.

GUIMARÃES, O. L. C. Cálculo Diferencial e Integral: do algebrismo às representações múltiplas. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 25, 2002, Caxambu. **Anais da 25ª REUNIÃO ANUAL DA ANPEd**. Rio de Janeiro: ANPEd, 2002, p. 1-16.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M.; LOCK, P. F. **Cálculo e aplicações**. 4. edição. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

KÖCHE, J. C. **Fundamentos de Metodologia Científica**: teoria da ciência e iniciação à pesquisa. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Integrals as accumulation: a didactical perspective for school Mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33, Greece. **Proceedings of the PME-33**. Grece: IGPME, 2009, p. 417-424.

LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (Org.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

MARQUES, G. C. **Fundamentos de Matemática I**. Licenciatura em Ciências, Módulo 1: Terra e Universo. São Paulo: Univesp/EDUSP, 2014.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v.

2, n. 1, 64-74, jan./mar. 2016.

MELO, J. **Conceito de Integral**: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. São Paulo, 2002.

MENONCINI, L. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da Integral Definida no cálculo de área**. 2018. 228f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2018.

MIRANDA, G. M. H. **Esculturas matemáticas**: a atividade para o estudo da integral dupla. 2018. 321f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2018.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. What is technological pedagogical content knowledge? **Contemporary Issues in Technology and Teacher Education**, v. 9, n. 1, p. 60-70, 2009.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 6, p. 1017-1054, 2006.

MOTA, J. F. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot**. 2010. 207f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Instituto de Ciências Humanas. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

MOTA, J. F.; ABAR, C. A. A. P. Uma proposta de articulação entre teoria e prática no estudo da integral definida. **Revista Produção Discente Educação Matemática**, São Paulo, v.9, n.2, pp. 12-24, 2020.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM: Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa**. Recife: SBEM, 2007, p. 1-14.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. 2000.

OLIVEIRA, J. L. **A utilização de softwares dinâmicos no ensino de Análise Real**: um estudo sobre a construção do conceito de Integral de Riemann. 2016. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

ORTON, A. Students' understanding of integration. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 1, n. 14, p. 1-18, feb. 1983.

OTTE, M. **Complementarity, Sets and Numbers**. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. vol. 53, p. 203-228, 2003.

PINO-FAN, L. **Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada**. 2014. 418f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática)- Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada, 2014.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J.D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, v. XXXVI, n. 1, Junio de 2015 /87– 109.

PINO-FAN, L.R.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, v. XXXVI, n. 1, junho de 2015, pp. 87-109.

PINO-FAN, L.R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático de futuros professores sobre a derivada (Primeira Parte). **Revemat**, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 1-49, jul./dez. 2013.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la Derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p.141-178, jan./jun. 2011.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre Derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, jan./abr. 2015.

PINO-FAN, L. R.; GUZMÁN, I.; DUVAL, R.; FONT, V. The Theory of Registers of Semiotic Representation and the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction: Linking Looks for the Study of Mathematical Understanding. In: Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). **Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference**, v. 4, pp. 33-40. Hobart, Australia: PME, 2015.

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO MATEMÁTICA (Licenciatura). **PPC – Matemática**. Resolução CEPEX UNIMONTES, 17/10/2019.

RAJOBAC, R.; ROMANI, S. Jean-François Lyotard e a Condição Pós-Moderna: perspectivas para os fundamentos da Educação. **Signos**, Lajeado, v. 32, n. 1, p. 9-17, jan./jun. 2011.

RASSLAN, S.; TALL, D. Definitions and images for the definite integral concept. **Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, vol. 4, pp. 89-96, 2002.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisa e debates. Recife: SBEM, p. 81-98, 2009.

REIS, T. L. B. **Integral Definida**: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem. 2015. 238f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto de Ciências Humanas, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2015.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da história da Matemática e da resolução de problemas.** 2010. 324f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2010.

ROBLES, M. G. A. **La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local.** 2010. 186f. Tesis (Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa) - División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora. Hermosillo, 2010.

ROCHA, I. A. **Evolução do conceito de Função Integrável.** 2016, 111f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2016.

ROSA, C. M., ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. Desempenho acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, Campinas, v. 5, p. 1-16, 2019.

RUBIO G. N. V. **Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.** 2012. 444f. Tesis (Doctorado en Didáctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica) Facultat de Formació del Professorat, Universitat de Barcelona. Barcelona, 2012.

RUTHVEN, K. Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 7, n. 3, pp. 275-291, 2002.

SALINAS, P.; ALANÍS, J. A.; PULIDO, R.; SANTOS, F.; ESCOBEDO, J. C.; GARZA, J. L. **Cálculo aplicado: competencias matemáticas a través de contextos.** v. 3. Distrito Federal, México: Cengage Learning, 2012.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching Mathematics. In: TIROSH, D.; WOOD, T. (Ed.). **Tools and processes in Mathematics Teacher Education.** Rotterdam: Sense Publishers, 2008, p. 321-354.

SEALEY, V. A framework for characterizing student understanding of riemann sums and definite integrals. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 33, pp. 230- 245., 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002>

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-23, feb. 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2. p. 4-14, feb. 1986.

SOARES, L. H. **A dialética entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático.** 2015. 210f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2015.

SOUSA, J. R.; FONT, V.M.; GUSMÃO, T.C.R.S.; ROSEIRA, N.A.F. Contribuições do (re)desenho de tarefas para aproximação da matemática com o entorno social da escola. **Revista Práxis Educacional**, v.15, n.33, pp.444- 471, 2019.

SPINK, M. J.; MEDRADO, B. Produção de sentido no cotidiano: uma abordagem teórico-metodológica para análise das práticas discursivas. In: Spink, M. J. P. (Org.). **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano**. São Paulo: Cortez, 1999. p. 41- 61.

STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1-2, p.133-162, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. v.1. Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. v.1. Tradução: Helena Maria Ávila de Castro. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

TALL, D. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings...** Blackwood: ATCM, 2000, p. 1-20.

TALL, D. **Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive compyter graphics**. 1986. 504f. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) - Institute of Education, University of Warwick. Warwick, 1986.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19th, 1995, Recife, Brasil. **Proceedings...** Recife: UFPE, 1995. v. 1, p. 61-75.

TALL, D. Student's difficulties in calculus. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 7, 1992, Québec. **Proceedings of ICME-7**. Québec: ICME, 1992. p. 13-28.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 3-21.

TALL, D. Using Technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In: CARVALHO, L.M. and GUIMARÃES, L. C. (Eds.) **História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro, 2003, p.1-28. v.1.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12. p. 151-169, 1981.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 13,

jan./abr. 2000.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v. 1. São Paulo: Pearson Education, 2012.

TURÉGANO, P. Del área a la Integral. Un estudio en el contexto educativo. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 16, n. 2, p. 233-249, maio/ago. 1998.

TURÉGANO, P. **Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal**. 1994. Tesis doctorals. Universitat de València. València, 1994.

VERISSIMO, D. S. Modos de ausência e de presença do corpo a partir do telos sensório-motor corpóreo. **Psicologia USP**, São Paulo, v. 28, n. 3, p. 378-388, set./dez. 2017.

VIEIRA, A. R. L.; SILVA, A. P. C.; NASCIMENTO, E. F. Cálculo Diferencial e Integral: obstáculos e dificuldades didáticas de aprendizagem. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 7, n. 2, p. 4-19, 2017.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.


VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. In: TALL, D. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer publications, 1991.

VOGADO, G. E. R. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral por meio da resolução de problemas**. 2014. 167f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2014.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução de Ernani Ferreira da Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXOS

 Unimontes	UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS - UNIMONTES PRÓ-REITORIA DE ENSINO COORDENADORIA DE GRADUAÇÃO DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
---	---

PLANO DE ENSINO				
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS TECNOLÓGICAS				
Curso: MATEMÁTICA				
Disciplina: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I				
Departamento: CIÊNCIAS EXATAS				
Professor:				
Período	C/Horária Semanal		Carga Horária	Semestre/Ano Letivo
2º	Teórica	Prática	108.00	01/2020
	6			

Ementa
Limite e Continuidade de funções reais de uma variável real. Cálculo diferencial de funções reais de uma variável real e aplicações. Cálculo Integral de funções reais de uma variável real e aplicações. Integrais impróprias e técnicas de integração.

Objetivos
Geral: Possibilitar ao aluno conhecimento sobre funções reais de variáveis reais, limites, continuidade, derivadas e integrais. Específico: Aplicar os resultados aprendidos em outras disciplinas.

Conteúdo programático
Unidade 1: Funções reais de uma variável real. Limite e continuidade de funções reais de uma variável real. Unidade 2: Derivadas de funções reais de uma variável real. Estudo da variação de funções reais de uma variável real. Máximos e Mínimos. Aplicações. Teorema de Rolle e do valor médio. Cálculo Integral. Unidade 3: Cálculo Integral. Conceito. Teorema Fundamental do Cálculo. Integrais Imediatas. Aplicações. Técnicas de integração. Introdução ao estudo de funções de várias variáveis reais.

Metodologia de ensino
Aulas expositivas; Atividades em grupo e individuais; Pesquisas bibliográficas; Estudos dirigidos.

Procedimentos de Avaliação
Aspectos a serem avaliados: Interesse, assiduidade e participação; Domínio de conteúdo; Capacidade de análise e raciocínio lógico. Instrumentos de avaliação:

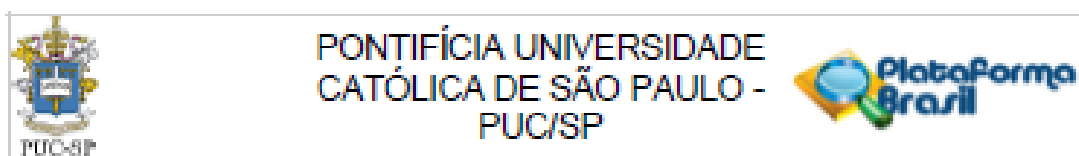
Atividades Avaliativas: Serão aplicadas três Atividades de 10 pontos cada.
Avaliativas em sala, individual ou em grupo, com consulta;
3 avaliações de 25, 25 e 20
1 Prova substitutiva
1 prova final.

Referência Básica

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. 4 v. ISBN 85-216-1257-5
LEITHOLD, Louis. O Cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1982. 1 v. (várias paginações)

Referência Complementar

Referência Suplementar



Continuação do Parecer: 3.643.407

Considerações Finais a critério do CEP:

O Colegiado do Comitê de Ética em Pesquisa, campus Monte Alegre da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - CEP-PUC/SP, aprova integralmente o parecer oferecido pelo(a) relator(a).

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1438844.pdf	13/01/2020 10:32:11		Aceito
Outros	Autorizacao_Coordenacao_Curso.pdf	13/01/2020 10:30:54	JANINE FREITAS MOTA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Pesquisa_JanineMota.pdf	05/01/2020 18:07:45	JANINE FREITAS MOTA	Aceito
Outros	Oficio_Comite.pdf	05/01/2020 18:06:55	JANINE FREITAS MOTA	Aceito
Parecer Anterior	Parecer_Comite_Programa.pdf	05/01/2020 18:01:21	JANINE FREITAS MOTA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_JanineMota.pdf	05/01/2020 16:48:48	JANINE FREITAS MOTA	Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_JanineMota.pdf	05/01/2020 15:56:10	JANINE FREITAS MOTA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

SAO PAULO, 30 de Março de 2020

Assinado por:
Antonio Carlos Alves dos Santos
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes CEP: 05.015-001
UF: SP Município: SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 Fax: (11)3670-8466 E-mail: cometica@pucep.br